

МЕТАФИЗИКА

ВЕК XXI

4



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

МЕТАФИЗИКА ВЕК XXI

АЛЬМАНАХ

ВЫХОДИТ С 2006 ГОДА

*Под редакцией
Ю. С. Владимирова*

ВЫПУСК

4

Метафизика и математика



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2011

УДК 530.12; 539.12
ББК 22.31
М54

Редакционная коллегия:

Ю. С. Владимиров (редактор-составитель), доктор физ.-мат. наук, профессор (Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);

С. А. Вékшенов, доктор физ.-мат. наук, профессор
(Российская академия образования);

П. П. Гайденок, доктор филос. наук, член-корр. РАН
(Институт философии РАН);

А. П. Ефремов, доктор физ.-мат. наук, профессор
(Российский университет дружбы народов);

Д. Г. Павлов, кандидат физ.-мат. наук
(МГТУ имени Н. Э. Баумана, директор по науке Института
гиперкомплексных систем геометрии и физики).

Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и ма-
М54 **тематика / под ред. Ю. С. Владимирова. — М. : БИНОМ. Лабо-**
ратория знаний, 2011. — 463 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-0551-3

Настоящий выпуск посвящен философскому (метафизическому) анализу оснований математики и ее соотношению с физикой. Сборник состоит из четырех частей. В первой части представлены статьи отечественных математиков, в которых рассматриваются фундаментальные проблемы математики. Во вторую часть вошли статьи выдающихся ученых прошлого об основаниях математической науки. Третья часть составлена из статей физиков-теоретиков, в которых обсуждаются вопросы соотношения физики и математики. Наконец, в четвертую часть включены работы философов об основаниях и ключевых проблемах математики.

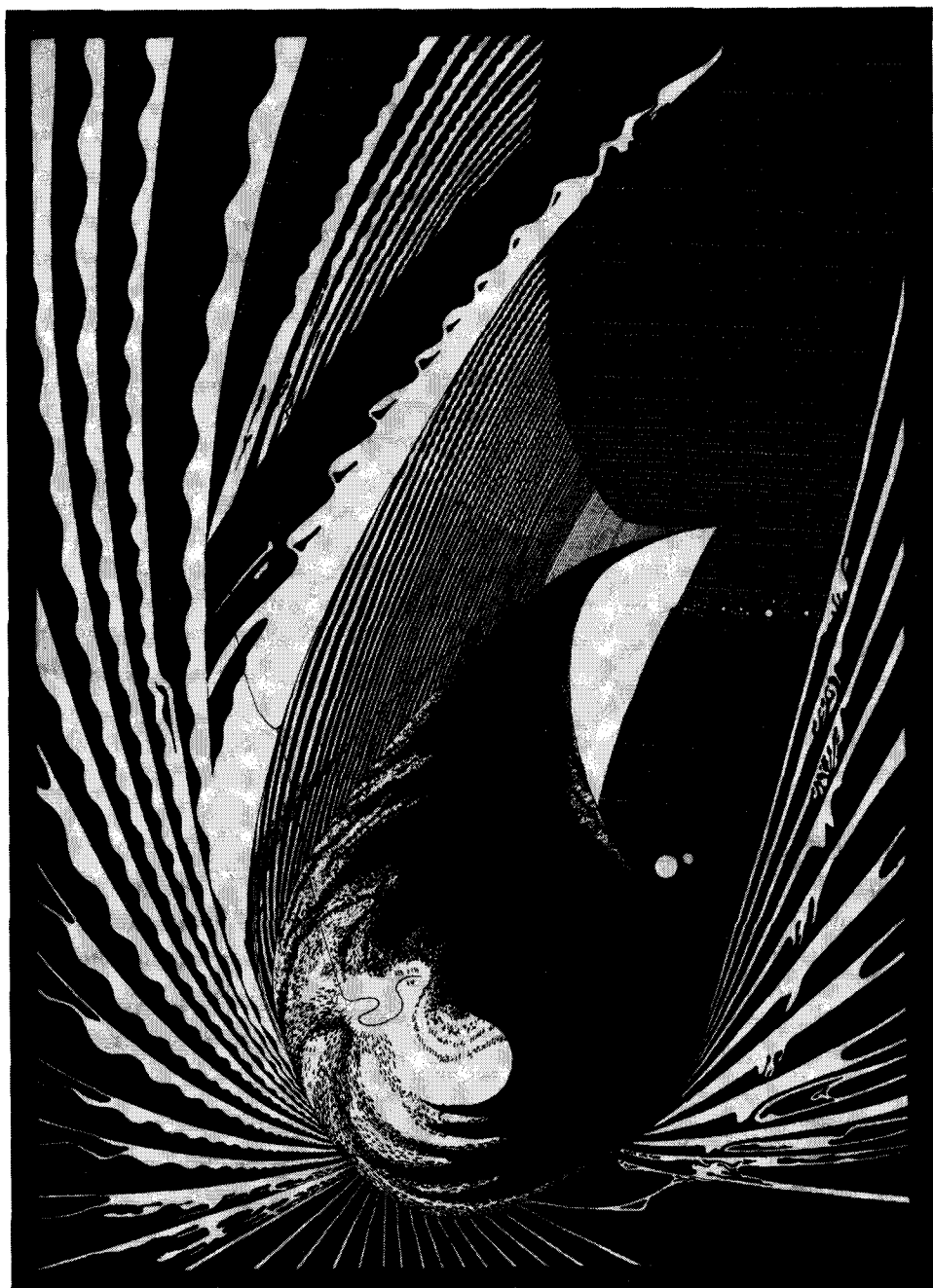
Для научных работников (математиков, физиков и философов), преподавателей вузов, студентов и широкого круга читателей, интересующихся основами мироздания.

УДК 530.12; 539.12
ББК 22.31

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

ISBN 978-5-9963-0551-3

© БИНОМ. Лаборатория знаний,
2011



Фоменко А. Т.
Расслоенное пространство

Предисловие редактора

«Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой в конечном счете математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволит в конце концов найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный «окончательный» ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками».¹⁾

Г. Вейль

«Математика — это форма, в которой мы выражаем наше понимание природы, но не содержание. Когда в современной науке переоценивают формальный элемент, совершают ошибку, и при том очень важную. . . »²⁾

В. Гейзенберг

«Математика сама по себе никогда ничего не объясняет — это лишь средство, с помощью которого мы используем совокупность одних фактов для объяснения других, и язык, на котором мы выражаем наши объяснения».³⁾

С. Вайнберг

Предлагаемый вниманию читателей четвертый выпуск альманаха «Метафизика. Век XXI» посвящен общеполософскому (метафизическому) анализу оснований современной математики в ее взаимосвязи с фундаментальной физикой. Напомним, что в предыдущем, третьем, выпуске рассматривались проблемы соотношения науки, философии и религии. Назначение данного альманаха состоит в выявлении общей направленности ключевых проблем в математике, физике и философии, что, надеемся, будет способствовать их более успешному решению. По нашему глубокому убеждению, все составляющие единой культуры опираются на одни и те же метафизические принципы, что предопределяет общность фундаментальных проблем, решаемых в рамках отдельных дисциплин.

В этом выпуске четыре части. В первых двух излагается трактовка оснований и проблематики математики самими математиками, в третьей части представлены взгляды физиков по вопросам соотношения математики и физики, а также их понимание роли математики в решении конкретных

¹⁾Цит. по книге В. И. Попкова «Физика и ее парадигмы». — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011, с. 51.

²⁾Там же, с. 69.

³⁾Там же, с. 48.

физических проблем. Наконец, в четвертой части раскрываются позиции философов относительно роли математики в развитии мировой культуры.

Перед каждой статьей помещена одна из известных графических работ академика РАН А. Т. Фоменко.

Часть I. Математики об основаниях математики и ее проблемах

В первую часть альманаха включены статьи отечественных математиков, в которых излагаются их взгляды на состояние математической науки, ее ключевые проблемы и перспективы дальнейшего развития.

Статья академика С. П. Новикова «Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе» имеет аналитический характер. В первой части статьи дана эволюция математики XVI–XIX вв. и общая характеристика состояния математики в первой половине XX в. Как пишет автор, это был «период беспредельного господства теории множеств в идеологии математики». В эти годы в развитии математики наметился уклон в сторону формализации исследований и отрыва от физики и других разделов естествознания.

Далее автор обращает внимание на необходимость тесного взаимодействия математиков с физиками-теоретиками, которые нередко приходят к важным математическим результатам. Новиков пишет: «Я понял в процессе изучения, что теоретическая физика, изученная систематически, с самых начал до современной квантовой теории, — это единое и нераздельное, обширное и глубокое математическое знание, замечательно приспособленное к описанию законов природы, к работе с ними, к эффективному получению результатов. Нельзя не согласиться с Ландау: чтобы понять это, необходимо изучить весь его „теоретический минимум“. Это — костяк, определяющий Ваш уровень цивилизации. Человек, не изучивший его, имеет убогое неполноценное представление о теоретической физике. Такие люди могут оказаться вредны для науки, их не хочется допускать к теоретической физике. Их влияние будет способствовать распаду образования. К сожалению, сообщество математиков того времени не изучало даже элементы этого знания, включая и тех, кто называл себя прикладными математиками. К примеру, я быстро обнаружил, что практически никто из специалистов по уравнениям с частными производными не знает точно, что такое тензор энергии-импульса, и ни за что не сможет математически четко определить это понятие».

Излишняя формализация и отрыв от физики позволяет говорить о некоем кризисе в математике на исходе XX в. Однако, как замечает автор, «наличие кризиса сообщества математиков с его системой образования и подходом к науке надо отделять от вопроса: есть ли кризис математики как науки?

Может быть, кризиса и нет, просто лучшие работы в ряде областей стали делать другие люди, выходцы из физики? В 70–80-е гг. довольно значительные коллективы физиков-теоретиков, включая прикладных физиков, по существу, стали математиками. Они много сделали для развития современной математики, дали ей большой импульс». Далее приводятся конкретные примеры.

В заключение статьи автор пишет: «Уход большой группы талантливых теоретических физиков в математику никем не будет восполнен. В самой математике образование дает гораздо меньше знаний, чем 30 лет назад. Из лучших университетов Запада выходят очень узкие специалисты, которые знают математику и теорфизику беспорядочно и несравнимо меньше, чем в прошлом». «Итак, мы встречаем XXI в. в состоянии очень глубокого кризиса. Нет полной ясности, как из него можно выйти: естественные меры, которые напрашиваются, практически очень трудно или почти невозможно реализовать в современном демократическом мире. Конечно, мы вошли в век биологии, которая делает чудеса. Но биологи не заменят математиков и физиков-теоретиков, это совсем другая профессия. Хотелось бы, чтобы серьезные меры были приняты».

Не утратило своей актуальности выступление академика **А. Н. Колмогорова «Автоматы и жизнь»**¹⁾ в МГУ имени М. В. Ломоносова (1961 г.), в котором были поставлены следующие вопросы:

«Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе такого самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?

Могут ли машины мыслить и испытывать эмоции?

Могут ли машины хотеть чего-либо и сами ставить перед собой новые задачи, не поставленные перед ними их конструкторами?»

Колмогоров высказал уверенность, что математика (кибернетика) в состоянии решить как эти, так и ряд других принципиальных вопросов о сущности жизни и мышления и о соотношении рациональных и иных форм познания.

Примечательна позиция академика по вопросу о соотношении дискретного и непрерывного: «Несомненно, что переработка информации и процессы управления в живых организмах построены на сложном переплетении дискретных (цифровых) и непрерывных механизмов, с одной стороны, детерминированного и вероятностного принципов действия — с другой. Однако дискретные механизмы являются *ведущими* в процессах переработки

¹⁾Материалы выступления А. Н. Колмогорова любезно предоставлены профессором мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова А. Н. Ширяевым, редактором-составителем юбилейного издания трудов А. Н. Колмогорова в трех книгах к его 100-летию со дня рождения. (М.: Физматлит, 2003).

информации и управления в живых организмах. Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными».

В ряде высказываний проявляется отрицательная позиция Колмогорова по вопросу признания актуальной бесконечности: «Проблемы, которые не могут быть решены без *большого* перебора, останутся за пределами возможностей машины на сколь угодно высокой ступени развития техники и культуры. К этому выводу мы пришли, не обращаясь к понятию *бесконечности*. Оно нам не понадобилось и вряд ли понадобится при решении реальных проблем, возникающих на пути кибернетического анализа жизни. Зато важным становится другой вопрос: существуют ли проблемы, которые ставятся и решаются без необходимости большого перебора? Такие проблемы должны прежде всего интересовать кибернетиков, ибо они реально разрешимы».

Заканчивалось выступление словами: «Наше собственное внутреннее устройство, в принципе, может быть понято, но понятно и то, что это устройство содержит в себе колоссальные, ничем не ограниченные возможности. На самом деле, нужно стремиться этот глупый и бессмысленный страх перед имитирующими нас автоматами заменить огромным удовлетворением тем фактом, что такие сложные и прекрасные вещи могут быть созданы человеком, который еще совсем недавно чем-то непонятным и возвышенным находил простую арифметику».

В статье профессора мехмата МГУ П. К. Рашевского «О догмате натурального ряда» поставлен вопрос о справедливости общепринятой арифметики в случае очень больших чисел. Как пишет автор: «Натуральный ряд и сейчас является единственной математической идеализацией процессов реального счета. Это монопольное положение осеняет его ореолом некой истины в последней инстанции, абсолютной, единственно возможной, обращение к которой неизбежно во всех случаях, когда математик работает с пересчетом своих объектов. Более того, так как физик использует лишь тот аппарат, который предлагает ему математика, то абсолютная власть натурального ряда распространяется и на физику и — через посредство числовой прямой — предопределяет в значительной степени возможности физических теорий. . . Быть может, положение с натуральным рядом в настоящее время имеет смысл сравнивать с положением евклидовой геометрии в XVIII в., когда она была единственной геометрической теорией, а потому считалась некой абсолютной истиной, одинаково обязательной и для математиков, и для физиков. Считалось, само собой понятным, что физическое пространство должно идеально точно подчиняться евклидовой геометрии (а чему же еще?). Подобно этому мы считаем сейчас, что пересчет как угодно больших материальных совокупностей, измерение как угодно больших расстояний в физическом пространстве и т. п. должны подчиняться существующим схемам натурального ряда и числовой прямой (а чему же еще?)».

Далее П. К. Рашевский высказал гипотезы относительно обобщений координатного пространства, построенного на основе иной аксиоматики арифметики. Примечательно, что в работах В. Л. Рвачева было показано, что измененные представления о свойствах натурального ряда уже воплощены в физике в виде закономерностей специальной теории относительности, т. е. не в координатном пространстве, а в пространстве скоростей.

Вопрос, поставленный Рашевским, ныне приобретает особый интерес в связи с рядом астрофизических открытий. Не исключено, что возникшие в астрофизике и космологии проблемы, в частности, с введением «темной энергии» могут оказаться связанными с проявлениями изменений арифметики на очень больших расстояниях.

Статья академика В. И. Арнольда «Математика и физика: родитель и дитя или сестры?» примечательна, главным образом, позицией этого выдающегося отечественного математика в вопросе соотношения физики и математики. В данной работе, приведенной здесь в сокращенном виде, обосновывается положение о единстве математики и физики. В этом контексте примечательны ссылки, с одной стороны, на высказывание Д. Гильберта, утверждавшего, что «геометрия — это часть физики», а с другой, — на заявление П. Дирака о том, что «физику никогда не следует опираться на физическую интуицию, которая чаще всего — имя для предвзятых суждений».

Статья профессора РАО С. А. Вékшенова «Метафизика и математика двойственности» посвящена обсуждению одной из существенных особенностей современной математики, проявляющейся и в теоретической физике, которую ныне стремится преодолеть философия, — это отсутствие динамики (понятия процесса) в самих основаниях дисциплин. Автор предлагает включить динамическую составляющую на основе учета принципа двойственности. Как пишет Вékшенов, «двойственность — фундаментальная особенность окружающего мира. Пространство и время, правое и левое, количество и порядок, частица и волна — подобные двойственные сущности можно множить и множить. Идея двойственности лежит на поверхности, но, пожалуй, только квантовая теория возводит ее, хотя и не вполне осознанно, в ранг фундаментальных принципов: дуализм Л. де Бройля, принцип дополнителности Н. Бора, принцип взаимности М. Борна.

Иную тенденцию реализует теоретико-множественная математика. Она видит мир как универсум разнообразий одной сущности — множества. Этот, казалось бы, естественный взгляд, однако, очень быстро приводит к принципиальным коллизиям типа парадокса Рассела, континуум-проблемы и пр. Внимательный анализ ситуации говорит о том, что источником большинства этих коллизий является „склейка“ двойственности, в данном случае, „количества“ и „порядка“ (пространства и времени). В результате этой склейки доминирующей становится количественная (пространственная) составляющая. Она же становится основой разнообразных формализмов, с которыми математика подступает к осмыслению реальности, в самом широком ее

понимании. Эти формализмы „продвигают“ свойственные теории множеств взгляды и коллизии в самые тонкие и абстрактные инструменты познания. В результате структуры реальности приобретают отчетливый количественный, пространственный оттенок. Даже само время в этой трактовке становится формой пространства. В этом количественном мире трансформируются, становятся невидимыми, исчезают целые концепции, основанные на интуиции времени. Масштаб потерь оценить сложно, но, вероятно, часть изгнанных из математики теорий возникают в образе теорий физических».

В статье подробно обосновывается позиция автора и предлагается конкретный путь реализации принципа двойственности в математике.

Часть II. Математики прошлого об основаниях математики

Вторую часть альманаха составляют статьи выдающихся математиков прошлого, в которых выдвигались ключевые идеи или рассматривались фундаментальные проблемы математических исследований, не потерявшие своей актуальности до наших дней.

Несмотря на то что мемуар **Б. Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии»** был написан полтора столетия тому назад, идеи, изложенные в нем, и сейчас находятся в центре внимания современной фундаментальной теоретической физики. Прежде всего, следует напомнить, что открытая Риманом геометрия лежит в основе математического аппарата общей теории относительности и современных представлений о гравитации и космологии. Как писал А. Эйнштейн: «Заслуга Римана в развитии идей о соотношении между геометрией и физикой двояка. Во-первых, он открыл сферическую (эллиптическую) геометрию, которая является антитезой гиперболической геометрии Лобачевского. Таким образом, он впервые указал на возможность геометрического пространства конечной протяженности. Эта идея сразу была воспринята и привела к постановке вопроса о конечности физического пространства. Во-вторых, Риман имел смелость создать геометрии несравненно более общие, чем геометрия Евклида или неевклидовы геометрии в более узком смысле»¹⁾.

Но и это не все. Как писал Эйнштейн: «Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, т. е. силами. Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики: эта мысль нашла свое фактическое осуществление семьдесят лет спустя в общей теории относительности, которая соединила в одно целое геометрию и теорию тяготения».

¹⁾Эйнштейн А. «Неевклидова геометрия и физика» //Собрание научных трудов. Т. 2. — М.: Наука, 1966, с. 181.

Придя к таким соображениям, Риман еще не мог понять, какие именно физические силы должны быть связаны с неевклидовостью геометрии. Интересно, что он уже размышлял о природе тяготения, но не привлек для этого свои геометрические идеи.

В мемуаре Римана высказан ряд других интересных соображений о пространстве, которые и сегодня не потеряли своего значения, оставаясь источником новых направлений исследований. Прежде всего здесь следует назвать его идеи о возможности изменения геометрии в микромире: «Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — по видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают метрическим отношениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления».

В настоящее время чрезвычайно важным является также поставленный Риманом вопрос о «внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве». Он пишет: «...или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное». Характерно, что Риман завершает свой мемуар словами: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день». Сейчас поводов для этого уже накопилось достаточно. И важнейшим из них является создание квантовой теории.

В последнее время в работах ряда авторов активизировались попытки заменить квадратичное мероопределение римановой геометрии на более общие случаи, соответствующие финслеровым геометриям (см., например, статью Д. Г. Павлова в этом выпуске альманаха). Впервые возможность таких обобщений была высказана в мемуаре Римана.

Наконец, следует отметить, что развиваемые ныне варианты многомерных геометрических моделей физических взаимодействий, известные как теории Т. Калуцы и О. Клейна, также восходят к работам Римана, который ввел понятие «многократно протяженных величин».

Далее в этот раздел включены некоторые разделы из книг **А. Пуанкаре «Наука и гипотеза»** и **«Последние мысли»**, в которых излагаются соображения о пространстве и времени. В разделе «Пространство» из первой книги Пуанкаре анализирует аксиоматику геометрии и, в частности, скрытые аксиомы геометрии. Он пишет: *«Геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами. Они суть условные положения (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы руководствуемся опытными фактами, но самый выбор остается свободным и ограничен лишь необходимостью*

избегать всякого противоречия. Поэтому-то постулаты могут оставаться *строго* верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближенными. Другими словами, *аксиомы геометрии* (я не говорю об аксиомах арифметики) *суть не более чем замаскированные определения*. В связи с этим Пуанкаре считает, что «никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; та или иная геометрия может быть только *более удобной*. И вот, евклидова геометрия есть и всегда будет наиболее удобной».

Пуанкаре считает, что «предмет геометрии составляет изучение лишь частной „группы“ перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме (*dans notre esprit*), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждений».

В разделе «Пространство и время» из книги «Последние мысли» Пуанкаре возвращается к обсуждению понятий пространства и времени в связи с открытием специальной теории относительности. Здесь следует обратить внимание на его высказывания об относительном характере понятий пространства и времени: «пространство гораздо более относительно, чем обыкновенно думают. Мы можем заметить лишь те изменения формы предметов, которые отличаются от одновременных изменений формы наших измерительных инструментов»... «То, что мы сказали о пространстве, применимо и ко времени».

Примечательны высказывания Пуанкаре в духе принципа Маха: «Все части мира связаны между собой, и как ни далек Сириус, он все-таки несколько действует на то, что происходит у нас. Поэтому если мы захотим написать дифференциальные уравнения, управляющие миром, то они или не будут точными или должны будут зависеть от состояния всего мира». В тексте также можно найти неоднократные высказывания в духе реляционной концепции пространства и времени: «Если мы желаем, чтобы наши уравнения прямо выражали то, что мы наблюдаем, то необходимо, чтобы расстояния непосредственно фигурировали в числе наших независимых переменных и тогда остальные переменные исчезнут сами собой».

В связи с современными дискуссиями о характере «темной материи» и «темной энергии» любопытно следующие рассуждения А. Пуанкаре: «Взаимодействие двух весьма удаленных друг от друга систем стремится к нулю, когда их взаимное расстояние бесконечно возрастает. Опыт показывает нам, что это приблизительно верно. Он не может показать нам, что это верно в точности, потому что расстояние между системами всегда остается конечным. Но никто не мешает нам считать его в точности верным; ничто не помешало бы нам предположить это даже в том случае, если бы опыт обнаружил в принципе кажущуюся ошибку. Предположим, что взаимодействия двух тел, уменьшавшееся сперва с ростом расстояния, затем начало возрастать. Ничто не мешает нам предположить, что для еще большего

расстояния оно снова начнет убывать, стремясь в пределе к нулю. В этом случае наш принцип получает характер условного соглашения и избавляется, таким образом, от посягательств опыта. Это условное соглашение, которое подсказывает нам опыт, но которое мы принимаем добровольно».

В статье Л. Э. Брауэра «**Интуиционизм и формализм**» обсуждается суть расхождений двух направлений в математике: «То, на чем зиждется убеждение в неоспоримой точности математических законов, на протяжении столетий было объектом философских исследований, и здесь можно выделить две точки зрения: *интуиционизм* (преимущественно французский) и *формализм* (преимущественно немецкий). Во многих аспектах две эти точки зрения становятся все более и более явно противопоставлены друг другу; но за последние несколько лет они пришли к согласию в том, что вопрос о применимости математических законов в качестве законов природы не представляет интереса. Но на вопрос, где же в действительности существует математическая точность, каждая из сторон отвечает по-своему; интуиционист говорит: „в разуме человека“, формалист: „на бумаге“».

Первая точка зрения восходит к идеям Канта, у которого «мы находим старую форму интуиционизма, на сегодняшний день практически полностью исчезнувшую, в которой время и пространство принимаются как формы познания, неотъемлемые для человеческого разума. Для Канта аксиомы арифметики и геометрии были синтетическими априорными суждениями, т. е. суждениями, не зависящими от опыта и не нуждающимися в аналитических доводах; и это объясняло их аподиктическую точность как в опытном мире, так и в абстрактном».

«Диаметрально противоположна точка зрения формализма, которая заключается в том, что человеческий разум не располагает точными образами, чтобы решать, какие из линий прямые, а какие нет, или, например, какие из чисел больше десяти, а какие меньше, и поэтому утверждает, что математические сущности существуют в нашем представлении о мире не больше, чем в нем самом».

В статье разъясняется на конкретных примерах, к каким расхождениям в математических рассуждениях приводит наличие этих «фундаментальных разногласий, которые разделяют математический мир. По обе стороны от них есть выдающиеся математические школы и возможность прийти к согласию между ними за конечное время практически исключена. Говоря словами Пуанкаре: „Les hommes ne s'entendent pas, parce qu'ils ne parlent pas la meme langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas“. („Люди не понимают друг друга, потому что говорят на разных языках и не учат другие“.)»

Перевод этой статьи на русский язык осуществлен Н. Е. Горфинкель и профессором С. Л. Катречко, написавшим также комментарий к работе Брауэра.

В статье «**Что такое континуум-проблема**» К. Гёделя, одного из крупнейших математиков XX в. и, несомненно, самого выдающегося ло-

гика этого столетия впервые на русском языке приводится обзор работ по знаменитой континуум-проблеме, в осмысление которой он сам внес исключительно важный вклад.

Континуум-проблема — это не только чрезвычайно сложная математическая задача, но и фундаментальный *метаматематический* вопрос: можно ли принципиально «очислить» континуум, сведя его к множеству точек? Такая мысль казалась неестественной еще Аристотелю. Формулируя континуум-гипотезу, Кантор бросил вызов двухтысячелетней традиции.

За истекшие шестьдесят с лишним лет после выхода в свет статьи К. Гёделя в математике произошли существенные перемены. Поэтому ее перевод на русский язык дается с комментарием С. А. Вékшенова, в котором приведен обзор наиболее значимых работ, посвященных дальнейшему осмыслению континуум-проблемы.

В статье П. Дж. Козна «Об основаниях теории множеств» обсуждаются ключевые вопросы теории множеств Кантора и пути поиска иных, не теоретико-множественных оснований математики. Перебрав ряд возможностей, автор пишет: «Наша интуиция о недостижимых или измеримых кардиналах еще недостаточно развита или по крайней мере не поддается передаче в общении. Мне кажется, тем не менее, что полезно развивать наше таинственное чувство, позволяющее судить о приемлемости тех или иных аксиом. Здесь, разумеется, мы должны полностью отказаться от научно обоснованных программ и вернуться к почти инстинктивному уровню, сродни тому, на котором человек впервые начинал думать о математике. Лично я, например, не в состоянии отказаться от этих проблем теории множеств просто потому, что они отражаются в теории чисел. Я сознаю, что моя позиция в прагматическом плане мало чем отличается от позиции реализма. Все же я чувствую себя обязанным сопротивляться великому эстетическому соблазну без околичностей принять множества как существующую реальность».

В статье (лекции) Германа Вейля «Бог и Вселенная» выражена убежденность великого математика XX в. в тесной связи между математикой бесконечного и восприятием Бога: «математика — наука бесконечного». Согласно Вейлю, понимание человеком Бога и его присутствия сначала основывалось на астрономических исследованиях и космологических представлениях, а в дальнейшем стало опираться на математику, «которая, безусловно, является важнейшим инструментом естественных наук. Но сверх того, и это убежденность многих великих мыслителей, глубокое чисто математическое исследование в силу своей специфики, точности и строгости так высоко возносит человеческий разум, что он оказывается в непосредственной близости к божественной сути, чего невозможно достичь никакими иными средствами медитации. *Математика — наука бесконечного*, ее восприятие человечеством как бесконечного в символах — конечно, и это — средство. Великое достижение древних греков в том, что

они отличили конечное от бесконечного, сделав важнейший шаг в познании действительности».

Но обратимся к главному вопросу, который ставит перед собой автор: «каким образом в природе проявляется божественное начало?» и рассмотрим приведенные в статье варианты ответа на него. «Как я понимаю, история человеческого мышления, в основном, предлагает два варианта ответа на этот вопрос. Оба ответа убедительны, но суть их различна. Первый ответ проще и, так сказать, более объективистский: повсеместность присутствия Бога в вещах реализуется посредством эфира. Второй — более „продвину-тый“, но и более формальный: божественный разум проявляется как свод математических законов, которым подчинена природа».

Далее, обсуждая два приведенных ответа, Вейль называет несколько стадий развития идеи о мировом эфире, тесно связанной с пониманием пространства-времени. Он пишет: «На третьей стадии развития представлений о структуре пространства-времени выясняется, что понятие абсолютного пространства некорректно, поскольку существенно выделенным является не состояние покоя, а состояние инерциального движения. При этом пропадает необходимость в вещественном эфире. Ньютон смог перейти в своих рассуждениях от равномерного движения к базовому понятию покоя с помощью схоластического приема, вообще-то весьма нехарактерного для строгого изложения „*Principia*“. Наконец, на последней стадии, общая теория относительности позволяет этой мировой структуре („эфиру“) и в инерциальном, и в причинном аспекте вновь оказаться физической сущностью, порождающей материальные силы. Таким образом, в определенном смысле круг замкнулся, хотя теперь условия, характеризующие состояние этого эфира, кардинально отличаются от тех, что были в самом начале, когда он считался вещественной средой».

Вейль склоняется ко второму варианту ответа на поставленный вопрос: «Но как бы мы здесь не превозносили могущество природных сил, которые современная физика называет гравитацией и эфиром („инерциальным полем“), для нас — не язычников, но христиан — эти понятия отнюдь не раскрывают конечной божественной сущности вещей. А что раскрывает? И вот здесь, следуя передовым идеям человечества о природе, как указаниям Божьего перста, я даю другой ответ на этот вопрос: наш мир — это не хаос, но *космос, гармонически упорядоченный нерушимыми законами математики*. Эта идея практически не имеет истории развития. Она вдруг появляется — и сразу в готовом виде — у пифагорейцев, а от них переходит в философию Платона».

Часть III. Физики о соотношении математики и физики

В этой части альманаха изложены взгляды физиков-теоретиков на фундаментальные физические проблемы и на роль математики в поисках их решения. При этом вырисовывается чрезвычайно важная роль философских позиций, которых они придерживаются.

В статье доктора физ.-мат. наук, профессора Ю. С. Владимирова «Физика, метафизика и математика», во-первых, утверждается, что физика, метафизика («теоретическое ядро философии») и математика представляют собой не отдельные независимые дисциплины, а три нераздельные стороны единого учения о мироздании. По этой причине бессмысленно ставить вопрос, какая из этих дисциплин является первичной.

Во-вторых, обосновывается положение, согласно которому в основании всех названных дисциплин (трех сторон единого учения) лежат одни и те же метафизические принципы. Главное внимание в статье уделяется принципу тринитарности, выступающему в виде принципа триединства в холистическом подходе и принципа троичности в редукционистском подходе, а также принципу фрактальности, согласно которому в каждой из выделенной из целого части проявляются свойства двух оставшихся составляющих. Разделение единого знания на физику, математику и философию уже означает использование редукционистского подхода. В статье, — главным образом на примере фундаментальной теоретической физики, — демонстрируется проявление принципа фрактальности. Показывается, что нечто аналогичное проявляется и в математике, и в философии.

В-третьих, высказывается мысль о том, что ввиду общности метафизических принципов, заложенных в основания трех дисциплин, имеет место общий характер свойственных им проблем. В физике это поиск единой физической теории, которую следует ожидать в результате построения макроскопической теории классического пространства-времени, т. е. вывода пространственно-временных отношений из наложения неких физических факторов (вместо того, чтобы считать пространство-время априорно заданным). При этом динамика (идея процесса) должна быть заложена в самое основание будущей теории (вместо господствующей ныне опоры на статику). Для этого предлагается использовать теорию бинарных систем комплексных отношений.

В математике к подобной проблеме можно отнести замену канторовской теории множеств, на основе которой формулируются основные разделы математики, чем-то иным. Канторовская теория множеств фактически играет в математике ту же роль, что и пространство-время в физике.

В философии решением аналогичной задачи можно считать переход к триединой философии, к чему призывали русские философы «серебряного века» В. С. Соловьев, С. Н. Булгаков и другие. Здесь следует обратить

внимание на современные тенденции трактовки философии как «философии процесса».

В-четвертых, автор исходит из положения, согласно которому решение ключевых фундаментальных проблем трех названных дисциплин лежит на путях их взаимодействия. Так, для построения искомой монистической физической парадигмы необходимо найти соответствующий математический аппарат, как это происходило при развитии физических теорий в рамках других парадигм. Не исключено, что развиваемый в рамках физики аппарат бинарных систем комплексных отношений (бинарных геометрий) окажется полезным и для математиков, на внимание которых хотелось бы рассчитывать.

В статье профессора Ю. И. Кулакова «Концепция двух миров» рассматривается вопрос о том, что считать первоосновой мира. В ней критикуется позиция материалистов, считающих первоосновой материю. Анализируя определения понятия материи, автор называет «бессодержательным» и «бесплодным» ленинское определение материи. Эта позиция подкрепляется высказыванием В. С. Соловьева: «Материализм как низшая элементарная ступень философии имеет всегдашнее прочное значение но как самообман ума, принимающего эту низшую ступень за всю лестницу».

Кулаков считает, что в основании мира в целом лежит «единство двух дополнительных друг к другу противоположных начал. Первое начало мы будем называть структурой, а второе — метаморфией». При этом под структурой фактически понимается рациональное начало (математика в специфическом реляционном понимании), тогда как метаморфия соответствует эмпиризму, т. е. «миру случайных фактов, не обладающих ни внутренним смыслом, ни онтологическим единством», в котором царит «лишь хаотическое многообразие форм, их непостижимая сложность, удручающая бессмысленность и непрерывное изменение, развитие, движение без какой-либо тенденции к повторяемости». Эта картина мира соответствует дуалистической философии Платона. Как пишет Кулаков: «Необходимо вернуться к гораздо более информационно емкой и наглядной линии Платона. Согласно гениальному предвидению Платона, подлинную основу мироздания составляют не поля и элементарные частицы, а более первичные, более фундаментальные и более абстрактные сущности — структуры, объективно существующие в мире высшей Реальности».

Таким образом, Кулаков из двух названных им начал считает первичной именно структуру (фактически математику в ее специфическом понимании), тогда как «физический мир, в котором мы живем и который воспринимается нашими органами чувств, является чем-то вторичным, производным от более фундаментального мира высшей Реальности, объективно существующего независимо от нашего сознания».

Следует заметить, что открытые Кулаковым бинарные структуры (системы отношений), как и всякий другой математический аппарат, могут

применяться для описания различных физических (и не только физических) явлений. Их трактовка и применение существенно зависят от используемой философской позиции. Исповедуемая автором философия неоплатонизма определяет статическую трактовку бинарных структур как отражение гендерных начал (мужского и женского) или в духе восточных символов Инь и Ян. Однако в упомянутой выше бинарной геометрофизике используется иная, динамическая, трактовка бинарных систем отношений, где два множества элементов трактуются как состояния в два последовательных момента времени, а сами отношения — как прообраз амплитуды вероятности переходов из начальных в иные состояния.

В статье доктора физ.-мат. наук, профессора А. К. Гуца «Метафизика времени и реальности» обсуждаются вопросы восприятия сознанием времени и физической реальности. Автор считает, что поскольку наше сознание сопряжено с классическим объектом — нашим телом, то «мир является классическим, поэтому выход за классические пределы невозможен. Поэтому, вопреки мнению Уилера, пространство-время — это объективная реальность. Но порождается она, как мы пытаемся показать в этой статье, сознанием, точнее, *всем набором индивидуальных сознаний*, сознанием же и воспринимается».

Автор пишет: «Мозг, по современным воззрениям Пенроуза и Хамероффа — это квантовая система. Мысль, идея, фантазия, появляющаяся в мозгу, есть результат макроскопического процесса, описываемого квантовомеханически (и не допускающего точного измерения) и в силу этого представляет собой квантовое состояние в мозгу субъекта. Субъект всего лишь подсистема системы, называемой миром, Реальностью. С состоянием этой подсистемы соотносятся другие подсистемы-субъекты и особая подсистема, которая носит название Природа». В статье обсуждаются макроскопические квантовые эффекты, а также квантовое созидание миров сознанием во времени на основе квантовомеханических представлений.

Особое внимание уделено паттернам, т. е. моделям, по которым формируются объекты или явления природы и общества. Отмечается, что если ранее искалось первовещество, то теперь правильней говорить о паттернах. Гуц пишет: «В 1960-е годы новосибирский физик Ю. И. Кулаков открыл набор элементарных алгебраических формул, которые присутствуют в геометрии и физике. Его учитель, Нобелевский лауреат И. Е. Тамм назвал их первоструктурами, объясняющими единство мироздания. Претензии структур Кулакова на роль паттернов, лежащих в основе всего Сущего, подкрепляются тем, что они обнаружены в геометрии и физике, социологии и психологии, микроэкономике, макроэкономике» и т. д. Плодотворность паттернов (структур) обусловлена тем, что «реальность не собирается по частям из частиц вещества в ходе эволюции от прошлого к будущему, как считает классическая наука, а является вся сразу целиком от прошлого до будущего

по заданным образцам, т. е. по конкретным паттернам, как определяет квантовая теория».

Можно также сказать, что структуры Кулакова (паттерны) имеют многочисленное проявление вследствие того, что они представляют собой универсальную систему алгебраических отношений, а отношение — ключевое понятие реляционного подхода к мирозданию.

В статье профессора Вл. П. Визгина «Непостижимая эффективность аналитической механики в физике» анализируется история создания и применения в физике вариационных принципов. Автор приходит к выводу о «возможности толкования теоретической физики как структур не только двойного бытия (математического и физического), но и как структур тройного бытия (третья онтология — аналитико-механическая). Последняя, хотя и не обращена непосредственно к физической реальности, не является, вообще говоря, и чисто математической, поскольку выделяет класс специфических математических форм, возникших на классико-механической почве. Наличие таких полионтологических структур и, соответственно, полисемантических языков в теоретическом естествознании, заранее вовсе не очевидное и логически ниоткуда не вытекающее, и позволяет говорить, в частном случае трех онтологий, о непостижимых эффективности математики в физике и аналитической механике, аналитической механики в физике и математике и даже физики — в математике и механике».

Характерно приведенное в статье высказывание Р. Фейнмана: «сам факт существования принципа минимума (действия) является следствием того, что в микромире частицы подчиняются квантовой механике». Это следует связать с тем фактом, что Фейнман пытался построить физическую картину мира в реляционном духе. Известно, что теория прямого межчастичного взаимодействия Фоккера — Фейнмана опирается на принцип действия Фоккера. Это же относится и к фейнмановской путезависимой формулировке квантовой механики. Можно полагать, что принцип экстремального действия присущ именно реляционному миропониманию, поскольку, строго говоря, теоретико-полевой подход развивался посредством открытия сначала самих фундаментальных полевых уравнений (Максвелла, Шредингера, Дирака и др.) и лишь затем для них подбирались соответствующие лагранжианы.

В статье доктора физ.-мат. наук, профессора А. П. Ефремова «„Отраженное воплощение“ математики» обосновывается следующее понимание математики: «Математика — синтез высших абстракций. Она существует объективно и всегда, как объективен и вечен физический мир — в любых известных и пока не известных его проявлениях. Математика, безусловно, не создается, но открывается; не сразу, а постепенно, по мере взросления человечества и повышения качеств составляющих его информационных систем. Математика не только описывает но, по всей видимости, и содержит в себе как зеркальное отражение глубинную суть вещей и явлений, как вещам

и явлениям имменентны структуры и закономерности, сущностно отражающие содержание различных областей и разделов математики. Математика — один из тех немногих объектов вселенной, присущая которым абсолютная информация порождает тождественную себе информацию сознания».

На основе этого понимания сущности математики, а также своей убежденности в высочайшем смысле алгебры кватернионов, поставленной на центральное место, автор развивает свои представления о структуре мира, если бы он определялся именно алгеброй бикватернионов. Таковым должен был быть мир шести измерений с симметрией между тремя пространственными и тремя временными размерностями.

В статье кандидата технических наук Д. Г. Павлова «Число, геометрия и реальность» излагается позиция, относительно соотношения физики и математики, аналогичная предыдущей статье. Автор пишет: «Несмотря на то, что большинство ученых, оценивая роль физики и математики в отношении познания человеком окружающего мира, на первый план выдвигают практический опыт и эксперимент, т. е. исходят из первичности физических построений, за которыми лишь в качестве инструмента для описания следуют специально подобранные математические конструкции, некоторые исследователи убеждены в возможности и целесообразности прямо противоположного подхода. То есть, когда не опыт выступает источником идей и представлений ученого об окружающем его мире, а сама математика, причем в лице наиболее красивых и простых своих элементов».

Далее автор отмечает: «На первый взгляд представляется, что подобный подход имеет слишком незначительные шансы на успех из-за огромного количества различных математических конструкций, что могли бы выступать в качестве потенциальной основы для такого рода поисков. Однако круг вероятных кандидатов можно весьма эффективно ограничить. . . , если отталкиваться не от всяких, но лишь от наиболее элементарных математических объектов. К таким простейшим объектам, в первую очередь, следует отнести числа. Однако различных классов чисел также довольно много. Помимо обычных, к которым, как правило, относят натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные, известны и такие как кватернионы, октавы, р-адические числа, числа Клиффорда, Грассмана и т. д., и т. п. Попробуем не распылять наше внимание по всем числам вообще, а сосредоточить его на Числах „с большой буквы“, т. е. на таких, чьи свойства уже доказали свою непосредственную связь с теми или иными проявлениями реального физического мира. Предлагается под Числами понимать представителей уже звучавшего выше ряда: натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные. . . ».

После анализа возможностей названных Чисел, а также кватернионов и октав, автор предлагает сосредоточить внимание на долгое время оставшихся в тени *двойных числах*. Подробно обсуждаются свойства двойных

чисел, сопоставляются их свойства с комплексными числами и указывается ряд особенностей в математике двойных чисел. Но самое существенное состоит в том, что в работе показаны некоторые физические проявления в мыслимом мире, построенном на основе теории двойных чисел.

Уже в названии **статьи доктора физ.-мат. наук Р. Ф. Полищука «Математика как часть физики»** отражена позиция автора по вопросу соотношения двух наук: *«человек разумный начинается там и тогда, где и когда он с несуществующим начинает действовать, как с существующим, т. е. начинается с мифа. Миф как виртуальное пространство культуры расчленяется в дальнейшем на искусство, религию, науку и философию. Наука есть развивающееся понятие. Человек есть ноосферная часть биосферы, которая, в свою очередь, есть часть Земли как небесного тела. Человек — космическое существо, рожденное космосом по закону космоса»*.

В системе современного математического знания чрезвычайно важную роль играют исходные постулаты теории. В связи с этим автор пишет: «Создание постулатов требует преодоления чувства реальности. Постулаты не самоочевидны, и именно поэтому требуется узаконить воображаемую реальность не существующих, создаваемых воображением идеальных объектов. Парменид разделил первоначальную космологию на тяготеющую к практике физику и на тяготеющую к теории метафизику (идеальных объектов, понятий), которые образуют сизигии, диалектически замкнуты друг на друга (физика в широком смысле слова содержит весь корпус познания мира и включает в себя и математический понятийный аппарат, и всю остальную метафизику)».

Автор скептически относится к идеям неоплатонизма: «Но движение к конкретному знанию неизбежно начинается с абстракций, которые платоники склонны сакрализовать».

В заключительной части статьи дается обзор общепринятых современным научным сообществом представлений о структуре всего физического мироздания, от теории элементарных частиц, до устройства и эволюции Вселенной в целом, включая вопросы сущности и происхождения жизни на Земле.

Часть IV. Философия и основания математики

Четвертая часть альманаха составлена из статей видных отечественных философов, посвященных основаниям математики и общим проблемам, которые стоят перед современной философией, физикой и математикой.

Этот раздел альманаха открывает статья выдающегося математика и философа академика РАН **И. Р. Шафаревича «Из истории естественно-научного мировоззрения»**, в которой анализируется история становления современных представлений об окружающем мире от античности до наших

дней. Утверждается, что современное естественно-научное мировоззрение опирается на следующие «четыре утверждения»: 1) существование законов природы, 2) экспериментальность, 3) объективность и 4) математичность.

Автор пишет о громадном числе «совпадений результатов чисто математических теорий и физических наблюдений. Многие физики и математики обращали внимание на эту загадку. По-видимому, имеется таинственный параллелизм между интеллектуальным миром математических и физико-математических рассуждений и реальным наблюдаемым миром. Это один из главных выводов, который можно сделать из всей предшествующей истории попыток человечества познать Космос. Но нам не известны границы такого параллелизма. Лосев в парадоксальной форме обращает внимание на трудности и опасности, возникающие, если (исключительно или непропорционально) опираться на рационально-интеллектуальный путь познания мира».

Процесс становления современного естественнонаучного мировоззрения анализируется на материале научных революций VI в. до н. э., XVII в. и минувшего XX в. Показывается, что уже в античности «дискутировался вопрос, можно ли естествознание (в основном, физику) основать на математике. Можно ли физические явления свести к числам или геометрическим понятиям, например, треугольникам и т. д.?». «В математике была создана концепция строгого доказательства и вывода всех утверждений из нескольких аксиом. Стройная система теорем геометрии, как она до сих пор преподается в школе, была построена в эту эпоху. Были открыты идеи интегрирования и дифференцирования, основы того, что сейчас называется интегральным и дифференциальным исчислением». Обсужден вопрос, почему произошла задержка в развитии этих идей до начала XVII в., когда фактически они же оказались истоком новой научной революции. Как пишет автор: «Видимо, эти идеи требовали слишком резкого отрыва от реального опыта, противопоставления человека природе. Вероятно, мыслители того времени ощущали некоторые опасности и трудности, связанные с направлением, возобладавшим в XVII в. Безусловно, такой выбор был связан с громадной жертвой — он резко затормозил развитие естествознания, начиная с III в. до н. э. Как говорит один историк, естествознание тогда внезапно остановилось в своем развитии, как бы натолкнувшись на невидимую стеклянную стену».

В заключительной части статьи автор обсуждает особенности современного этапа развития естественнонаучного мировоззрения.

Чрезвычайно важному вопросу посвящена статья доктора философских наук, член-корреспондента РАН П. П. Гайденко «Постметафизическая философия как философия процесса», в которой рассматривается становление и суть постметафизической философии. Как пишет Гайденко: «Изменчивость, непостоянство эмпирического мира, — то, что в античности

называлось становлением, в постметафизической философии воспринимаются как фундаментальные определения реальности — как физической, так и психической. То, что предстает в окружающем мире как прочное и устойчивое, объясняется *незаметностью изменений в потоке реальности*. На место единства и самоидентичности субстанции ставится *единство процесса; процессуальность* — вот теперь самая глубинная характеристика бытия» (...) «Не удивительно, что в постметафизической философии проблема времени — как чистой формы текучести, изменчивости, становления — оказывается ключевой философской проблемой. Постигнуть природу времени — значит понять, что такое бытие. Именно так ставится вопрос в философии жизни Дильтея, Бергсона, Шпенглера, в феноменологии Гуссерля, в философии процесса Уайтхеда, в фундаментальной онтологии Хайдеггера, в герменевтике Гадамера. „Философия процесса“, — вот, пожалуй, наиболее точное имя для философии XX в.».

«Итак, временность, длительность, становление, процесс, изменение, эволюция — вот ключевые определения реальности в постметафизической философии, определяющей свои исходные принципы в полемике с метафизикой, как она сложилась в античности и просуществовала вплоть до XVIII в. — до Лейбница и Вольфа. Если у Парменида, Платона, Аристотеля, Платина и Прокла подлинная реальность — мир бытия характеризуется как нечто тождественное себе и неизменное, в отличие от мира становления как изменчивого и преходящего, то в XIX–XX вв. происходит радикальная переоценка ценностей: как раз вневременное и неизменное рассматриваются как нечто неподлинное и нереальное, как статичное и косное, мертвое, а не живое».

В становлении философии процесса важную роль сыграли работы Бергсона. Как пишет Гайденко, «согласно Бергсону, в реальности нет ничего вневременного, сверхвременного. С его точки зрения, ложная метафизика — платонизм — с его учением о надвременных идеях как мире бытия, в противоположность текучему миру становления постигаемых только разумом, есть результат неправильного понимания природы разума и рассудка». Эти идеи затем были развиты Уайтхедом и рядом других философов XX в.

Выше уже обращалось внимание на универсальность метафизических принципов, пронизывающих физику, философию и математику. Это отражается и в схожести процессов, происходящих в этих областях знания: «Если в XIX в. принцип эволюции господствовал главным образом в биологии и социологии, то в последней трети XX в. происходит трансляция этого принципа в физику и космологию. Теория расширяющейся вселенной („Большого взрыва“) внесла в научное сознание идею космической эволюции и создала предпосылку для описания неорганического мира в терминах эволюции». Однако имеются и более серьезные обстоятельства. Если в философии произошел переход от представлений постоянства и неизменности бытия

к идее процессуальности бытия, то, как это уже подчеркивалось выше, аналогичные проблемы ныне стоят и перед физикой и математикой.

Статья доктора философских наук, член-корреспондент РАН В. В. Миронова «Метафизика и математика: точки соприкосновения» состоит из двух частей. В первой части, прежде всего, рассматриваются идеи основоположников метафизики Платона и Аристотеля. В частности, отмечается, что, согласно Аристотелю: «Физика (в тогдашнем ее понимании), математика и метафизика составляют фундаментальный корпус философии, в которой метафизика выполняет функции метанауки, обосновывая не отдельные знания, а знание как таковое, не истину физики и математики, но истину вообще. Философия и математика, таким образом, оказываются рядоположенными науками, так как с разных сторон занимаются идеальными сущностями. Философия исследует идеальные сущности как существующие реально (Платон) или созданные в результате философской рефлексии, а математика конструирует идеализированные сущности, помогая, в том числе и другим наукам, создавать системы идеализированных объектов науки».

Здесь же обсуждается вопрос о точности и доказуемости в математике: «Расхожее мнение о том, что большая точность естественных наук является только положительной характеристикой, отличающей их от гуманитарных, весьма относительно. Достижение большой точности может сопровождаться уходом в область чисто идеализированного конструирования, когда мы сами задаем критерии точности и истинности».

Далее в статье обращается внимание на проблемы, которые нельзя решить внутри самой математики. К ним относится, например, «проблема соотношения математических абстракций и действительности, проблема истинности математического знания» и другие. Приводятся высказывания ряда математиков по проблеме неопределенности математического знания и о сомнительности математических доказательств, в том числе Г. Харди, утверждавшего, что «в математике не существует абсолютно истинного доказательства, хотя широкая публика убеждена в обратном».

Во второй части статьи, написанной при участии Е. В. Косиловой, дан обзор проблем, обсуждавшихся на двух конференциях «Философия математики: актуальные проблемы», проходивших в 2007 и 2009 гг. на философском факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

Статья профессора А. П. Огурцова «Метафизика и способы обоснования исчисления вероятностей (разрозненные заметки)» посвящена истории развития представлений о вероятности и сущности ее проявлений — от времен античности до XX в., когда А. Н. Колмогоровым была построена аксиоматика теории вероятностей и были открыты закономерности квантовой механики. Как пишет автор: «К 30-м годам прошлого века — ко времени аксиоматизации теории вероятностей (1933 г.) А. Н. Колмогоровым разноречье в трактовке метафизических оснований исчисления

вероятностей отнюдь не исчезло. Одни ученые обосновывали вероятность с помощью математического ожидания, другие — с помощью предположения достоверности, третьи — с помощью веры, или уверенности, четвертые — с помощью понятия „массовые явления“ (коллектива, Р. фон Мизес), пятые — с помощью идеи случайности, случайных величин, случайных процессов, шестые — с помощью идеи возможности, седьмые — с помощью различения шанса и вероятности, восьмые — с помощью понятия частоты. Возникло не просто различие между объективной и субъективной вероятностями, но и открытая альтернатива между учеными, отстаивающими ту или иную интерпретацию вероятности, хотя уже давно отмечалась (например, Борткевичем) несостоятельность этого разделения».

Все эти точки зрения можно разглядеть в представленном ныне множестве различных интерпретаций квантовой механики. Споры физиков-теоретиков на эту тему не только не утихают, но время от времени разгораются с новой силой. Здесь имеется несомненная параллель между дискуссиями физиков, математиков и философов.

Как пишет Огурцов, «Принципиально различные подходы к вероятностям до сих пор сохраняются в философии науки, несмотря на ряд попыток преодолеть разрыв субъективной и объективной интерпретаций вероятностей. Осознание методологической и гносеологической значимости вероятностных методов в современной науке как в естественной, так и в социальной, ставит на повестку дня создание пробабилистской, вероятностной методологии науки. Среди ее принципов можно выделить: 1) гипотетический характер знания, 2) критерием научного знания является правдоподобность, а не истина, 3) трактовка каузации как идеализации вероятностных процессов, 4) фаллибилизм как фундаментальная характеристика научного знания, т. е. подверженность научного знания ошибкам, погрешностям, в отличие от инфаллибилизма религии и любых идеологий, 5) вероятностный характер теорий и оценка степени их вероятности, 6) поворот к индуктивной, а не к аксиоматико-дедуктивной логике, 7) достоверное знание как трансцендентальный идеал научного знания, 8) опровержение как процедура обоснования и оправдания теорий, 9) связь логики эмпирических наук с процедурами измерений и с теорией ошибок. Построение вероятностной методологии позволит, по моему мнению, избавиться от избыточных трактовок слова „вероятность“, когда им называются разнопорядковые предметы, предполагающие различные категориальные и методологические средства исследования».

Статья доктора философских наук, профессора В. Я. Перминова «Метафизика и основания математики» начинается с противопоставления двух крайних точек зрения на математику: 1) как замкнутую в себе и 2) как дисциплину, возникшую из опыта. Автор пишет: «Но два этих случая не исключают всех возможностей отношения математических структур к реальности. Можно выразить это в том положении, что в началах

математики лежит особое видение мира, которое можно назвать онтологией или метафизикой, которое исходит из реальной структуры мира и тем не менее выступает для сознания в качестве системы законченных и общезначимых представлений. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что прояснение природы метафизики важно для понимания методологии математики и подходов к ее логическому обоснованию».

В работе рассмотрено несколько подходов к обоснованию математики.

1. В работах Фреге и Рассела за базу обоснования была принята логика, поскольку „логика надежна и неизменна, поскольку общие категории мышления не могут быть изменены“.

2. „Брауэр в качестве базы обоснования берет арифметику. Математика, по Брауэру, должна быть построена на арифметике, а арифметика может оправдать свою надежность тем, что она в своих понятиях выражает праинтуицию времени“.

3. „В основе обосновательных построений Д. Гильберта лежит финитная математика, которая, по его замыслу, должна быть достаточной для обоснования непротиворечивости основных математических теорий. Гильберт отождествляет финитизм с априорностью“.

4. «В 20-х годах прошлого века Г. Фреге предложил новую программу обоснования математики, основанную на геометрии. В отличие от прежней логицистской установки он считает теперь, что геометрическая очевидность, так же как и арифметическая не содержит в себе никакого чувственного компонента и вследствие этого является абсолютно надежной. „Арифметика и геометрия, — пишет Фреге, — выросли на одной и той же почве, а именно геометрической, так что вся математика есть, собственно говоря, геометрия“».

Анализируя эти варианты исходя из деятельностной установки, Перминов склоняется к геометрическому подходу. При этом автор считает, что именно «евклидова геометрия является исключительной геометрией, она является онтологически означенной или онтологически истинной. Все другие геометрии существуют как формальные структуры, имеющие возможность получить эмпирическую интерпретацию, но они не имеют онтологического значения. Онтологически истинной является лишь евклидова геометрия. В этом состоит ее особое значение для математики и для философии. Именно евклидова геометрия есть система понятий, структурирующих предметность как максимально пригодную для действия».

В завершение статьи автор пишет: «Процесс обоснования математики не закончен. Старые программы обоснования были обречены на неудачу вследствие слабости своих методологических и философских предпосылок. С достаточной определенностью можно предполагать, что прогресс в решении проблемы обоснования зависит сегодня не столько от изобретения новых методов логического анализа, сколько от углубления философии математики, от прояснения наших представлений о природе математиче-

ского мышления и путей рационального оправдания обосновательного слоя. Прояснение глубинной метафизики математического мышления, прояснение связи исходных математических понятий со структурой реальности, дает нам возможность существенного продвижения в этом направлении».

В заключение хочется поблагодарить академика РАН, профессора механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова А. Т. Фоменко за предоставленные графические работы, благодаря которым настоящее издание, как нам кажется, приобрело еще одно, — эстетико-философское, — звучание.

Ю. С. Владимиров

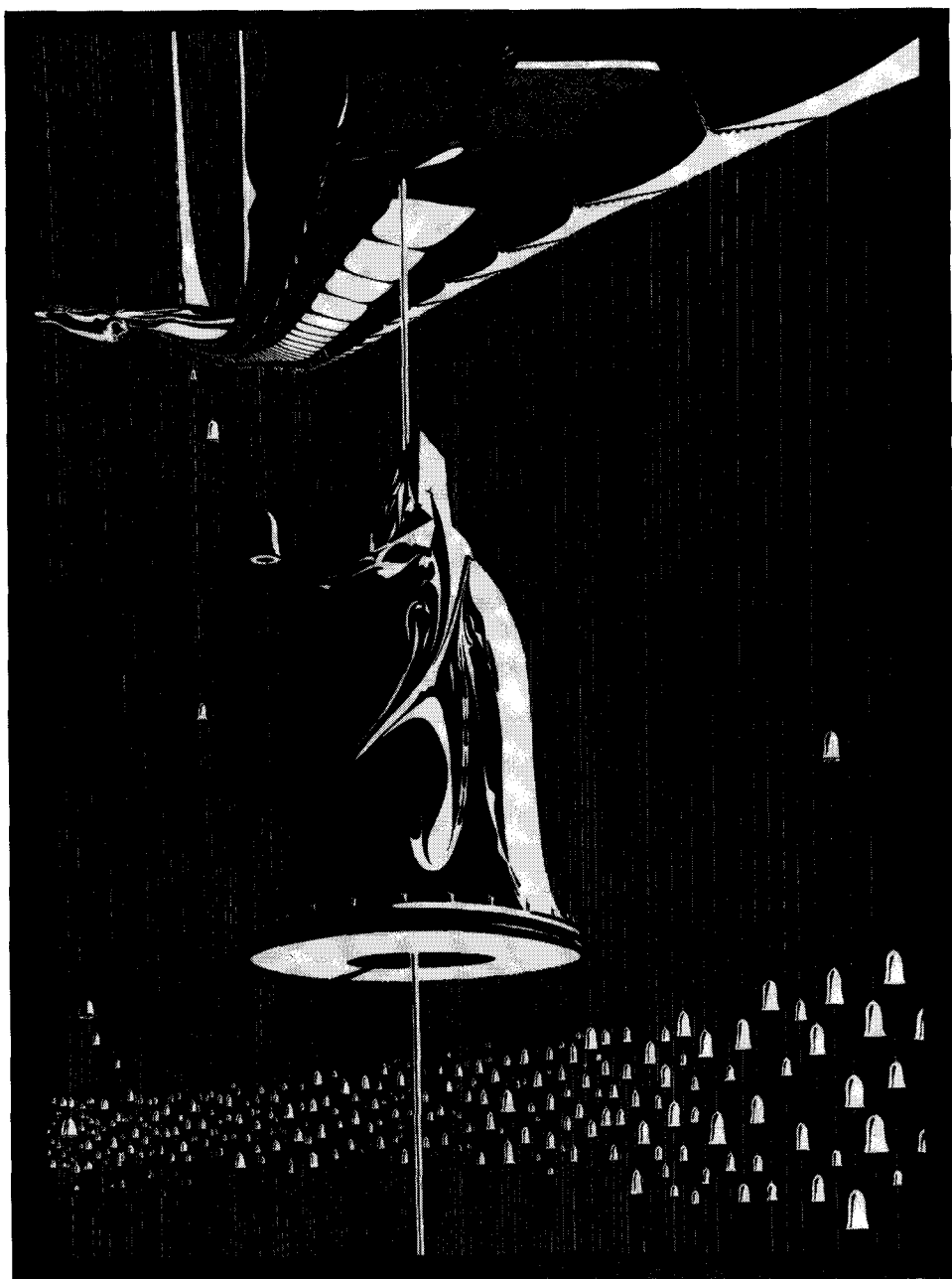
профессор физического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
академик РАЕН

Часть I

МАТЕМАТИКИ

ОБ ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ

И ЕЕ ПРОБЛЕМАХ



Фоменко А. Т.
Правильные функции Морса на n -мерных многообразиях

Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе¹⁾

С. П. Новиков²⁾

Физико-математическое сообщество для меня — это математика и теоретическая физика. В нем я вырос, работал и работаю. Именно к нему относится большинство тех тревожных мыслей, которые я постараюсь здесь изложить. Немалая их часть зародилась у меня два-три десятилетия назад и созревала много лет. Однако тогда я связывал все эти процессы только с общим гонением и распадом коммунизма, нарастанием его несовместимости с высокоразвитым интеллектуальным сообществом, с углублением деловой некомпетентности верхов, особенно возросшим в брежневский период. Я думал, что эти процессы характерны только для научного сообщества в СССР, распад которого был неизбежен исторически (хотя никто из нас не ожидал, что он произойдет так скоро). Сейчас, поработав ряд лет на Западе и посмотрев на ситуацию в наиболее развитых странах, я скажу так: тревога по поводу эволюции и судьбы физико-математического сообщества у меня в последние годы неуклонно нарастает. Я говорю о судьбе нашего сообщества во всем современном цивилизованном мире, а не только в России, переживающей уже десять лет трудный переходный период, который вряд ли завершится еще за десять лет.

¹⁾Статья воспроизводится по публикации в журнале «Вестник ДВО РАН», 2006, № 4, с. 3–22.

²⁾Сергей Петрович Новиков (1938 г. р.) — крупнейший математик, академик (1981), лауреат Ленинской премии (1967), премии имени Н. И. Лобачевского (1981), награжден Золотой медалью и премией Дж. Филдса Международного математического союза (1970) и премией Г. Вульфа (2005). В настоящее время является сотрудником Математического института РАН им. В. А. Стеклова в Москве и профессором Мэрилендского университета в США. С. П. Новиков — почетный член Национальной академии наук США, Европейской академии, Итальянской академии, Папской академии наук Ватикана и многих других академий и научных обществ мира. С. П. Новиков известен своими работами не только в области «чистой» математики, но и в области теоретической физики. Предлагаемая читателям статья написана человеком, глубоко озабоченным состоянием математической и физической наук и их преподаванием в СССР, России, Европе и США. Обе науки лежат в основании современного естествознания, и их состояние оказывает серьезное влияние на всю мировую науку и образование.

Эволюция математики XVI–XIX вв.

Мое поколение математиков и физиков-теоретиков не ожидало встретить подобный кризис. В 50-х гг. XX в., когда мы учились в университетах, это сообщество стояло очень высоко. Позади было уже четыре-пять веков неуклонного развития наших наук. Думали, что так и будет продолжаться всегда. Эволюцию математики и математического мышления о законах природы в этот период я представляю себе так.

XVI век: развилась алгебра многочленов; решили алгебраические уравнения 3-й и 4-й степени; как главный продукт было кардинально усовершенствовано учение о числе, ввели и начали использовать отрицательные и комплексные числа — отрицательные числа прижились сразу, а вот борьба за комплексные числа была долгой, до нашего времени.

XVII век: появились координаты, позволившие перевести геометрию на язык алгебраических формул и расширить ее предмет; стал развиваться анализ; были сформулированы математические законы, лежащие в основе многих явлений природы: вариационный принцип Ферма для световых лучей, принцип Галилея, закон Гука, универсальный закон гравитации, общие законы Ньютона. Возникли первые значительные прецеденты математического вывода законов природы из фундаментальных принципов (недостаточно оцененный современниками вывод закона преломления света на границе двух сред из вариационного принципа Ферма и вывод законов Кеплера Ньютоном, ставший основой современного научного метода). Появились идеи теории вероятностей.

XVIII век: развитие анализа превратилось в мощный поток, включая линейные дифференциальные уравнения и метод собственных колебаний, вариационное исчисление и многое другое. Возникли дифференциальная геометрия, теория чисел, развилась теория вероятностей. Механика, включая небесную механику, стала зрелой, далеко развитой наукой. Возникла гидродинамика.

XIX век: математический поток, включая теорию вероятностей, продолжает набирать силу. Возникает комплексный анализ; проблема разрешимости алгебраических уравнений порождает теорию римановых поверхностей и теорию групп; создается линейная алгебра; углубляется изучение симметрии и возникают алгебры Ли; геометрия, теория чисел, теория римановых поверхностей, теория дифференциальных уравнений, теория рядов Фурье и др. превращаются в мощные развитые дисциплины. Появились новые разделы физики со своими математическими законами: электричество и магнетизм, рожденная техникой термодинамика, затем статистическая физика и кинетика. В конце века возникли первые ростки абстрактных разделов математики — такие как теория множеств и функций действительного переменного. Возникли качественно-топологические разделы математики

(качественная теория динамических систем и топология). Появились первые идеи математической логики.

В сообществе физиков стало утверждаться глубокое осознание недостаточности и даже противоречивости классической физики, построенной на механике Ньютона и законах классической электродинамики. Следует иметь в виду, что за этот период произошел грандиозный скачок в развитии технологии. Безусловно, развитие физики было в значительной мере его продуктом. Математическое понимание законов природы, о котором мы говорили, предвлялось экспериментальными открытиями.

Такой пришла наша наука к началу XX века. Лидеры математики этого периода — Ж.-А. Пуанкаре, Д. Гильберт, Г. Вейль — олицетворяют собой рубеж, отделяющий XIX в. от XX, историю — от «нашего» времени (нашего — в глазах моего поколения, для которого многие из математиков, выросших в 20–30-х гг. XX в., были старшими современниками, с которыми довелось общаться). Говоря о теоретической физике, отмечу, что предыстория завершается для меня вместе с А. Эйнштейном и Н. Бором, т. е. с возникновением релятивистской и квантовой физики. Уже их, так сказать, научные преемники — это ученые, у которых учились люди моего поколения.

Я не претендую здесь на изложение истории. Да простят мне читатели, если я не назвал многих важных областей. Моя цель совершенно другая: продемонстрировать, что это развитие было мощным подъемом уровня знаний; прошлые достижения осваивались следующими поколениями, подвергались унификации и упрощению. Новое органически соединялось со старым.

Мощный постоянно усиливающийся поток знаний в точных теоретических математизированных науках постоянно требовал пересмотра и модернизации образования. В конце концов к началу XX в. сложилась устойчивая система, где первый важнейший этап составила общеобразовательная школа — «гимназия» — от самого начала до 17–18-летнего возраста (всего 10–11 лет), и затем специализированная высшая школа — университет. В XX в. потребовалось еще добавить «аспирантуру» — несколько лет еще более специализированного обучения, направленного на освоение глубины узкой математической специальности и на раскрытие творческих способностей, на начало научных исследований. В разных странах эта система незначительно варьировалась, по-разному называлась, но цифра 8–9 лет на полный курс (высшая школа + аспирантура) всюду была примерно одной и той же. Даже гимназическое образование не было еще общеобязательным в первую половину XX в., но требуемый «для всех» уровень постепенно повышался в передовых странах. Во второй половине XX в. последний этап гимназического образования стали делать более специализированным, чтобы успеть освоить больше математики, физики и др.

Основной чертой этой системы была весьма жесткая система экзаменов: по математике, например, экзамены были ежегодно, начиная с 10-летнего возраста. Начальные этапы — арифметика, геометрия, алгебра — изучались

очень твердо. Любой важный предмет кончался экзаменом, но математика изучалась особенно назойливо — как и умение грамотно писать. Создавался твердый фундамент, на котором можно было строить будущее математическое (и прочее) образование. Что особенно важно, этот фундамент создавался достаточно рано: надо успеть потом освоить и высшую математику, и науки, на ней построенные (как теоретическую физику, например). Упустишь время, отложишь обучение — потеряешь очень много. Чем больше возраст, тем труднее влезает в голову знания, да и жизнь начинает предъявлять свои требования, мешает учиться бесконечно долго. Не последним по важности является и необходимость рано выработать устойчивую привычку к напряженной работе, к логической точности, необходимое упорство и способность концентрировать свой мозг на этом. Эта способность дается от природы не всем людям, и без тренировки с раннего возраста она теряется. Чтобы облегчить эту тренировку, привить навыки и любовь к математике и подобным наукам, с какого-то времени стали практиковаться добровольные математические кружки и олимпиады. Они срабатывали весьма эффективно. Весь этот образовательный комплекс — достижение, от которого нельзя было отказываться без риска потерять все научное образование в математике.

Математика: первая половина XX в.

Первая половина XX в. — это период безраздельного господства теории множеств в идеологии математики. Развитие самой теории множеств привело к столь общим абстрактным концепциям и мысленным построениям, что возник вопрос об их осмысленности, непротиворечивости. Это способствовало интенсивному развитию математической логики, обсуждению непротиворечивости аксиоматической полноты самой теории множеств и всей математики. На первый план математических исследований выдвинулись основания математики, а также проблемы обоснования, строгого доказательства даже при взаимодействии математиков с естественными науками и приложениями. Сообщество математиков в 20-х гг. окончательно оторвалось от сообщества физиков-теоретиков. Изучение высшей математики стало ориентироваться исключительно на единое строгое изложение. Это привело к сильному сокращению содержательного изучения тех разделов математики, которые ориентировались на использование в естественных науках. В особенности это относится к современной теоретической физике, которую сообщество математиков не освоило. В СССР возникла парадоксальная ситуация, когда механики-классики оставались вместе с математиками, в то время как современная физика ушла в отдельные факультеты университетов. Нечто в этом роде произошло в 20-х гг. и на Западе, но там механики, близкие к приложениям, в большей степени разошлись с математиками, чем у нас: с математиками остались только те, кто «доказывает строгие теоремы» хотя бы как часть своей работы.

Система того образования, которое получило мое поколение математиков в СССР, складывалась в 30–50-х гг. Общая физика еще изучалась, но изучения современной теоретической физики практически не было. В конечном счете, лишь самые элементы специальной теории относительности вошли в завершающие курсы физики (в МГУ передовые механики внедрили спецтеорию в начальные курсы для механиков еще через 30 лет, в 70-е гг.); общая теория относительности и квантовая теория оставались неизвестными математическому образованию. Первые попытки их внедрить начинаются примерно с 1970 г., и их нельзя назвать успешными. В этой истории немало субъективных моментов: еще в 20-х гг. консервативные механики вроде Чаплыгина пренебрегали этими новыми науками, считали их западной чушью. П. С. Александров рассказывал мне, что Чаплыгин запретил П. Урысону включать новую тогда общую теорию относительности в его аспирантский экзамен. Это — наша специфическая русская черта — склонность к консерватизму, к отрыву от мировой науки. Даже Чебышёв в XIX в., при своем блестящем аналитическом таланте был патологическим консерватором. В. Ф. Каган рассказывал, что будучи молодым приват-доцентом он встретил старого Чебышёва, пытался поведать ему о современной геометрии и т. д., а тот презрительно высказался о новомодных дисциплинах типа римановой геометрии и комплексного анализа. Созданная им школа была сильной, но и с сильной склонностью к провинциализму.

Французская школа после Пуанкаре, начиная с Лебега и Бореля, пошла по ультраабстрактному пути и создала в Париже (и затем в мире) глубокий ров между математикой и естественными науками. Отдельные звезды (вроде Э. Картана и Ж. Лере), которым этот ров не нравился, при всем своем личном авторитете оказались изолированы. Блестящие группы парижских математиков, возникшие в XX в., культивировали и углубляли этот разрыв, выступили идеологами полной и единой формализации математического образования, включая школьное. Мы называем эту программу «бурбакизмом». По счастью, хотя основатели Московской математической школы — Егоров и Лузин — вывезли теорию множеств и функций из Парижа в начале XX в., ряд их учеников в 20-х гг. (когда были еще открыты контакты) попал под влияние наиболее мощной и идейно богатой тогда школы Гильберта. В результате московско-ленинградская школа пошла по более разумному пути, чем парижская, не исключая, а допуская и даже поощряя взаимодействие с внешним научным миром. Хотя Гильберт и провозгласил программу единой аксиоматизации математики и теоретической физики, но понимал он ее нетривиально. Например, еще на заре общей теории относительности он доказал замечательную глубоко нетривиальную теорему лагранжевости уравнений Эйнштейна релятивистской гравитации, которая долго оставалась недостаточно оцененной и впоследствии оказала большое влияние. Тем самым Гильберт подтвердил всеисилие аксиомы, требующей, чтобы каждая фундаментальная физическая теория была лагранжевой. Это

было абсолютно неясно в случае теории Эйнштейна. Каждый физик поймет ценность такого понимания «аксиоматизации и формализации» — это вам не деятельность по доказательству теорем существования и единственности сотен типов уравнений или строгое доказательство результатов, уже полученных физиками или инженерами. Из учеников Гильберта Г. Вейль сторонился теории множеств и формализации; он тесно взаимодействовал с физиками, внес фундаментальные идеи. Дж. фон Нейман был в числе идеологов формализации и аксиоматизации, но (как и А. Э. Нётер) понимал ее нетривиально, следуя примеру Гильберта. Они внесли большой и полезный вклад в эту программу, мы все работаем с введенными или упорядоченными ими понятиями. Школа Гильберта проводила в жизнь идеологию единства математики самой, и ее единство с теоретической физикой, идеологию «полезной формализации», пока она способствует единству. Не нужно искусственно, без нужды простое делать сложным. Например, общая теорема фон Неймана в спектральной теории самосопряженных операторов — это глубокая сложная теоретико-множественная теорема; но не следует ею подменять в процессе образования теорию простейших важных классов дифференциальных операторов, где можно обойтись и без нее. Изредка бывает, однако, что без общей теоремы не обойтись, особенно если коэффициенты сингулярны. А уж создавать тяжелую теоретико-множественную аксиоматизацию анализа начиная с элементов (как Бурбаки) — это уже чепуха, которая может только убить весь реальный анализ. Но это уже идеология математики более позднего периода.

Математика и физика: 1930–1960 годы

К сожалению, немецкая физико-математическая школа (включая австро-венгерскую) была рассеяна нацизмом. Выжившая часть звезд уехала в США и воспитала послевоенное блестящее поколение американских ученых. Как мне рассказывали французские физики, когда я работал в Париже в 1991 г., во Франции развитие квантовой физики пресек герцог Луи де Бройль, сыграв роль Лысенко во французском обществе физиков, несмотря на личный вклад в начало ее развития. Говорят, он оказался редкостно глуп и невероятно упорен в своей глупости. И при этом он имел громадное влияние. Все это вместе дало очень плохие результаты.

В старой России не было серьезной школы теоретической физики до Первой мировой войны. Первые русские звезды мировой теоретической физики (Г. А. Гамов, Л. Д. Ландау, В. А. Фок) возникли в 20–30-х гг. прямо из контакта с лучшей ультрасовременной европейской школой квантовой теории Н. Бора. Гамов вскоре остался на Западе, а Ландау и Фок создали в Москве и Ленинграде сильные школы. Мне кажется, Ландау вынес свой подход к созданию школы и стилю ведения семинара из общения с кругом

Гильберта. Ландау разработал и реализовал в 30–50-е гг. фундаментальную идеологию — как и чему следует учить физика-теоретика. Мы еще обсудим его схему позднее. В СССР новые школы Ландау и Фока дополнились «автохтонами России» — сообществом выросших из сильной школы классической физики Л. И. Мандельштама и др., особенно сильной в прикладных разделах; некоторые из них тоже внесли важный вклад в современную квантовую теорию.

Любопытна история того, как круг чистых математиков 30-х гг. научно не принял, даже оттолкнул такую яркую личность, как Н. Н. Боголюбов. Конечно, дефекты в его совместных работах с Н. М. Крыловым были реальны, но разгром этих работ А. А. Марковым в 1930 г. был чрезмерен. После этого Боголюбову не верили. Он решил проблему Лузина о почти периодических функциях — проверять попросили Д. Е. Меньшова, который подменял серьезную проверку цеплянием, всегда чисто формально. Он и увидел множество ничтожных огрехов. Они поставили работу под сомнение. Будучи студентом, в конце 50-х г. я слышал от отца, что была такая работа Боголюбова в 30-х г., но сомнения так и не развеялись. Позднее я узнал, что в мировой литературе по теории функций эта работа считается давно проверенной и классической, и сказал об этом отцу. Он презрительно отозвался о стиле Меньшова подменять проверку цеплянием. Так или иначе, Боголюбов со своим интуитивным, неточным стилем представления доказательства был отвергнут. Это оказалось для него полезным. Он потратил годы на изучение квантовой физики. Позднее ему, сделавшему в 40-х г. блестящие работы по теории сверхтекучести, пришлось испытать серьезные трудности, входя в круг физиков: непривычный для него характерный стиль реальной и острой критики со стороны Ландау отравил ему первые выступления. С этой критикой он позднее справился (хотя и не сразу) и убедил Ландау, но отношения у них всегда оставались напряженно-ревнивыми. Играло роль и то, что личности типа И. М. Виноградова и М. А. Лаврентьева не без успеха использовали слабости Боголюбова, его склонность поддерживать сомнительных людей в своей борьбе с «еврейской физикой». Позднее, в 70-е гг., после ссоры с Виноградовым, Боголюбов выкинул из своей головы весь этот балласт противных ссор. Все эти годы Боголюбов очень тщательно скрывал от своих друзей типа Лаврентьева, что именно он думает о его претензиях считать себя физиком, не зная, что это такое — современная теоретическая физика (хотя Лаврентьев был очень талантлив). Он говорил мне в начале 70-х гг., что круг математиков не представляет себе, сколько нужно выучить, чтобы понять, о чем говорят современные квантовые физики, при этом он облачал свои мысли в очень образные выражения, которые я не буду пытаться здесь передавать.

В конце 30-х гг., как мне рассказывал отец, они пригласили Ландау в Стекловку (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — *Ред.*) прочесть им курс лекций — что такое квантовая механика и статфизика.

Прослушав его, они были очень раздражены, им сильно не понравилась логическая путаница, как говорил мне отец. Потом, после выхода книги фон Неймана, двое из них — отец и А. Н. Колмогоров — с удовольствием ее прочли. Аксиоматически точный стиль — вот что им было нужно. Они хотели понять логику, а не квантовую механику. Третий — М. И. Гельфанд — решил выучить этот кусок физики так, как его представляют себе физики. Он присоединился к семинару Ландау, провел там десяток лет (или более). Гельфанд был единственным из прикладных математиков, который мог говорить с реальными физиками, а не только с механиками-классиками, в период выполнения важных закрытых задач в 40–50-х гг. Он получил от физики много и для своей математики — например, начал теорию бесконечномерных представлений, подхватив ее начало из мира физиков, решил поставленную физиками обратную задачу теории рассеяния (в этих исследованиях участвовали также М. А. Наймарк, Е. П. Левитан и А. М. Марченко). Его ученик Ф. А. Березин вынес из семинара Ландау задачу построения фермионного аналога интеграла и т. д.

Кроме названных, остальные ничего не учили более. Контакт с квантовой физикой закрылся для них; правда, бескорыстный любитель науки Меньшов и без тени понимания ходил на физический семинар еще много лет. Я думаю, что здесь перечислены все представители старшего поколения знаменитых московских математиков 30–40-х гг., что-то знавшие о квантовой физике XX в. Кстати, еще А. Я. Хинчин пытался начать заниматься обоснованиями статистической физики, но его попытки были встречены физиками с глубоким презрением. М. А. Леонтович говорил моему отцу, что Хинчин абсолютно ничего не понимает. Из выдающихся ленинградских математиков в молодости А. А. Марков написал полезную работу об упорядочении основ теории идеальной пластичности, но позднее к естественным наукам не возвращался. Такой блестящий геометрический талант, как А. Д. Александров, писал какую-то чушь, выводя из аксиом преобразования Лоренца — стыдно даже вспоминать труды его школы на эту тему; хотя он и был физиком по образованию, но тут его склонность к аксиоматизации привела к абсурду. Квантовая физика пришла в ленинградскую математику позже, в 60-х гг., вместе с Л. Д. Фаддеевым, который был в юности учеником Фока, прежде чем стал аспирантом О. А. Ладыженской, и стал доказывать строгие теоремы. Впрочем, уши физика вылезали из его доказательств. Лучшее он сделал, когда вернулся к роли квантового математического физика, близкого к кругу физиков.

Особую роль в московской математике длительный период играл Колмогоров. Будучи идеологом теории множеств, аксиоматизации науки и оснований математики, он в то же время обладал замечательным умением решить трудную и важную математическую проблему, а также быть разумным и дельным в приложениях, в естественных и гуманитарных науках. От аксиоматизации теории вероятностей на базе теории множеств он мог перейти

к открытию закона изотропной турбулентности, от математической логики и тонких контрпримеров в теории рядов Фурье — к эргодической теории, к аналитической теории гамильтоновых систем, решая абсолютно по-новому старые проблемы. Он внес немаловажный вклад даже в алгебраическую топологию.

В то же время у него были странные, я бы сказал психические, отклонения: в образовании — школьном и университетском — он боролся с геометрией, изгонял комплексные числа, стремился всюду внедрить теорию множеств, часто нелепо. В. Г. Болтянский рассказывал мне в лицах смешную историю, как Колмогоров изгонял комплексные числа из школьных программ. Короче говоря, как это ни нелепо, он имел те же самые идеи в образовании, что и Бурбаки, иногда даже более нелепые. Современной теоретической физики он не знал, базируясь лишь на классической механике, как естествоиспытатель.

У Колмогорова, однако, был замечательный дар — находить узловые точки, открывать то, что будет впоследствии нужно очень многим. Посмотрите, как широко разошлись в современной науке конца XX в. его открытия 50-х гг. (вместе с его учениками) в динамических системах. По счастью, сверхпрестижный Московский университет с его новым шикарным дворцом был отдан Сталиным под руководство крупного ученого и — что было весьма редко в этом поколении ведущих математиков-администраторов — порядочного человека, И. Г. Петровского. Идейное руководство математическим образованием было фактически отдано Колмогорову. Особенно важно было то, что на семинары мехмата и на заседания математического общества во второй половине 50-х гг. по вечерам собирались все математики Москвы, кто хоть чего-то стоил творчески. Я нигде впоследствии не встречал во всем мире столь мощного, сконцентрированного в одном месте сообщества, покрывающего все разделы математики. Таким был мехмат, когда я в нем учился. В обществе блистали молодые ученики Колмогорова — В. И. Арнольд, затем Я. Г. Синай, выросшие из теории множеств, теории функций действительного переменного, теории меры и динамических систем. Области, которыми они занимались у Колмогорова, представлялись мне последним взрывом идей теории множеств, лебединой песней Колмогорова. Это было очень модно, но мне теория множеств не нравилась. Я считал, что это лишь наследие 30-х гг. и подлинно новых идей здесь уже не будет.

Мое поколение: 60-е годы

Вместе с Д. В. Аносовым мы изучали современную топологию, но я — профессионально, а Аносов — как хобби. Он ориентировался на динамические системы и вскоре, под влиянием С. Смейла, сделал блестящую работу. Напротив, Арнольда стало явно тянуть к топологии. Некоторые вышедшие из нее новые подходы к анализу, как идеология трансверсальности, общего

положения, которые он узнал от меня, произвели на него большое впечатление. Я же с его помощью начал знакомиться с идеями геометрии, лежащими в основе гамильтоновой механики и гидродинамики несжимаемой жидкости, он навел меня на задачи теории слоений. Вскоре я начал посещать знаменитый семинар Гельфанда, много с ним беседовал. Его взгляд на математику мне был ближе всего, у нас возникло взаимопонимание.

Я кончил аспирантуру в 1963 г., будучи уже известным топологом. Авторитет этой области в обществе быстро возрастал. В течение всех 50-х гг. шло много разговоров об этой новой замечательной области, не понятой Гильбертом, и ее потрясающих открытиях, рывок в начале 50-х гг. был сделан блестящей французской школой. Влияние топологии на алгебру, дифференциальные уравнения с частными производными, алгебраическую и риманову геометрию, динамические системы было весьма впечатляющим. Считалось, что после Л. С. Понтрягина в СССР возник длительный перерыв: первоклассных топологических работ, сравнимых с западными, не было 10 лет. Я видел свою цель в восполнении этой лакуны в советской математике. Пока я не набрал международный вес, я ни о чем другом не думал, хотя охотно слушал людей из других областей — старался понять их основы. В 1960–1965-х гг. научная фортуна была на моей стороне, и я выполнил свои задачи. Продолжая работать в топологии, я стал думать: в чем смысл нашей деятельности? Где и когда возможны применения тех идей, которые мы сейчас развиваем?

Для психически нормальной личности этот вопрос естественен и даже необходим. Любовь к математике его не отменяет. Уже тогда я ясно видел определенный комплекс неполноценности на этой почве у ряда чистых математиков, болезненное нежелание задавать этот вопрос. Напротив, другие математики, зарабатывая себе на хлеб в прикладном учреждении, работали там не без пользы, но без энтузиазма, так сказать, на ремесленном уровне, обслуживая кого-то; они не чувствовали никакой ущербности, но также видели истинную науку только в чистой математике, которой они занимались все свободное время. В начале 60-х гг. резко усилилась антиматематическая агрессивность нового класса — вычислителей-профессионалов. Они начали пропаганду против чистой математики, говорили, что истинное развитие математики — это только вычислительная математика. Из старшего поколения математиков, безусловно, так считали А. Н. Тихонов и А. С. Кронрод. В среде вычислителей говорили, что чистые математики — это странное сообщество полусумасшедших, с птичьим языком, непонятным остальным, в том числе физикам и прикладным математикам, и их — чистых — скоро будут показывать в зоопарках. Видя все это, я много думал и стал для себя изучать соседние области математики, механику, а затем и теоретическую физику. Другие разделы математики, которые считались менее абстрактными и более прикладными, чем топология, не дали мне ответа на мои вопросы:

на самом деле ни с какими естественными науками и приложениями их сегодняшнее развитие связано не было, как я обнаружил, к сожалению.

Еще худшее впечатление произвели на меня проблемы «теоретической прикладной математики», где, используя терминологию, взятую из реальности, доказывают строгие теоремы о чем-то внешне похожем на реальность, но на самом деле от реальности бесконечно далеко. Престижной считалась только строгая теорема, и чем сложнее доказательство, тем лучше; разумный реализм постановки, как и сам результат, ценились гораздо меньше. К сожалению, даже Колмогоров много пропагандировал «теоретическую прикладную математику». У него вообще была странная противоречивость личности: рекомендуя математикам заниматься подобными вещами, сам он, занимаясь естественными науками, включал у себя в голову какую-то кнопку и становился совсем другой личностью, далекой от чистой математики, и работал на основе других критериев.

Я решил потратить годы и изучить теоретическую физику. Начал с квантовой теории поля, но понял, что начинать надо с элементов, а не с конца. Мое решение можно объяснить тем особенным авторитетом, которым обладал физика в моих глазах. Лекции Эйнштейна, Фейнмана, Ландау и ряда других крупных физиков произвели на меня громадное впечатление. Ясность и простота при изложении математических методов резко отличалась от того, как пишут современные математики за очень редким исключением. Эту естественность рождения математических понятий я увидел впервые в юности, изучая топологию периода наивысшего расцвета в изложении наиболее выдающихся топологов, где сложный и глубокий алгебраический аппарат как бы естественно и легко рождался из качественной геометрии и анализа, создавая двустороннюю интуицию об одних и тех же вещах. В физике похожие черты становились огромными, несравнимо более многообразными и доминирующими. Не случайно, кстати, в период трудностей фундаментальной физики в 80–90-х гг. квантово-полевое сообщество нашло прибежище именно в топологии. Кроме топологов, из математиков моего поколения к этому стилю стремился также Арнольд — вот его скоро и потянуло в топологию.

Удивительная математическая красота и необыкновенно высокий уровень абстрактности потребовались физике для формулировки законов природы; этот уровень еще возрос в XX в., но именно сейчас физика соединила все это с невероятной практической эффективностью и произвела революцию в технологии.

В этот период, я бы сказал, физика возглавляла прогресс человечества, а математика шла за ней, около нее. Атомные и водородные бомбы, компьютеры, революция в технологии, многие чудеса техники, преобразившие мир вокруг нас, — все это начиналось с идей и программ, выдвинутых такими лидерами физико-математических наук, как Ферми, фон Нейман, Дж. Бардин. В этом приняли участие многие физики. Все знают А. Д. Сахарова,

например, вклад которого в создание водородной бомбы стал общеизвестен после того, как он стал диссидентом. В нашей стране в создание и развитие ракетно-космического комплекса на раннем этапе внесли большой вклад некоторые математики и механики, например М. В. Келдыш (брат моей матери). Советская власть долго держала заслуги таких людей в глубоком секрете, подставляя (не без собственного недальновидного участия Келдыша) фальшивые имена «псевдотворцов» на Запад, когда спрашивали — кто лидер, в период всемирного шума в конце 50-х — начале 60-х гг. Видимо, хотели сбить с толку империалистов, утаить от них реально важных людей, хотя бы временно. Впоследствии реальные имена стали как-то называться публично, но было уже поздно — до мирового сообщества уже они не дошли: слишком много лжи было сказано до этого, такой туман напустили, что и не развезть. Что же — сами виноваты, эту ложь создавали с их участием.

У нас, однако, весь круг ученых каким-то образом об этих людях знал по разговорам и слухам. Келдыш пользовался громадным уважением. Созданный им Институт прикладной математики (ИПМ) пользовался большим авторитетом в СССР. Считали в начале 60-х гг., что учреждение типа Стекловки — это нечто уходящее в прошлое, ненужное. Математики должны работать вместе с учеными из других наук, в свободное время делая и чистую математику. Такова была точка зрения наиболее просвещенных прикладных математиков в тот период, включая Келдыша и Гельфанда. Да и антисемитизма в том институте не было; Стекловка казалась нелепым уродом. В отличие от сообщества механиков, ИПМ в большей степени держал тогда курс на союз с реальной современной физикой — быть может, не без идейного влияния Гельфанда на начальство. Все это разрушилось в конце 60-х гг. из-за брежневских политических перемен: из-за «грехов» математиков начальство испугалось и озлобилось, ИПМ деградировал полностью. Стекловка в конечном счете оказалась более устойчивой: начальство там тоже усердствовало в злобе, она тоже деградировала в тот период, но потом воспрянула.

Математическая красота физики: как ее понять?

Красота и сила физики манили к себе. Я систематически изучал весь курс учебников в 1965–1970 гг. Кроме двух-трех книг (по статической физике и квантовой электродинамике) я учился по книгам Ландау — Лифшица. Еще раньше я увидел, что круг физиков не только богаче круга математиков научно, но и честнее. Так было в СССР, не на Западе. Ученики Л. И. Мандельштама — А. А. Андронов, М. А. Леонтович, И. Е. Тамм и позднее его ученик А. Д. Сахаров — при своем влиянии как ведущие прикладные теоретические физики считались эталоном порядочности в физико-математиче-

ском сообществе страны, более того — во всем научном сообществе СССР. Да и аналога П. Л. Капицы среди математиков не было. Позднее Сахаров стал эталоном порядочности и во всем мире. Еще с 20-х гг. круг учеников Мандельштама — это круг близких друзей моих родителей. Руководящий круг математиков нашей страны в тот период был талантливым, но редкостно аморальным, я бы сказал бессовестным. Например, в 60-х гг. весь список академиков-математиков, за честность которых я бы поручился, состоял из моего отца — П. С. Новикова, а также С. Н. Бернштейна, Л. В. Канторовича и И. Г. Петровского — единственно порядочного человека из крупных математиков-администраторов. Ленинградцы говорят, что В. И. Смирнов был абсолютно порядочным человеком, но он был посредственным математиком, я его не замечал. Мой брат, известный квантово-твердотельный физик Л. М. Келдыш, посмеиваясь сказал мне в начале 60-х гг.: раньше считали, что математики удалены от жизни, а вот сейчас говорят, что математик — это что-то бесчестное, первейший жулик. Такие начали ходить среди физиков разговоры о математиках. В начале 60-х гг. он съездил за границу (в США) и, вернувшись, тайком сказал мне: «Звонили американские физики в Госдепартамент при мне, согласуя мою поездку куда-то по США, а там им ответили: „Мы думали, что Келдыш — это женщина“...». Очевидно, имелась в виду наша мать Л. В. Келдыш — известный специалист по теории множеств и геометрической топологии, она уже съездила пару раз за рубеж (не в США). Значение этой ремарки, поразившей Леонида Келдыша в США, было очевидно. Он не ожидал, что Мстислав Келдыш абсолютно неизвестен на Западе как ученый. Тот и сам это понял позднее, и это было для него трагедией.

Возвращаясь к своей основной линии, я замечу, что тогда, в первой половине 60-х гг., травля чистой математики со стороны вычислителей не развилась далеко. Одной из важнейших причин этого было замечательное открытие новых частиц с помощью теории групп Ли и представлений. Возник целый мир кварков, новых скрытых степеней свободы в микромире. Немало надежд связывали тогда и с теорией функций многих комплексных переменных. Так или иначе, физики снова стали говорить, что нет законов природы, кроме законов математики. Они сочли, что необходимо резко усилить изучение современных математических идей. Вычислители — это что-то вроде ремонтных или строительных рабочих, надо начать самим их воспитывать, чтобы они стали более грамотны в физике, а вот абстрактная современная математика — это настоящая наука, ее ничем не заменишь. Усиление интереса к эйнштейновской гравитации и космологии в 60-х гг. возродило необходимость римановой геометрии; начали поговаривать о привлечении к делу топологии. Все это отсрочило кризис во взгляде общества на математику на несколько десятилетий. Математики успокоились.

Для меня этот период был важным. Я воспринял его как указание на необходимость приложить усилия и изучить путь от математики к есте-

ственным наукам, стал изучать теоретическую физику. Кроме меня это стали делать еще в 60-е гг. также Синай и Манин, из близких мне топологов — А. С. Шварц. Каждый из нас преследовал свои цели и шел своим путем.

Надо сказать, что никто из западных математиков этим путем не пошел тогда (разве что И. М. Зингер, позднее А. Конн). На Западе в сообществе чистых математиков доминировала идеология наподобие «религиозной теории чисел». Крупные и идейно влиятельные в западном мире математики — например, А. Вейль — усиленно пропагандировали тезис, что нет нужды обращаться к естественным наукам и приложениям, — чтобы стать великим ученым, можно обойтись и без этого, времена изменились. Этот тезис безусловно размагничивал ту часть математического сообщества, которая могла бы пойти по направлению к естественным наукам и приложениям. Любопытно, что такие математики, как М. Атья, Дж. Милнор, Д. Мамфорд, в конечном счете тоже полностью разошлись с идеологией религиозно-чистой математики.

Сообщество чистых математиков на Западе выработало такую точку зрения: для заработка я преподаю математику в университете, это и есть мой долг обществу. Остальное же время я занимаюсь своей чистой математикой. С этой точкой зрения они прожили ряд десятилетий.

У нас в стране было не так, этот подход не работал: никто не хотел преподавать. Кроме очень малого числа главных университетов, условия для людей, занимающихся преподаванием, были плохие. Педагогическая нагрузка была слишком большой, ни о каких поездках за границу и подумать было нельзя, на научную работу не было времени.

Так или иначе, западное сообщество математиков оторвалось от внешнего мира дальше и глубже, чем наше. Даже в блестящих центрах прикладной математики, как например «Институт Куранта» в Нью-Йорке, с течением времени сообщество все более понимало прикладную математику как набор строгих доказательств, вопросы обоснования.

Постепенно у меня выработалась такая точка зрения: конечно, математика или во всяком случае ее большая часть, включая современную абстрактную математику, — это очень ценное для человечества знание. Но эту ценность не так-то просто реализовать. Лидеры математики должны быть людьми общенаучно грамотными, знать пути, соединяющие математику с внешним миром, уметь искать новые связи, помочь ориентировке молодежи. В противном случае я не вижу, как внутриматематические достижения могут стать полезны обществу. Не надо уподоблять математику музыке: та обращается непосредственно к эмоциям; она будет отвергнута, если люди никаких эмоций от нее не испытывают. Надо помнить, что математика — это профессия, а не развлечение. В прошлых поколениях математиков всегда было сообщество лидеров, высоко ценимых внешним миром. Вспомните Пуанкаре, Гильберта, Г. Вейля, Дж. фон Неймана, А. Колмогорова, Н. Боголюбова. . . Из крупнейших ученых старшего поколения я много беседовал

с Гельфандом. Он как-то сказал: «Меня беспокоило в юности, полезен ли тот функциональный анализ, который мы развивали. Поработав в приложениях, я нашел для себя ответ на этот вопрос и успокоился. Но, имея дело с физиками, не заблуждайтесь. Открыв что-то ценное, исходя из ваших знаний, которых у них нет, Вы с удивлением нередко обнаружите, что они пришли к тому же из каких-то других соображений. никоим образом нельзя недооценивать то знание, которым они обладают».

Я понял в процессе изучения, что теоретическая физика, изученная систематически, с самых начал до современной квантовой теории, — это единое и нераздельное, обширное и глубокое математическое знание, замечательно приспособленное к описанию законов природы, к работе с ними, к эффективному получению результатов. Нельзя не согласиться с Ландау: чтобы понять это, необходимо изучить весь его «теоретический минимум». Это — костяк, определяющий Ваш уровень цивилизации.

Человек, не изучивший его, имеет убогое неполноценное представление о теоретической физике. Такие люди могут оказаться вредны для науки, их не хочется допускать к теоретической физике. Их влияние будет способствовать распаду образования.

К сожалению, сообщество математиков того времени не изучало даже элементы этого знания, включая и тех, кто называл себя прикладными математиками. К примеру, я быстро обнаружил, что практически никто из специалистов по уравнениям с частными производными не знает точно, что такое тензор энергии-импульса, и ни за что не сможет математически четко определить это понятие. У механиков некоторые сдвиги начались раньше. А. Ю. Ишлинский говорил мне много лет назад: «Мы с Баренблаттом сделали ошибку в 50-х гг., кто-то из физиков указал нам на неправильное поведение энтропии на гребне волны в нашей работе. Только после этого мы твердо выучили термодинамику, четыре потенциала, правила Максвелла и т. д.». Значит, до этого сообщество механиков таких вещей не изучало. Передовые, лучшие механики — выучили в 50–60-х гг. Математики же и тогда еще не выучили ничего подобного. Я спросил недавно С. В. Иорданского, ученика М. А. Лаврентьева, ставшего впоследствии хорошим квантовым физиком: «Сергей, скажи мне, что твой учитель Лаврентьев, считавший себя физиком, но все определенно не знавший, думал о цикле учебников Ландау — Лившица? Тоже ругал их?» Тот ответил: «Нет, он сказал так: „Спецфункции хорошо знают. . .“». Так что Лаврентьев — математик талантливый, старающийся быть объективным, — что-то похвалил, но существования теорфизического знания там вообще не увидел. Или счел, что там все не имеет отношения к математике, кроме спецфункций. Это легкомыслие Лаврентьева, пренебрежение к глубокому комплексу знаний, созданному десятками громадных талантов и многократно опробованному, отсутствие даже понимания того, что это знание существует, имеет свои последствия: его сын, например, неплохой администратор (как директор Института мате-

матики в Новосибирском Академгородке) опровергает специальную теорию относительности. Не сомневайтесь, он вырос под полным научным влиянием отца. Вообще, у М. А. Лаврентьева при его способностях, была редкостная безответственность. Вспомнить только, как он спаивал всех вокруг себя, не понимая, что люди и здоровьем, и «водкоустойчивостью» гораздо слабее него, способного легко перепивать даже Хрущева. Его безответственность погубила немало хорошего в его же собственных блестящих начинаниях. Хочу сказать, однако же, что Лаврентьев и Петровский вдвоем провели в 1960–1966 гг. гигантскую полезную работу по раскрытию советской математики для мира, и мое поколение им этим обязано.

Так или иначе, но 60-е гг. — это период расцвета моего поколения, той первой фазы расцвета, когда старшее блестящее поколение еще было живо; многие из них еще действовали как ученые или администраторы, в то время как мы с большой энергией осуществляли свой первый тур развития математики и готовились к следующим. Как я уже написал выше, некоторые из нас — Синай, Манин, А. Шварц и я — стали изучать различные разделы теоретической физики, независимо друг от друга. В то же самое время различные волны теоретических физиков разными путями стали двигаться в сторону математики. В квантовой теории поля появилось аксиоматическое направление, целью которого было непротиворечиво и математически строго построить теорию, исходя из современного функционального анализа. Этого, конечно, не удалось сделать, но возник математически нетривиальный цикл строгих исследований по функциональному анализу с красивым алгебраическим и квантовополевым аспектом. Ряд специалистов по статистической механике (вышедшие из физиков) стали заниматься доказательством математических теорем. Например, интересен случай Э. Либэ: как известно, он начинал с блестящих широко признанных в физике работ по точному решению проблем статистической физики; он всегда хорошо знал исследования физиков, сам внес важный вклад. Тем не менее, он выбрал профессию строгого математического физика, и не он один. Возникло сообщество современных математических физиков, доказывающих строгие теоремы. Большинство их имело первоначальное физическое образование. Они стали, по существу, математиками. Именно на эту область держал курс Я. Г. Синай, изучая теоретическую физику, — на новую область математики, где доказывают строгие теоремы. Кроме Либэ, никто из них не занимался даже в прошлом точно решаемыми моделями, это — другая, не та математическая физика.

Основой моей программы стало глубокое желание внести вклад на рубеже современной математики и теоретической физики, базирующийся на идеях современной математики — на геометрии и топологии (включая геометрию динамических систем), на алгебраической геометрии и т. д. Могут ли они быть реально полезны, так сказать, в деле?

Всем был очевиден нарастающий компьютерный поток, который постепенно наполнял естественные науки, приложения и даже чистую математику,

давая им новые гигантские возможности, особенно в приложениях. Но здесь я не могу ничего изменить, считал я: это будет развиваться и без меня, это уже становится разделом технологии. Что же касается внедрения в физику идей топологии или алгебраической геометрии, то здесь у меня могут возникнуть такие идеи, что никто меня заменить не сможет. Да и физики начали очень интересоваться современной математикой в конце 60-х гг. Взаимодействие с физиками в «Институте Ландау» — с Халатниковым, Горьковым, Дзялошинским, Поляковым, Захаровым, Питаевским, Воловиком, Мигдалом — оказалось плодотворным. Немало получил я от этого взаимодействия для своей программы, в чем-то помог им. В атмосфере этого взаимодействия выросли и мои ученики (кроме первого поколения, не пошедших со мной изучать основы теоретической физики, хотя некоторые из самых лучших, как например Бухштабер, внесли вклад в приложения). Думаю, что цели Шварца и его программа были не очень далеки от моих, хотя мы и «осели» потом в разных областях. Шварц много сделал для развития квантовой теории поля как нового раздела математики, иногда нестроного, близкого к геометрии и топологии. Я старался развить нетрадиционные методы (к сожалению, их освоение встречает трудности у физиков), решать некоторые задачи, возникшие в общей теории относительности и квантовой механике, современной физике нелинейных волн, конденсированных сред и теории гальваномагнитных явлений, нередко вступая в конкуренцию с физиками. В некоторых, хотя и редких, случаях новая математика, возникшая в XX в., была реально полезна. Отсюда возникли также и новые задачи самой математики.

Что касается Манина, то его программа, как мне кажется, была совсем другой: несомненно, его особенно интересовали математический язык и логика теоретической физики. Он вообще жаждал внести вклад в формализацию науки. При этом склонность к изучению многих разнообразных вещей вообще всегда была его сильной стороной — он любил и умел это делать. О формализации математики мы поговорим особо. Мне кажется, у нее есть сторона, сыгравшая важную роль в развитии кризиса сообщества математиков, базирующегося на идеях современной математики — на геометрии и топологии (включая геометрию динамических систем), на алгебраической геометрии и т. д. Могут ли они быть реально полезны, так сказать, в деле?

Вторая половина XX в.: непомерная формализация математики

Когда я в юности читал работы 20–30-х гг. по теории множеств, я обращал внимание на то, что несмотря на абстрактность предмета эти работы написаны ясно и прозрачно. Вам хотят объяснить свою мысль и как можно проще. Этот предмет очень абстрактен, но о формализации речи не идет. Изу-

чая топологию в 50-е гг., я видел, что лучшие из книг и статей знаменитых топологов, по которым я учился (Зейферт-Трельфаль, Лефшец, Морс, Уитни, Ионтряпш, Серр, Том, Борель, Милнор, Адаме, Атья, Хирцебрух, Смейл и др.), были написаны очень ясно. Сам предмет не был прост, но запутывать Вас никто не хотел. Излагали предмет так просто, как только это возможно, чтобы помочь Вам понять и освоить. Но уже начали появляться и другие источники — например, еще в ранней юности я увидел, что в монографии моего учителя М. М. Постникова, где излагались его лучшие работы, содержание обросло ненужной формализацией, затрудняющей понимание. С течением времени количество текстов такого рода возрастало. Этот процесс шел особенно быстро там, где было много алгебры, много теории категорий. Формализация алгебраической геометрии вследствие этого шла быстрее. Топология еще держалась до конца 60-х гг., когда алгебра и алгебраическая геометрия уже были затоплены этим стилем. Затем, уже в 70-е гг. сдалась и топология. Впрочем, это совпало с периодом ее сильного падения, с потерей ориентации на общематематические контакты.

Формальный язык непрозрачен, он всегда является узкопрофильным, он защищает Вашу область от понимания ее соседями, от видимого всеми взаимного влияния идей. Если Вам удалось позаимствовать идеи из соседней области, Вы можете заформализовать их так, что первоисточник не будет виден. Так или иначе, почему-то имеется много математиков, заинтересованных в развитии формального языка, разделяющего даже очень близкие разделы до непонятности. В чем тут дело? Возможно, имеется много желающих быть, как говорят, «первыми в своей деревне», закрыв занавески от соседей, — хотя, вероятно, это не единственная причина того, что формальный язык стал так нравиться обширному сообществу математиков. У меня нет полного понимания природы этого процесса, его движущей силы, причины его широкого общественного успеха. Мне кажется, это болезнь, сопровождающая одностороннюю непомерно раздутую алгебраизацию: ее нужно проводить было бы осторожно и сбалансированно, не хороня под ней суть дела, чтобы она была полезной, и это сделать нелегко. Здесь мой подход сильно отличался от Манина: в ряде случаев он действовал в новых разделах математической физики как идеолог, внедряющий алгебраизацию в стиле Дьедонне, искусственно затрудняющую понимание. Например, в 70-е гг. я стал вести активную деятельность на мехмате МГУ, пропагандируя различные начала теоретической физики. Я убедился в том, что простое естественное изложение элементов идет с большим трудом: способная аудитория чистых математиков мехмата не хочет видеть даже несложных конкретных формул классического типа. Поэтому объяснить начала, например, общей теории относительности или электродинамики, вообще — элементарной теории поля, было очень трудно: моих студентов, обязанных слушать, я принуждал пройти какие-то азы и привыкнуть. После этого дело шло легче; остальные же нередко уходили, не дослушав начал. Лишь

единицы сумели пройти и понять. Я интересовался опытом коллег и узнал, что Манин подходил иначе. Он сообщал аудитории что-то сверхформальное и затем говорил, что они теперь узнали, что такое, например, уравнение Дирака. Общественный успех был бесспорный — у них глаза горели, но я не захотел идти таким путем: как показал опыт, узнать, что такое уравнение Дирака на самом деле, этим людям после такого начала будет во много раз трудней. Известен ряд успехов теории солитонов середины 70-х гг., в которых мне довелось участвовать с самого начала в роли инициатора и затем развивать их вместе с моими лучшими учениками (особенно Дубровиным и Кричевером). Тогда современная математическая физика впервые стала использовать методы алгебраической геометрии — были построены алгебро-геометрические (периодические) решения KdV и его аналогов. Манин написал вскоре очень формализованные учебно-обзорные статьи на эту тему. Многие молодые математики, склонные к алгебре, охотно читали именно их. Статьи и книги тех, кто создал эти области, были написаны простым общепонятным языком, целью которых было всего лишь прозрачное изложение предмета, использующего нетрадиционную для приложений математику, чтобы можно было ее изучить и пользоваться. Однако склонной к алгебре молодежи они кажутся трудными, чужими. Четких критериев — что нужно, что есть суть дела — у нее нет. Формализованные тексты, где суть дела не обсуждается, нравятся — они их читают как тексты из своей области, абстрактной алгебры. На самом деле из этих текстов они ничего не узнают, как я считаю, хотя будут думать, что все полезное освоили. Пожалуй, это относится ко всей математической молодежи, не прошедшей азов современной математической физики. Бурбакистские тексты по математической физике — нелепость двойная, они затрудняют и проникновение физиков в эти методы, создавая у них иллюзию сверхсложности и недоступности этих разделов математики, которые они ранее никогда не изучали. Да и Манин, как я заметил позднее, писал несравнимо прозрачнее, когда считал, что он сам что-то существенное сделал и хотел, чтобы это поняли и физики, так что я не знаю, сохранил ли он приверженность к формализации. Однако тогда подобные взгляды некоторых авторитетных ученых способствовали распространению этой болезни.

Казалось бы, наша область науки — современная математика — на первый взгляд, облегчит изучение, делая изложение как можно более прозрачным. Ведь формализация языка науки, осуществленная в бурбакистском стиле, — это не полезная формализация Гильберта, упрощающая понимание. Это — паразитная формализация, усложняющая понимание, мешающая единству математики и ее единству с приложениями. Я полагаю, что ультраформализованная литература возникла, в частности, потому, что можно было предвидеть ее успех у широкого слоя алгебраически ориентированных чистых математиков.

Надо идти против течения, чтобы бороться за сохранение прозрачного общенаучного стиля, который может сохранять единство математики, объединить математику с физикой, с приложениями. Это — лишь для очень немногих математиков сейчас. Современное сообщество не поймет. Более того, оно не хочет слушать голосов, предупреждающих о необходимости преодолевать какие-то барьеры, если рядом появляются авторитетные люди, говорящие, что ничего этого им не надо.

«Дайте им то, чего они хотят; ни к чему другому они не способны» — к такой оптимальной стратегии ведет демократическая эволюция абстрактной науки и образования, когда людям неизвестно, есть ли какая-нибудь цель их исследований, и они отказываются этот вопрос обсуждать. Все критерии легко смещаются, если нет цели, которую нужно достигнуть. Общественный успех остается единственным критерием.

Однако я замечу, что тем немногим, кто мог бы преодолеть барьер, бурбакистская литература сильно мешает найти правильный путь, дезинформирует их в сегодняшнем хаосе. Бесплезная всеусложняющая алгебраическая формализация языка математики, экранирующая суть дела и связи между областями, — это слишком широко распространившаяся болезнь, даже если я привел и не самые лучшие примеры, это — проявление кризиса, ведущего к определенной бессмысленности функционирования абстрактной математики, превращения ее в организм, потерявший единый разум, где органы дергаются без связи друг с другом. Как говорится, чтобы остановить построение вавилонской башни, Бог рассеял языки, и люди перестали понимать друг друга. Строительство остановилось.

Излишне усложненный формальный абстрактный язык захватил не только алгебру, геометрию и топологию, но также и значительную часть теории вероятностей и функциональный анализ. Анализ, дифференциальные уравнения, динамические системы оказались несколько менее ему подвержены. Здесь еще в 50–60-е гг. было сделано несколько хороших вещей, которые впоследствии широко распространились и стали общеплезны. Но другие нелепости захватили все это сообщество: математики — специалисты в этих областях — продолжают до сего дня программу, признающую лишь стопроцентно строгие теоремы, длина которых стала зачастую немислимой. Очень малый процент их потратил труд на самообучение и научился вступать в контакт с миром естественных наук, где ведутся конкретные исследования, без заботы о математической строгости. Но и те математики, кто вступает в подобные контакты, преследуют, как правило, одну цель: узнать какие-нибудь результаты физиков или инженеров, которые можно начать строго обосновывать. Это и называется «анализом», «прикладной математикой», «математической физикой».

Строгоманья постепенно превратилась в мифологию и веру, где много самообмана: спросите, кто читает эти доказательства, если они достаточно сложны? За последние годы выявилось много случаев, где решения ряда

знаменитых математических проблем топологии, динамических систем, различных ветвей алгебры и анализа, как выяснилось, не проверялись никем очень много лет. Потом оказалось, что доказательство неполно (см. мою статью в томе журнала GAFA 2000, посвященного конференции «Vision in Mathematics — 2000», Tel Aviv, August 1999). При этом отнюдь не во всех случаях пробелы могут сейчас быть устранены. Если никто не читает «знаменитых» работ, то как же обстоит дело со сложными доказательствами в более заурядных работах? Ясно, что их в большинстве просто никто не читает. Я могу понять, что решенные в тот же период проблемы Ферма и четырех красок стоят и длинного доказательства, и их проверяют. Но постоянно жить в мире сверхдлинных доказательств, никем не читаемых, просто нелепо. Это — дорога в никуда, нелепый конец программы Гильберта.

Следует обратить внимание еще на одну сторону дела, когда обсуждается ценность строгих математических обоснований. В естественных науках строгая математика требует такого уточнения модели, которое уводит от реальности гораздо дальше, чем нестрогость физика, и тем самым приводит к общенаучно менее строго обоснованному результату. Это еще один аргумент, кроме потери контроля за доказательствами. Наверное, сам Гильберт давно бы уже сказал, что этим нецелесообразно больше заниматься.

Наличие кризиса сообщества математиков с его системой образования и подходом к науке надо отделять от вопроса: есть ли кризис математики как науки? Может быть, кризиса и нет, просто лучшие работы в ряде областей стали делать другие люди, выходцы из физики?

В 70–80-е гг. довольно значительные коллективы физиков-теоретиков, включая прикладных физиков, по существу, стали математиками. Они много сделали для развития современной математики, дали ей большой импульс. Я назову несколько таких волн.

1. Завоевание вычислительной математики физиками. Этот естественный процесс шел долго. Каждому ясно теперь, что физик будет лучше считать задачи, суть дела которых он понимает, в отличие от вычислителя-математика.

2. Освоение физиками некоторых основных теоретико-множественных идей теории динамических систем, созданных в основном еще до 60-х гг., но ставших сейчас общим достоянием. Развитие компьютерно-базируемого творчества на этой основе.

3. Фундаментальная роль физиков в создании такого цикла идейно богатых новых разделов математики, как теория классических и квантовых точно решаемых систем: теория солитонов и вполне интегрируемых гамильтоновых систем, точно решаемые модели статистической физики и квантовой теории поля, матричные модели, конформные теории, суперсимметрия и точно решаемые модели калиброванных полей.

4. Приход квантовых физиков (как считают, временный) в такие разделы, как алгебраическая геометрия и топология, вызванный остановкой в разви-

тии физики фундаментальных взаимодействий. Совместный вклад физиков и математиков в эти области за последние 20 лет очень велик. Если будет подтверждена суперсимметрия в реальном мире элементарных частиц или что-то подобное, часть этих людей сразу уйдет обратно в реальную физику, как они считают.

5. Приход большой волны квантовых физиков в проблемы математически строгих обоснований физических результатов. Любопытно, что эта волна, называющая только себя «математическими физиками», отделена от тех, где развивается топология или точно решаются модели. Сюда входят люди, глубоко поверившие в идеально строгий подход, в программу Гильберта. Идеологически эти волны сильно расходятся, те — делая нестрогую чистую математику, называют себя «физиками», эти — доказывая теоремы, называют себя «математическими физиками». Эта волна является развитием того, что математики называют «анализом». Безусловно, богатство принесенных ими в математику знаний ставит этих людей выше в моих глазах, чем сложившийся до них «анализ» чистых математиков, не знавших современной физики.

Но все равно — я духовно не с ними, а с теми, другими, хотя скажу откровенно о своей личной научной программе: я потратил многие годы на изучение теоретической физики для того, чтобы искать новые ситуации, где топологические идеи могут быть полезны в приложениях и естественных науках. Новая топология, создаваемая физиками, — это замечательная вещь, но я достаточно изучил теоретическую физику, чтобы знать, что это — не раздел физики; пусть в это верят те, кто ничего не изучал. Физика — это наука о явлениях природы, которые могут реально наблюдаться. Платоновская физика — это набор стоящих за ними идеальных понятий. Большая группа талантливых физиков-теоретиков увлеклась платоновской физикой и незаметно отошла от реальности очень далеко. В последней четверти XX в. их вера в то, что реальная физика будет, следуя опыту последних 75 лет, подтягиваться и подтверждать наиболее красивые теории, перестала оправдываться. Застряло на 25–30 лет, например, подтверждение суперсимметрии в физике элементарных частиц. Его пока нет, хотя гипотеза суперсимметрии сильно улучшает математическую теорию. Квантовая гравитация и все ее проявления — струны и т. д. — безумно далеки от возможности подтверждения. В то же время эти теории оказались столь красивы математически, что они породили немало результатов и идей в чистой математике. Уход из реальной физики такого талантливого сообщества теоретиков оголяет физику, лишает ее слоя, способного соединять реализм физики с высокой современной математикой.

В самой реальной физике ряд областей стал ориентироваться сейчас не на познание законов природы, а на инженерного типа разработки все больше и больше. Мне кажется, такая тенденция имеется и в реалистически мыслящей части математиков. Само по себе это не так уж и плохо.

Каждому времени характерны свои цели и задачи. Было бы важно сделать совокупность достижений математики XX в. тоже максимально доступной, как можно более компьютеризованной — включая и классическую алгебраическую топологию: это помогло бы возродить нормальное изложение, прекратить представление этой замечательной области в виде абстрактной бессмыслицы, которую даже сами математики перестали понимать и не могут поэтому с ней работать.

Говоря о современных инженерно-ориентированных направлениях, я хотел бы указать, что жажда общества породить здесь успех ведет к возникновению любопытных общественных феноменов.

Что такое «квантовые компьютеры»? Возможность развить теорию квантового аналога процесса вычислений сама по себе интересна как раздел абстрактной математической логики квантовых систем. Когда же мы говорим о создании компьютера, возникает первый вопрос: можно ли указать какую-либо возможную физическую реализацию, чтобы грубо оценить числовые параметры для границ, преодоление которых было бы необходимо для реализации, для оценки возможностей, скорости. Без этого подобный объект существует только в платоновской физике. Об этом пока можно только писать романы наподобие Жюль Верна. Высокопарный разговор о всесиили технологии будущего неконкретен: оставим будущее будущим людям; пока мы просто ничего не знаем. Никто не знает, можно ли реально построить достаточно большую полностью когерентную квантовую систему, способную реализовать классически управляемые квантовые процессы по заданному довольно сложному алгоритму. Физику таких процессов надо долго изучать. А если и окажется, что можно, то будет ли основанная на этом модель вычисления работать лучше обычной в реальном мире? Не увлекайтесь сравнением числа шагов — они здесь не те, что в обычных машинах Тьюринга и Поста. Инженерной идеи пока не видно, как и физической. Есть только абстрактная квантовая логика. Машины Поста и Тьюринга создавались одновременно с реальными компьютерами; это не то, что квантовые компьютеры, которых нет. В такой ситуации мне непонятны восторги по поводу уже якобы решенных с помощью квантовых компьютеров проблем типа расшифровки кодов, нужных как частным фирмам, так и структурам типа КГБ, ЦРУ и т. д. Боюсь, КГБ-подобным организациям, придется подождать. Возможно, здесь действует логика рекламы: «Почему не устроить шум и не получить у них деньги на исследования? У них много денег, они платили и экстрасенсам». Во всяком случае, гениев типа Ферми, предложившего проект создания атомной бомбы, который мог бы поддержать и Эйнштейн, здесь пока не видно. Без гениев такие вещи не создаются, люди совсем об этом забыли. А вот возникновение шума без серьезной основы стало нормой в сообществе конца XX в.

Впрочем, скажу откровенно, что мне эта теория нравится. Возникший здесь шум может быть полезен, заставляя математиков наконец-то выучить

квантовую механику. Да и денег сейчас, действительно, без шума не достанешь. Так что остается лишь пожелать здесь хоть какого-нибудь успеха.

Совсем нелепые антинаучные фантомы возникли недавно. Они произвели (и производят) большой шум. Один из этих фантомов — это история так называемых «библейских кодов»: с помощью компьютеров некоторые профессора математики «доказали», что Библия написана не человеком. Глубоко веря в святость Библии, я позволю себе твердо стоять на той точке зрения, что каждая математическая работа, чистая или прикладная, должна проверяться и анализироваться математически, независимо от ее темы. Второй фантом, также произведенный чистыми математиками — это псевдоистория Фоменко, созданная в Московском университете. Здесь всемирная и русская история древности и средних веков были «опровергнуты» также средствами прикладной математической статистики. Общими чертами этих историй являются: 1) принадлежность авторов к кругу уважаемых математиков, 2) поддержка их работ целым рядом авторитетных математиков, 3) некомпетентность в прикладной математике. В обоих случаях ошибки абсолютно стандартны.

Несомненно, эти фантомы нанесли и нанесут большой ущерб профессии математика, репутации самой математики в современном обществе. Эти фантомы и им подобные — показатели глубокого кризиса математики, ее высшего слоя, глубокое общественное непонимание взаимодействия прикладной математики с реальным миром, непонимание таящихся здесь опасностей.

Раньше, еще в юности, я усвоил от старших такую точку зрения: деятельность в чистой науке не избавляет ученого от общественного долга перед наукой; напротив, будучи материально и политически независимыми, ведущие математики должны защищать ценности науки от новоявленных аналогов Лысенко, всяких сумасшедших и безграмотных. Защита ценностей науки — их обязанность перед обществом. Прикладники слишком утонули в материальных проблемах. Если верховный слой математиков не может этого делать — грош ему цена. Слава Богу, западные математики (включая людей религиозных) наконец-то выступили по поводу компьютерных теорем о библейских кодах. В России же я пока не вижу препятствий псевдоматематико-исторической чуши. Впрочем, и на западе упомянутую защиту организовали ученые старшего поколения Б. Саймон и Ш. Штернберг, тесно связанные с идеологией математической и теоретической физики.

У физиков, пришедших заниматься чистой математикой, возникло естественное пожелание обучить математиков квантовой теории поля. Виттен устроил что-то вроде «курсов» в Принстоне, продолжавшихся, кажется, около года. Прекрасная цель, я тоже пытался это сделать когда-то и даже обучил чему-то нескольких своих учеников — об этом уже упомянуто выше. Видимо, несколько человек благодаря Виттену сейчас что-то освоили. Один мой старый друг, Д. Каждан, очень хороший математик, всего на несколько

лет младше меня, освоил, в частности, начала теории поля. Они ему так понравились, что он стал их пропагандировать и дальше; читал несколько лекций и у нас, в Мэриленде. Правда, он читал лекции на формализованном «гарвардском» языке, к сожалению. Это, безусловно, сильно затрудняло понимание более широкому кругу математиков, но дело не только в этом. Мой друг еще в юности обладал необыкновенной способностью выучивать сложные вещи, смог он выучиться и сейчас, в пожилом возрасте. Я полагаю, еще пара первоклассных математиков старшего поколения что-то выучила вместе с ним. А где же математическая молодежь? Было бы хорошо, если бы основы теории поля вплоть до квантовой теории были освоены математиками. Не пора ли кончить брать даже в топологии результаты, нестрого полученные физиками, и их строго доказывать? Самим пора освоить тот комплекс идей, который позволяет угадать результат. Делать это на формализованном языке безнадежно. Надо принять этот новый анализ, созданный физикой второй половины XX в. и пока еще нестрогий, в принципе, таким, каков он есть. Хорошо бы создать прозрачные упрощенные учебники с ориентацией больше на математиков, но надо согласиться с неформализованным изложением. Нужных учебников пока нет, да и учить нужно более широкому курсу, чем теория поля. Как это сделать? Годится ли для этого современное западное образование?

Распад образования и кризис физико-математического сообщества

Здесь мы подходим к узловому вопросу, главной причине кризиса физико-математических наук — к процессу распада образования. Смогут ли еще имеющиеся сейчас поколения компетентных математиков и физиков-теоретиков обучить столь же компетентных молодых наследников для XXI в.? Ключ ко всему — в образовании, причем трудности проблемы, симптомы распада, начинаются с начальной и средней школы и продолжаются в университете.

Уже в 60-х гг. в СССР и на Западе стала нарастать резкая общественная критика трудности школьных математических программ, стали сокращать число экзаменов. Вероятно, это было связано с тем, что все 10–11 лет обучения стали общеобязательными. После этого выяснилось, что «всем» это слишком трудно — каждый год сдавать экзамены, начиная с 10 лет, особенно трудно учить математику. При этом, разумеется, «на всех» не хватало педагогов нужной компетентности. Да и математики-идеологи ряда стран (в СССР это был Колмогоров) стали неосторожно разрушать устоявшиеся схемы поэтапного обучения математике, внедряли идеи теории множеств «для всех». Колмогоров сделал много полезного, обучая наиболее способных в специальных школах, но в общее математическое образование

он внес немало чепухи. Так или иначе, общество потребовало сокращения и упорядочения, поднялся крик. Ситуация в СССР усугубилась из-за политических грешков и антисемитизма, как это бывало, особенно при Брежневле. Образование сильно облегчили, сняли большинство экзаменов. Начался процесс постепенного падения уровня. Одновременно шло снижение уровня обучения на математических и физических факультетах университетов. Это случилось везде, но в СССР еще были и антисемитизм, и рост бесчестности персонала, особенно на приемных экзаменах, и возрастание влияния соответствующих бесчестных «профессоров», мало известных мировой науке, и выращивание нового типа администраторов с высокими научными званиями, которые сами не делали даже свою собственную кандидатскую диссертацию, т. е. вообще на самом деле никогда не были учеными. Таков был процесс распада образования и науки в СССР, причем вузы, университеты разлагались несравненно быстрее, чем Академия, сохранившая научное лицо в гораздо большей степени. Замечу, кстати, что мировая наука вне бывшего социалистического лагеря незнакома с понятием «сто-процентно фальсифицированного крупного ученого» — эту схему особенно развил поздний СССР. Все бывшие советские ученые это знают, могут в частной беседе назвать ряд имен; но, как я многократно убеждался, будучи на Западе, все почему-то молчат об этом, даже те, кто выехал и там работает. Имена и мне письменно трудно назвать — попадешь под суд, ведь экзамена им никто не устроит для проверки уровня. Поразительно, сколь высокий процент высшей администрации науки и образования в позднем СССР на самом деле был таков; в большей степени это относится к образованию. И такие «фальшивые крупные ученые» занимали места, которые по праву должны были быть заняты серьезными учеными. Вследствие этого, когда железный занавес пал, очень широкий слой способных компетентных людей, уже давно неуютно себя чувствовавших, подобно «рыцарю, лишенному наследства», — весь выехал, потерял контакты. Вузы, университеты внутри России, в отличие от Академии, сами эти контакты пресекали, так что потеря этого слоя для будущей России — это лишь фиксация распадной ситуации, уже сложившейся в позднем СССР. Трудности с зарплатой можно было бы пережить: поработают на Западе и вернуться, когда будут сносные условия. Получилось хуже: с самого начала было ясно, что возвращаться некуда, в России тебя не ждут, все занято «фальшивыми учеными». Таков был процесс распада в СССР/России.

Однако на Западе тоже произошел кардинальный спад уровня университетского и школьного физико-математического образования за последние 20–25 лет, причем в США падение школьного обучения, по-видимому, особенно низко. Я вижу ясно, что нынешнее образование не сможет воспитать физика-теоретика, способного сдать весь теоретический минимум Ландау. Уход большой группы талантливых теоретических физиков в математику никем не будет восполнен. В самой математике образование дает гораздо

меньше знаний, чем 30 лет назад. Из лучших университетов Запада выходят очень узкие специалисты, которые знают математику и теорфизику беспорядочно и несравнимо меньше, чем в прошлом. Они не имеют шансов стать учеными типа Колмогорова, Ландау, Фейнмана и др.

Я не хочу обсуждать здесь детали процесса, приведшего к этому результату. В те годы я деталей жизни на Западе не видел. Так или иначе, демократический прогресс образования привел к тому же результату в физико-математических науках, как и брежневский режим. Вывод очень прост: мы в глубоком кризисе. Учтите при этом, что математики и физики-теоретики контролировали также уровень физико-математического образования инженеров, это — одна из основ их грамотности. Значит, и там происходит распад. Падение уровня математического и физического образования в отделениях компьютерных наук также очевидно всем. Там происходит переориентация на обслуживание бизнеса, торговли. Само по себе это неплохо: если бизнес идет вверх, молодежь туда пойдет, там большие деньги.

Но как воспитать разносторонне грамотного математика и физика-теоретика? Даже если правда, что эти области несколько переразвились и могут подождать, все равно — потеря круга знающих их людей может оказаться опасной для человечества. Потеряв однажды этот слой, его очень трудно и долго будет восстанавливать, когда придет необходимость, если вообще возможно. Это может при определенном повороте событий сильно ударить по технологическим возможностям человечества, которые могут оказаться жизненно необходимыми при некоторых сценариях эволюции.

Что-то нужно делать. Чисто демократическая эволюция образования, где люди свободно выбирают курсы, в этих науках работает плохо: следующий слой знаний должен ложиться на тщательно подготовленные предыдущие этажи, и этих этажей много. Надо покупать все здание, а не отдельные этажи в беспорядке: эволюция, которая произошла, подобна естественному термодинамическому процессу с ростом энтропии, с уменьшением качества информации в обществе. Здесь должны быть предприняты централизованные действия, под контролем очень компетентных людей. Физико-математическое образование — это не демократическая структура по своему характеру, она не подобна свободной экономике. Считают, что эти области оживут при наличии крупномасштабных военных проектов. Но это лишь полуправда, этого не достаточно (если это вообще будет). Когда не будет достаточно компетентных людей, никакие деньги не помогут.

Итак, мы встречаем XXI в. в состоянии очень глубокого кризиса. Нет полной ясности, как из него можно выйти: естественные меры, которые напрашиваются, практически очень трудно или почти невозможно реализовать в современном демократическом мире. Конечно, мы вошли в век биологии, которая делает чудеса. Но биологи не заменят математиков и физиков-теоретиков, это совсем другая профессия. Хотелось бы, чтобы серьезные меры были приняты.



Фоменко А. Т.
Геометрия и вероятность

Автоматы и жизнь¹⁾

А. Н. Колмогоров²⁾

Мой доклад «АВТОМАТЫ И ЖИЗНЬ», подготовленный для семинара научных работников и аспирантов механико-математического факультета Московского государственного университета, вызвал интерес у самых широких кругов слушателей.

Редакция журнала «Техника — молодежи» решила опубликовать популярное изложение доклада, подготовленное моей сотрудницей по Лаборатории вероятностных и статистических методов МГУ Н. Г. Рычковой. Изложение это во всех существенных чертах правильно, хотя иногда словесное оформление мысли, а следовательно, и некоторые ее оттенки принадлежат Н. Г. Рычковой.

Подчеркну основные идеи доклада, имеющие наиболее широкий интерес.

I. Определение ЖИЗНИ как «особой формы существования белковых тел» (Энгельс) было прогрессивно и правильно, пока мы имели дело только с конкретными формами жизни, развившимися на Земле. В век космонавтики возникает реальная возможность встречи с «формами движения материи» (см. статью «Жизнь» в БСЭ), обладающими основными практически важными для нас свойствами живых и даже мыслящих существ, устроенных иначе. Поэтому приобретает вполне реальное значение задача более общего определения понятия ЖИЗНИ.

II. Современная электронная техника открывает весьма широкие возможности МОДЕЛИРОВАНИЯ жизни и мышления. Дискретный (арифме-

¹⁾ Доклад академика А. Н. Колмогорова с таким названием состоялся в апреле 1961 г. в МГУ имени М. В. Ломоносова. Первая публикация была в 10-м и 11-м номерах журнала «Техника — молодежи» за 1961 г.

²⁾ Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — великий ученый, один из самых крупных математиков XX в., создатель огромной научной школы, получивший всемирное признание, один из патриархов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (профессор с 1931 г.), академик АН СССР (с 1939 г.), лауреат Сталинской премии, Герой Социалистического Труда. А. Н. Колмогоров — один из основоположников современной теории вероятностей, им получены фундаментальные результаты в топологии, математической логике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов и многих других областей математики и ее приложений. Иностранный член почти всех научных академий и научных сообществ мира.

тический) характер современных вычислительных машин и автоматов не создает в этом отношении существенных ограничений. Системы из очень большого числа элементов, каждый из которых действует чисто «арифметически», могут приобретать качественно новые свойства.

III. Если свойство той или иной материальной системы «быть живой» или обладать способностью «мыслить» будет определено чисто функциональным образом (например, любая материальная система, с которой можно разумно обсуждать проблемы современной науки или литературы, будет признаваться мыслящей), то придется признать в принципе вполне осуществимым ИСКУССТВЕННОЕ СОЗДАНИЕ живых и мыслящих существ.

IV. При этом, однако, следует помнить, что реальные успехи кибернетики и автоматики на этом пути значительно более скромны, чем иногда изображается в популярных книгах и статьях. Например, при описании «самообучающихся» автоматов или автоматов, способных «сочинять» музыку или писать стихи, иногда исходят из крайне упрощенного представления о действительном характере высшей нервной деятельности человека и, в частности, творческой деятельности.

V. Реальное продвижение в направлении понимания механизма высшей нервной деятельности, включая и высшие проявления человеческого творчества, естественно, не может ничего убавить в ценности и красоте творческих достижений человека. Я думаю, что это и хотела сказать редакция журнала «Техника — молодежи», сделав лозунг «Материализм — это прекрасно!» одним из подзаголовков в изложении моего доклада.

Академик А. Н. Колмогоров
25 августа 1961 г.

Автоматы и жизнь (тезисы доклада)

А. Н. Колмогоров

Первая часть

1. Общеизвестен интерес к вопросам:

Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе такого самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?

Могут ли машины мыслить и испытывать эмоции?

Могут ли машины хотеть чего-либо и сами ставить перед собой новые задачи, не поставленные перед ними их конструкторами?

Иногда пытаются обосновать отрицательный ответ на подобные вопросы при помощи

- а) ограничительного определения понятия «машина»,
- б) идеалистического толкования понятия «мышление», при котором легко доказывается неспособность к мышлению не только машин, но и человека¹.

2. Существует более традиционная и простая форма этого вопроса:

Возможно ли создание искусственных живых существ, способных к размножению, прогрессивной эволюции, в высших формах обладающих эмоциями, волей и мышлением вплоть до самых тонких его разновидностей.

3. Точное определение всех входящих в поставленный сейчас вопрос понятий не вполне тривиально. Однако на естественнонаучном уровне строгости такое определение возможно. Лица, отрицающие такую возможность, неизбежно приводятся к солипсизму.

4. Создание высокоорганизованных живых существ превосходит возможности техники сегодняшнего дня. Если технические трудности будут преодолены, то вопрос о практической целесообразности осуществления соответствующей программы работ будет еще, по меньшей мере, спорным.

5. Однако важно отчетливо понимать, что в рамках материалистического мировоззрения не существует никаких состоятельных принципиальных аргументов против положительного ответа на наш вопрос. Этот положительный ответ является современной формой положений о естественном возникновении жизни и материальной природе сознания.

6. Несомненно, что переработка информации и процессы управления в живых организмах построены на сложном переплетении

- а) дискретных (цифровых) и непрерывных механизмов,
- б) детерминистического и вероятностного принципов действия.

7. Однако дискретные механизмы являются ведущими в процессах переработки информации и управления в живых организмах. Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными.

8. Принципиальная возможность полноценных живых существ, построенных полностью на дискретных (цифровых) механизмах переработки информации и управления, не противоречит принципам материалистической диалектики. Противоположное мнение может возникнуть у специалистов по философии математики лишь потому, что они привыкли видеть диалектику лишь там, где появляется бесконечное. При анализе явлений жизни существенна не диалектика бесконечного, а диалектика большого (чисто арифметическая комбинация большого числа элементов создаст и непрерывность и новые качества!).

Вторая часть

9. Несмотря на сказанное в первой части, в распространенном движении против «преувеличений кибернетики» есть и здоровая сторона. Реальными распространенными недостатками обобщающей литературы и отдельных научных работ по кибернетике являются:

- а) упрощенное представление о механизмах переработки информации и управления в живых организмах и, особенно, в области высшей нервной деятельности человека,
- б) пренебрежение опытом исследования этих механизмов, накопленным до возникновения кибернетики как отдельной науки.

10. Если первый из этих недостатков «исправляется на ходу» (в процессе работы несостоятельность упрощенных представлений обнаруживается), то второй недостаток требует систематической борьбы с ним, в частности, при планировании подготовки молодых специалистов по кибернетике и ее применениям.

11. В области высшей нервной деятельности человека кибернетика пока освоила лишь:

- а) механизм условных рефлексов в его простейшей форме (см. работы по «математической теории обучения»),
- б) механизм формального логического мышления.

Но условные рефлексы свойственны всем позвоночным, а логическое мышление возникло лишь на самой последней стадии развития человечества. Все предшествующие формальному логическому мышлению виды синтетической деятельности человеческого сознания, выходящие за рамки простейших условных рефлексов, пока не описаны на языке кибернетики.

12. В развитом сознании современного человека аппарат формального мышления не занимает центрального положения. Это, скорее, некоторое «вспомогательное вычислительное устройство», запускаемое в ход по мере надобности. Так как, с другой стороны, обычные схемы теории условных рефлексов дают очень мало для понимания высших разделов эмоциональной жизни человека или, скажем, творческой интуиции ученого, то следует признать, что кибернетический анализ работы развитого человеческого сознания в его взаимодействии с подсознательной сферой еще почти не начат.

13. Рассматриваемые в кибернетических работах примеры художественного творчества и восприятия и их моделирования на машинах (компилирование музыкальных мелодий из отрывков по четыре-пять нот, взятых из нескольких десятков введенных в машину прежних мелодий и т. п.) поражают своей примитивностью, в то время как в «некибернетической» научной литературе формальный анализ художественного творчества уже давно достиг высокого уровня. Это лишь один из примеров примитивного уровня гуманитарных интересов кибернетиков, повышение которого

необходимо, если ставить всерьез задачу понимания с позиций кибернетики действительной сложности психической жизни человека.

14. Объективное изучение в терминах кибернетики некоторых наиболее тонких видов творческой деятельности человека может уже в ближайшем будущем получить большое практическое значение.

Вот пример, наиболее близкий математикам. Общеизвестно, что карандаш и бумага необходимы математику в процессе интуитивных творческих поисков. Вместо полностью выписанных формул иногда на бумаге появляются их предположительные схемы с незаполненными местами, несколько линий и точек изображают фигуры в многомерном или бесконечномерном пространстве, иногда знаками обозначается ход перебора вариантов, сгруппированных по принципам, которые перестраиваются в ходе перебора и т. д. Вполне возможно, что вычислительные машины с надлежащим устройством ввода и вывода данных могли бы быть полезны уже на этой стадии научной работы.

Естественно, что разработка методики такого употребления машин предполагает предварительное объективное изучение процесса творческих поисков ученого.

15. Некоторые другие направления объективного изучения механизма творческой деятельности человека могут и не получить в ближайшее время практических применений².

Однако, серьезное объективное изучение высшей нервной деятельности человека во всей ее полноте представляется мне необходимым звеном в утверждении материалистического гуманизма. Развитие науки многократно приводило к разрушению привычных для человека иллюзий, начиная с утешительной веры в личное бессмертие. На стадии полузнания и полупонимания эти разрушительные выводы науки становятся аргументами против самой науки, в пользу иррационализма и идеализма. Дарвиновская теория происхождения видов и павловское объективное изучение высшей нервной деятельности неоднократно изображались как принижающие высшие стремления человека к созданию моральных и эстетических идеалов. Аналогично в наше время страх перед тем, как бы человек не оказался ничем не лучше «бездущных» автоматов, делается психологическим аргументом в пользу витализма и иррационализма³.

Полное же понимание механизма высшей нервной деятельности человека должно, по моему убеждению, разрушить самый источник страха, заменив его удивлением перед результатами уже упоминавшейся диалектики большого⁴.

А. Колмогоров
1 марта 1961 г.

Примечания А. Н. Колмогорова

1. (К стр. 59.) «Математическое возражение» по классификации А. Тьюринга в книжке «Может ли машина мыслить?»

2. (К стр. 61.) Во всяком случае, мои личные опыты внесения идей кибернетики в стиховедение не имеют цели помогать поэтам писать стихи.

3. (К стр. 61.) Страусовый аргумент (*The «Heads in the Sand» objection*) в терминологии Тьюринга.

4. (К стр. 61.) Поэт может вложить в «сообщение» из 400 печатных букв (сообщение чисто «цифровой» природы, несущее формально порядка 10^3 «бит», т. е. количественно ничтожную с точки зрения современной техники) целый мир чувств, который справедливо признается не поддающимся «формализации» в понятиях, и создать с такими скромными средствами «канал связи» непосредственного эмоционального общения со своими современниками и потомками, раскрывающий, разрывая ограничения пространства и времени, его неповторимую индивидуальность. Замечу, что мнение о «неповторимости» не противоречит арифметике. Число возможных русских стихотворений из 400 букв имеет порядок 10^{100} .

Изложение доклада А. Н. Колмогорова, подготовленное для публикации Н. Г. Рычковой¹⁾

— *Я принадлежу*, — сказал Колмогоров, — *к тем крайне отчаянным кибернетикам, которые не видят никаких ограничений в кибернетическом подходе к проблеме жизни и полагают, что можно анализировать жизнь во всей ее полноте, в том числе и человеческое сознание со всей его сложностью, методами кибернетики.*

Общеизвестен интерес к вопросам:

Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?

Могут ли машины испытывать эмоции: радоваться, грустить, быть недовольными чем-нибудь, чего-нибудь хотеть?

Могут ли, наконец, машины сами ставить перед собой задачи, не поставленные перед ними их конструкторами?

Иногда пытаются отделаться от этих вопросов или обосновать отрицательные ответы на них, предлагая, например, определить понятие «машина» как нечто, *каждый раз искусственно создаваемое человеком.*

¹⁾ «Библиотечки «Кванта». Вып. 64, М.: Наука, 1988.

При таком определении часть вопросов, скажем первый, автоматически отпадает. Но вряд ли можно считать разумным упорное нежелание разбираться в вопросах, действительно интересных и сложных, прикрываясь насильственно ограниченным пониманием терминов.

Вопрос о том, возможно ли на пути кибернетического подхода к анализу жизненных явлений создать подлинную, настоящую жизнь, которая будет самостоятельно продолжаться и развиваться, остается насущной проблемой современности. Уже сейчас он актуален, годен для серьезного обсуждения, ибо изучение аналогий между искусственными автоматами и настоящей живой системой уже сейчас служит принципом исследования самих явлений жизни, с одной стороны, и способом, помогающим изыскивать пути создания новых автоматов, — с другой.

Есть и другой способ сразу ответить на все эти вопросы — обратиться к математической теории алгоритмов. Математикам хорошо известно, что в пределах каждой формальной системы, достаточно богатой математически, можно сформулировать вопросы, которые кажутся содержательными, осмысленными и должны предполагать наличие определенного ответа, хотя в пределах данной системы такого ответа найти нельзя. И поэтому провозглашается, что развитие самой формальной системы есть задача машины, а обдумывание правильного ответа на вопрос — это уже дело человека, преимущественное свойство человеческого мышления.

Такая аргументация, однако, использует идеалистическое толкование понятия «мышление», с помощью которого можно легко доказать, что не только машина, но и сам человек мыслить не может. Здесь ведь предполагается, что человек может давать правильные ответы на любые вопросы, в том числе и на поставленные неформально, а мозг человека способен производить неограниченно сложные формальные выкладки. Между тем нет никаких оснований представлять себе человека столь идеализированным образом — как бесконечной сложности организм, вмещающий бесконечное количество истин. Чтобы достичь такого положения, заметим в шутку, пришлось бы расселить человечество по звездным мирам с тем, чтобы, пользуясь бесконечностью мира, организовать формальные логические выкладки в бесконечном пространстве и даже передавать их по наследству (т. е. располагать и бесконечным временем). Тогда только можно было бы считать, что любой математический алгоритм человечество может развить до бесконечности.

Но вряд ли эта аргументация имеет отношение к реальному положению вещей. И уж во всяком случае это не может служить возражением против постановки вопроса о возможности создания искусственных живых существ, способных к размножению и прогрессивной эволюции, в высших формах обладающих эмоциями, волей и мышлением.

Этот же вопрос ставится изящно, хотя и формально математиком Тьюрингом в его книге «Может ли машина мыслить?»: **можно ли построить машину, которую нельзя было бы отличить от человека?** Такая поста-

новка как будто ничуть не хуже нашей и к тому же проще и короче. На самом же деле, она не вполне отражает суть дела. Ведь, по существу, интересен не вопрос о том, можно ли создать автоматы, воспроизводящие известные нам свойства человека, — хочется знать, возможно ли создать новую жизнь, столь же высоко организованную, хотя, может быть, очень своеобразную и совсем не похожую на нашу.

В современной научной фантастике встречаются произведения, затрагивающие эти темы. Интересен и остроумен рассказ «Друг» в сборнике Станислава Лема «Вторжение с Альдебарана» о машине, пожелавшей управлять человечеством. Однако фантазия романистов, как правило, не отличается особой изобретательностью. И. А. Ефремов, например, выдвигает концепцию, что всё совершенное похоже друг на друга. Стало быть, у высокоорганизованного существа обязаны быть, по его мнению, два глаза и нос, разве что несколько измененной формы. В век космонавтики не праздно предположение, что нам, быть может, придется столкнуться с другими живыми существами, весьма высокоорганизованными и в то же время совершенно на нас непохожими. Сможем ли мы установить, каков внутренний мир этих существ, способны ли они к мышлению, присущи или чужды им эстетические переживания, идеалы красоты и т. п.? Почему бы, например, высокоорганизованному существу не иметь вид тонкой пленки — плесени, распластанной на камнях?

Поставленный нами вопрос тесно связан с другими: **а что такое жизнь, что такое мышление, что такое эмоциональная жизнь, эстетические переживания?**

В чем, скажем, состоит отличие эстетических переживаний от простых элементарных удовольствий — от пирога, например, или еще чего-нибудь в этом роде? Если говорить более серьезно, то следует сказать: **точное определение таких понятий, как воля, мышление, эмоции, еще не удалось сформулировать. Но на естественнонаучном уровне строгости такое определение возможно.** Если мы не признаем эту возможность, мы окажемся безоружными против аргументов солипсизма.

Хотелось бы научиться на основании *поведения*, например, делать выводы о внутреннем состоянии живого высокоорганизованного существа. Здесь открываются следующие пути: во-первых, можно детально изучать *само поведение* животных или человека; во-вторых, изучать *устройство их мозга*; можно, наконец, иногда довольствоваться и так называемым *симпатическим пониманием*. (Если, скажем, просто внимательно наблюдать кошку или собаку, то, и не зная науки о поведении и условных рефlekсах, можно прекрасно понять, что у них на уме и чего им хочется. Несколько труднее достигнуть такого понимания с птицами или, например, с рыбами, но вряд ли и это невозможно.)

Это вопрос не новый, частично он уже решен, частично легко решаем, частично — трудно. Опыт индуктивного развития науки говорит нам, что вопросы, долго не находившие решения, постепенно все же разрешаются,

и вряд ли нужно думать, что именно здесь существуют заранее установленные пределы, дальше которых продвинуться нельзя.

Как изучать высшую нервную деятельность, используя кибернетический подход? Если считать, что анализ любой высокоорганизованной системы естественно входит в состав кибернетики, придется отказаться от пространенного мнения, что основы кибернетики включают в себя лишь изучение *систем, имеющих заранее назначенные цели*.

Часто кибернетику определяют как науку, занимающуюся изучением *управляющих систем*. Считается, что все такие системы обладают общими свойствами и свойство номер один у них — наличие цели. Это верно лишь до тех пор, пока всё, что мы выделяем в качестве организованных систем, управляющих собственной деятельностью, похоже на нас самих. Однако, если мы хотим методами кибернетики изучать *происхождение* таких систем, их *естественную эволюцию*, то такое определение становится узким. Вряд ли кибернетика поручит какой-либо другой науке выяснять, каким образом обычная причинная связь в сложных системах путем естественного развития приводит к возможности рассматривать всю систему как *действующую целесообразно*.

Обычно понятие «действовать целесообразно» включает умение охранять себя от разрушающих внешних воздействий или, скажем, способность содействовать своему размножению. Спрашивается: кристаллы действуют целесообразно или нет? Если «зародыш» кристалла поместить в некристаллическую среду, будет ли он развиваться? Ведь никаких отдельных органов у кристалла различить невозможно — стало быть, это есть некая *промежуточная форма*. И существование таковых неизбежно.

По-видимому, частные задачи, подобные этой, будут все-таки решать науки, непосредственно с этими задачами связанные — опытом отдельных наук никак нельзя пренебрегать. Но исключать из содержания кибернетики общие представления о причинных связях в целесообразно действующих системах, ставящих себе цели, также никак нельзя, как нельзя, например, уже при имитации жизни автоматами не считаться, скажем, с тем, что и сами эти цели меняются в процессе эволюции, а вместе с этим изменяется и представление о них.

Когда говорят, что механизм наследственности, позволяющий живым организмам передавать свое целесообразное устройство потомкам, имеет целью воссоздать данный вид, придать ему определенные свойства, а также возможности изменчивости, прогрессивной эволюции, то кто же ставит эту цель? Или, если рассматривать систему в целом, то кто же, как не она сама, ставит перед собой цель развития путем отсеивания негодных экземпляров и размножения более совершенных?

Резюмируя эти соображения, можно сказать, что **изучение в общей форме возникновения систем, к которым применимо понятие целесообразности, есть одна из главных задач кибернетики**. При этом *изучение в общей форме* естественно предполагает знание, отвлеченное от деталей

физического осуществления, от энергетики, химии, возможностей техники и т. п. Нас здесь интересует только, как возникает возможность *сохранять и накапливать информацию*. Такая широкая постановка задачи содержит в себе много трудностей, но отказаться от нее на современном этапе развития науки уже невозможно.

Если признавать важность задачи определения в объективных обобщенных терминах существенных свойств внутренней жизни (высшей нервной деятельности) какой-то незнакомой нам и не похожей на нас высокоорганизованной системы, то нельзя ли тот же путь предложить и в применении к нашей системе — человеческому обществу? Хотелось бы на общем языке, одном и том же для всех высокоорганизованных систем, уметь описывать и любые явления жизни человеческого общества.

Представим себе воображаемого постороннего наблюдателя нашей жизни, который совершенно не обладает ни симпатиями к нам, ни умением понять, что мы думаем и переживаем. Он просто наблюдает большое скопление организованных существ и хочет понять, как оно устроено. (Совершенно так же, как, скажем, мы наблюдаем муравейник.) Через некоторое время он, пожалуй, без особого труда сможет понять, какую роль играет информация, содержащаяся, например, в железнодорожных справочниках (человек теряет такой справочник и не может попасть на нужный поезд). Наблюдателю, правда, пришлось бы столкнуться с большими трудностями. Как, например, понять ему следующую картину: группа людей приходит вечером в большое помещение, несколько человек поднимаются на возвышение и начинают делать беспорядочные движения, а остальные сидят при этом спокойно, и по окончании расходятся без всякого обсуждения?

Один из молодых математиков, может быть в шутку, приводит и другой пример необъяснимого поведения: люди заходят в помещение, там получают бутылки с некоей жидкостью, после чего начинают бессмысленно жестикулировать. Постороннему наблюдателю будет трудно установить, что же это такое — просто разлад в машине, какой-то сбой в ее непрерывной осмысленной работе, или же можно описать, что происходит в каждом из этих двух случаев, и установить разницу между ними.

Сформулируем теперь серьезно возникающую здесь проблему: **научиться в терминах поведения осуществлять объективное описание самого механизма, это поведение обуславливающего, и уметь различать отдельные виды деятельности высокоорганизованной системы.** Впервые в нашей стране И. П. Павлов установил возможность объективного изучения поведения животных и человека, а также регулирующих это поведение процессов мозга без всяких субъективных гипотез, изложенных в психологических терминах. Предложенное здесь глубокое изучение поставленной проблемы есть не что иное, как павловская программа анализа высшей нервной деятельности в ее дальнейшем развитии.

Практическое создание высокоорганизованных живых существ превосходит возможности техники наших дней. Но всякие ограничительные тен-

денции, всякое неверие или даже утверждение невозможности на рациональных путях достичь *объективного описания* человеческого сознания во всей его полноте сейчас явились бы тормозом в развитии науки. Разрешение этой проблемы необходимо, поскольку истолкование разных видов деятельности само уже может служить толчком для развития машинной техники и автоматике. С другой стороны, возможности объективного анализа нервной системы сейчас столь велики, что не хочется заранее останавливаться перед задачами любой сложности.

Если технические трудности будут преодолены, вопрос о практической целесообразности осуществления соответствующей программы останется, по меньшей мере, спорным.

Однако в рамках материалистического мировоззрения не существует никаких состоятельных принципиальных аргументов против положительного ответа на наш вопрос. Более того, этот положительный ответ является современной формой убеждений о естественном возникновении жизни и материальной основе сознания.

В кибернетике и теории автоматов сейчас наиболее разработана теория работы *дискретных* устройств, т. е. таких, которые состоят из большого числа отдельных элементов и работают отдельными тактами. Каждый элемент может находиться в небольшом числе состояний, и изменение состояния отдельного элемента зависит от предыдущих состояний сравнительно небольшого числа элементов. Так устроены электронные машины, так, предположительно, устроен и человеческий мозг. (Считается, что мозг имеет таких отдельных элементов (нервных клеток) — 10^{10} , а может быть, и еще больше! Несколько проще, но еще более грандиозно в смысле объема устроен аппарат наследственности.)

Отсюда напрашивается вывод, что кибернетика должна заниматься лишь дискретными устройствами. Против такого подхода нередко выдвигают два возражения.

Во-первых, реальные сложные системы — как многие машины, так и все живые существа — в действительности имеют и устройства, основанные на принципе *непрерывного* действия. Что касается машин, то таким примером может служить, скажем, руль автомобиля. Если мы обратимся к человеческой деятельности — сознательной, но не подчиненной законам формальной логики, т. е. интуитивной или полуинтуитивной (например, к двигательным реакциям), — то мы обнаружим, что большое совершенство и отточенность механизма непрерывного движения относятся к движениям *непрерывно-геометрического* характера. Если человек совершает тройной прыжок или прыжок с шестом или, например, выходит на дистанцию слалома, его движение должно быть *заранее намечено как непрерывное* (для математиков: путь слаломиста оказывается даже *аналитической кривой*). **Можно полагать, однако, что это не есть радикальное возражение против дискретных механизмов. Скорее всего, интуиция непрерывной линии в мозге все-таки осуществляется на основе дискретного механизма.**

Второе возражение против дискретного подхода заключается в следующем: заведомо человеческий мозг и даже (к сожалению, часто) вычислительные машины, отнюдь не всегда действуют *детерминированно* — полностью закономерным образом. Результат их действия (в некоторый момент, в некоторой ячейке) нередко *зависит от случая*. В ответ на это возражение можно сказать, что и в автоматы можно «ввести случайность». Вряд ли имитирование случайности (т. е. замена случая какими-то закономерностями, не имеющими непосредственного отношения к данной ситуации) может принести сколько-нибудь серьезный вред при моделировании жизни. Правда, «введение случайности» часто рассматривается несколько примитивно: заготавливается достаточно длинная лента случайных чисел, которая затем используется для имитации случая в различных задачах. Но при частом употреблении эта заготовленная «случайность» в конце концов перестает быть случайностью. С учетом этих соображений к вопросу имитации случая на автоматах следует подходить с большой осторожностью. Однако, принципиально, — это вещь, во всяком случае, возможная.

Только что изложенная аргументация приводит нас к следующим основным выводам:

Несомненно, что переработка информации и процессы управления в живых организмах построены на сложном переплетении дискретных (цифровых) и непрерывных механизмов, с одной стороны, детерминированного и вероятностного принципов действия — с другой.

Однако дискретные механизмы являются *ведущими* в процессах переработки информации и управления в живых организмах. Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными.

Часто сомнения в возможности моделировать человеческое сознание на автоматах строят на том, что *количество* функций высшей нервной деятельности человека необъятно велико и никакая машина не сможет стать моделью сознательной человеческой деятельности в полном ее объеме. Одних только нервных клеток в коре головного мозга порядка 10^{10} . Каково же должно быть число элементов в машине, имитирующей *всю сложную высшую нервную деятельность человека*?

Эта деятельность, однако, связана не с отдельными нервными клетками, а с довольно большими агрегатами их. Невозможно представить себе, чтобы, скажем, какая-нибудь математическая теорема «сидела» в одной-единственной, специально для нее заготовленной нервной клетке или даже в каком-то определенном числе их.

По-видимому, дело обстоит совершенно иначе. Наше сознание оперирует сравнительно небольшими количествами информации. Количество единиц информации, которое сознание человека воспринимает и перерабатывает, скажем, в секунду, совсем невелико. Вот один несколько парадоксаль-

ный пример: слаломист, преодолевая дистанцию, в течение десяти секунд воспринимает и перерабатывает значительно большую информацию, чем при других, казалось бы, более интеллектуальных видах деятельности (во всяком случае, больше, чем математик пропускает через свою голову за сорок секунд напряженной работы мысли!). Вообще, вся сознательная деятельность человека устроена как-то очень своеобразно и сложно, но когда закономерности ее будут изучены, для моделирования этой деятельности потребуется гораздо меньше элементарных ячеек, чем для моделирования самого мозга, как это ни парадоксально.

Какие же объемы информации могут создавать уже *качественное* своеобразие сложных явлений, подобных жизни, сознанию и т. п.? Чтобы попытаться ответить на этот вопрос, обратимся к понятиям категорий чисел.

Можно разделить числа на *малые, средние, большие и сверхбольшие*. (Эта классификация нестрога, в рамках ее нельзя будет сказать, что такое-то число, например, среднее, а следующее за ним — уже большое. Числа делятся на категории *с точностью до порядка величин*. Но большая строгость нам здесь и не нужна.) Каковы же эти категории? Начнем с определений для математиков.

Число А назовем малым, если возможно практически перебрать все схемы из А элементов с двумя входами и выходами (или, что то же, выписать для них все функции алгебры логики с А аргументами);

Число В назовем средним, если мы оказываемся не в состоянии перебрать практически все схемы из В элементов, а можем перебрать лишь сами эти элементы или (что чуть-чуть сложнее) выработать систему обозначений для любой системы из В элементов;

Число С — большое, если мы не в состоянии практически перебрать такое число элементов, а можем лишь установить систему обозначений для этих элементов;

И, наконец, числа — сверхбольшие, если и этого практически нельзя сделать (они нам, как мы увидим дальше, и не понадобятся).

Поясним теперь эти определения на простых примерах.

Пусть к одной электрической лампочке подсоединено три выключателя, каждый из которых может находиться в левом (Л) или правом (П) положении. Тогда, очевидно, возможных совместных положений трех выключателей будет $2^3 = 8$. Перечислим их для наглядности:

ЛЛЛ (1)	ЛПП (3)	ПЛЛ (5)	ППП (7)
ЛПЛ (2)	ЛЛП (4)	ППЛ (6)	ППП (8)

Проводку к нашим выключателям можно сделать таким образом, что в каждом из выписанных положений лампочка может как гореть, так и не гореть. Легко подсчитать, что различных положений выключателей, сопровождаемых отметками «горит», «не горит», будет 2^{2^3} , т. е. $2^8 = 256$ (читатель без труда может проверить это самостоятельно, дополняя выписанные положения выключателей такими отметками). Тот факт, что такое

упражнение не только под силу читателю, но и не займет у него слишком много времени, и убеждает нас в том, что число 3 (число выключателей) относится к *малым*. Если бы выключателей было не 3, а, скажем, 5, то пришлось бы выписать $2^5 = 4294967296$ различных совместных положений выключателей, сопровождаемых отметками «горит», «не горит». Вряд ли можно за какое-нибудь разумное время практически проделать все это, не сбившись. Поэтому число 5 уже *нельзя считать малым*.

Чтобы стало понятно, что такое *среднее число*, приведем такой пример: представьте себе, что вас ввели в помещение, где находится 1000 человек, и предложили с каждым из них поздороваться за руку. Правда, рука ваша после таких упражнений будет чувствовать себя неважно, но практически (по времени) проделать такое упражнение вполне возможно — не сбившись, подойти к каждому из тысячи и протянуть ему руку. А если бы последовало предложение всей тысяче присутствующих обменяться друг с другом рукопожатиями, да еще каждой компании из трех человек внутри своего кружка дополнительно обменяться рукопожатиями и т. д., то это оказалось бы невыполнимым. Число 1000 и есть среднее. Можно сказать, что мы, как предлагается в определении, *перебрали* тысячу элементов, отметив при этом каждого (рукопожатием).

Совсем простым примером *большого числа* является число видимых звезд на небосклоне. Каждый знает, что невозможно пересчитать звезды пальцем, а тем не менее существует каталог звездного неба (т. е. выработана система обозначений), пользуясь которым мы в любой момент можем получить сведения об интересующей нас звезде.

Естественно, что *вычислительная машина* может, во-первых, *дольше*, чем человек, работать не сбываясь, а во-вторых, она составляет различные схемы во много раз *быстрее*. Поэтому в каждой категории соответствующие числа для машины будут больше, чем для человека.

Числа	Человек	Машина
Малые	3	10
Средние	1000	10^{10}
Большие	10^{100}	$10^{10^{10}}$

Из этой таблицы следуют два существенных вывода:

- хотя соответственные числа (внутри одной категории) для машины гораздо больше, чем для человека, но остаются на том же уровне;
- между же числами разных категорий существует непроходимая грань: числа, средние для человека, не становятся малыми для машины, так же, как числа, большие для человека, не становятся средними для машины (10^3 несравненно больше, чем 10, а 10^{100} безнадежно больше, чем 10^{10}).

Заметим, что объем памяти живого существа (и даже машины) характеризуется *средними* числами, а многие проблемы, решаемые путем так называемого простого перебора, — *большими*. Таким образом, мы сразу выходим за пределы возможностей сравнения путем простого перебора.

Проблемы, которые не могут быть решены без *большого перебора*, останутся за пределами возможностей машины на сколь угодно высокой ступени развития техники и культуры. К этому выводу мы пришли, не обращаясь к понятию *бесконечности*. Оно нам не понадобилось и вряд ли понадобится при решении реальных проблем, возникающих на пути кибернетического анализа жизни.

Зато важным становится другой вопрос: **существуют ли проблемы, которые ставятся и решаются без необходимости *большого перебора*?** Такие проблемы должны прежде всего интересовать кибернетиков, ибо они реально разрешимы. **Принципиальная возможность создания полноценных живых существ, построенных полностью на дискретных (цифровых) механизмах переработки информации и управления, не противоречит принципам материалистической диалектики.** Противоположное мнение может возникнуть лишь потому, что некоторые привыкли видеть диалектику лишь там, где появляется бесконечность. **При анализе явлений жизни существенна, однако, не диалектика *бесконечного*, а диалектика *большого числа*.**

В настоящее время для кибернетики, пожалуй, больше, чем для всякой другой науки, важно, *что о ней пишут*. Свое отношение к кибернетической литературе А. Н. Колмогоров определил так: *«Я не принадлежу к большим энтузиастам всей той кибернетической литературы, которая сейчас так широко издается, и вижу в ней большое количество, с одной стороны, преувеличений, а с другой — упрощенчества».*

Нельзя, конечно, сказать, что в этой литературе утверждается то, что на самом деле недостижимо, но в ней часто встречаются восторженные статьи, сами заглавия которых уже кричат об успехах в моделировании различных сложных видов человеческой деятельности, которые в действительности моделируются пока совсем плохо.

Например, в американской литературе по кибернетике (и у нас, порой даже в совсем серьезных научных журналах) можно встретить работы о так называемом *машинном сочинении музыки*. Под этим обычно (это не относится к работам Р. Х. Зарипова) подразумевается следующее: в память машины «закладывается» нотная запись значительного числа (скажем, 70) ковбойских песен или, например, церковных гимнов. Затем машина по первым четырем нотам одной из этих песен отыскивает все другие песни, где эти четыре ноты встречаются в том же порядке и, случайным образом выбрав одну из этих песен, берет из нее следующую, пятую ноту. Теперь перед машиной вновь четыре ноты (2-я, 3-я, 4-я и 5-я), и она снова таким же способом осуществляет поиски и выбор. Так машина, как бы на ощупь, «создает» некую новую мелодию. При этом утверждается, что если в памяти машины были ковбойские песни, то и в ее творении слышится нечто «вольнотлюбивое», а если это были церковные гимны, — то нечто «божественное».

Спрашивается, а что произойдет, если машина будет производить поиск не по четырем, а по семи идущим подряд нотам? Поскольку в действитель-

ности двух произведений, содержащих семь одинаковых нот подряд, почти не встретишь, то, очевидно, «запев» семь нот из какой-нибудь песни, машина вынуждена будет ее и пропеть до конца. Если же, наоборот, машине для ее творчества задать только две ноты (а произведений с двумя одинаковыми нотами сколько угодно), то здесь ей представился бы такой широкий выбор, что вместо мелодии возникла бы какофония звуков.

Вот эта несложная схема преподносится в литературе как «машинное сочинение музыки», причем всерьез заявляется, что с увеличением числа нот, нужных «для запева», машина начинает создавать музыку более серьезного, классического характера, а с уменьшением этого числа переходит на современную, джазовую.

На сегодня мы еще очень далеки от осуществления **анализа и описания** высших форм человеческой деятельности. Мы даже еще не научились в объективных терминах *давать определения* многих требующихся здесь категорий и понятий, не говоря уж о том, чтобы *моделировать* такие сложные виды этой деятельности, к каким относится создание музыки. Если мы не умеем понять, чем отличаются живые существа, *нуждающиеся* в музыке, от существ, в ней *не нуждающихся*, то, приступая сразу к машинному сочинению музыки, мы окажемся в состоянии моделировать лишь *чисто внешние факторы*.

«Машинное сочинение музыки» — это только пример *упрощенного* подхода к проблемам кибернетики. Другой распространенный недостаток заключается в том, что сторонники кибернетики настолько увлеклись возможностями кибернетического подхода к решению любых самых сложных задач, что позволяют себе *пренебрегать опытом*, накопленным другими науками за долгие века их существования. Часто забывают о том, что анализ высших форм человеческой деятельности был начат давно и продвинулся довольно далеко. И хотя он и ведется в других, не кибернетических, терминах, но по существу объективен, и его необходимо серьезно изучать и использовать. А то, что сумели сделать кибернетики «голыми руками» и вокруг чего поднимают такую шумиху, зачастую не выходит за рамки исследования самых примитивных явлений.

Однажды на вечере в московском Доме литераторов один из присутствующих вел с трибуны разговор о том, что наше время должно было создать и уже создало (!) новую медицину. Эта новая медицина есть достоинство и предмет изучения не медиков, а специалистов по теории автоматического регулирования! Самое главное в медицине, по мнению выступавшего, — это циклические процессы, происходящие в человеческом организме. А такие процессы как раз описываются дифференциальными уравнениями, изучаемыми в теории автоматического регулирования. Так что изучать медицину в медицинских институтах теперь вроде как устарело — ее надо передать в ведение вузов и математических факультетов. Может быть, и верно, что специалисты по теории автоматического регулирования могут сказать свое слово в разрешении отдельных проблем, стоящих перед медициной.

Но если всерьез они захотят принять участие в этой работе, то прежде всего им потребуется колоссальная доквалификация, ибо опыт, накопленный медициной, этой старейшей из наук, огромен, и для того чтобы сделать в ней что-то серьезное, надо сначала овладеть этим опытом.

Вообще, анализ высшей нервной деятельности в кибернетике сосредоточен пока на двух крайних полюсах.

С одной стороны, кибернетики активно занимаются изучением условных рефлексов, т. е. простейшего типа высшей нервной деятельности. (Всем, вероятно, известно, что такое условный рефлекс. Если два каких-нибудь раздражителя многократно воспроизводятся одновременно друг с другом (например, одновременно с подачей пищи включается звонок), то через некоторое время уже один из этих раздражителей (звонок) вызывает ответную реакцию организма (слюноотделение) на другой раздражитель (подачу пищи). Это сцепление является временным и, если его не подкреплять, постепенно исчезает.) Значительная часть кибернетических проблем, которые известны сейчас под названием *математической теории обучения*, охватывает такие очень простые схемы, которые не исчерпывают и малой доли всей сложной высшей нервной деятельности человека, да и в анализе самой условно-рефлекторной деятельности представляют собой лишь начальную ступень.

Другой полюс — это теория формально-логических решений. Эта сторона высшей нервной деятельности человека хорошо поддается изучению математическими методами, и с созданием вычислительной техники и вычислительной математики исследования такого рода быстро двинулись вперед. И здесь кибернетики во многом преуспели.

А все огромное пространство *между этими двумя полюсами* — самыми примитивными и самыми сложными видами психической деятельности (даже простые формы синтетической деятельности, такие, как, скажем, механизм точно рассчитанного геометрического движения, о котором говорилось выше, пока плохо поддаются кибернетическому анализу) — изучается крайне мало, чтобы не сказать: вовсе не изучается!

Особое положение сейчас занимает математическая лингвистика. Эта наука только еще создается и развивается по мере накопления кибернетических проблем, связанных с языком. Она имеет дело с анализом высших форм человеческой деятельности скорее интуитивного, нежели формально-логического характера, и эта интуитивная деятельность плохо поддается точному описанию. Каждый знает, что такое грамотно построенная фраза, правильное согласование слов и т. п., но пока не удастся адекватно передать это знание машине. Точный, логически и грамматически безукоризненный машинный перевод сейчас возможен был бы, пожалуй, только с латинского и на латинский язык, грамматические правила которого достаточно полны и однозначны. Грамматические же правила новых, живых языков, по-видимому, еще недостаточны для осуществления с их помощью машинного перевода. Необходимым здесь анализом занимаются уже давно, и в настоящее время машинный перевод стал предметом широко и серьезно поставленной

деятельности. Можно, пожалуй, сказать, что именно на нем сосредоточено сейчас основное внимание математических лингвистов.

Однако в теоретических работах по математической лингвистике мало учитывается тот факт, что *язык возник значительно раньше формально-логического мышления*. Быть может, для теоретической науки одним из самых интересных исследований (в котором могут естественно сочетаться идеи кибернетики, новый математический аппарат и современная логика) было бы исследование процесса образования *слов как второй сигнальной системы*. Первоначально, при полном еще отсутствии понятий, слова выступают в роли сигналов, вызывающих определенную реакцию. Возникновение науки логики обычно относят к сравнительно недавнему времени: по-видимому, только в Древней Греции было ясно понято и сформулировано, что слова не просто являются обозначениями неких непосредственных представлений и образов, но что от слова можно отделить *понятие*. До настоящего, формально-логического, мышления мысли возникали не формализованные в понятия, а как *комбинирование* слов, которые ведут за собой другие слова, как попытки непосредственно зафиксировать проходящий перед нашим сознанием поток образов и т. д. Проследить этот механизм выкристаллизовывания слов как сигналов, несущих в себе комплекс образов, и создания на этой базе ранней логики — крайне благодарная область исследования (для математика, в частности), что, впрочем, неоднократно отмечалось в кибернетической литературе.

Интересным может показаться и следующий вопрос: исследовать, как формируется логическая мысль у человека. Попробуем проследить этапы этого процесса на примере работы математика над какой-нибудь проблемой. Сначала, по-видимому, возникает *желание* исследовать тот или иной вопрос. Затем какое-то приблизительное, неведомо откуда возникшее *представление* о том, что мы надеемся получить в результате наших поисков и какими путями нам, может быть, удастся этого достичь. И только на следующем этапе мы пускаем в ход свой внутренний «арифмометр» *формально-логического рассуждения*. Таков, по-видимому, путь формирования логической мысли, схема процесса творчества.

Может, вероятно, представиться интересным не только *исследовать* первую, интуитивную, стадию этого процесса, но и задаться целью *создать машину, способную помочь человеку в процессе творчества на стадии оформления мысли* (математику, например, на стадии вычислений): поручить, скажем, такой машине понимать и фиксировать в полном виде какие-то неясные, вспомогательные наброски чертежей и формул, которые всякий математик рисует на бумаге в процессе творческих поисков. Или, например, по наброскам воссоздавать изображения фигур в многомерных пространствах и т. п. Иными словами, интересно подумать о создании машин, которые, не подменяя человека, уже сейчас помогали бы ему в сложных процессах творчества. Пока еще трудно даже представить себе, каким образом и на каких путях такую машину можно было бы осуществить.

Но хотя пока еще эта задача и далека от своего разрешения, разговор обо всех таких вопросах уже возник в кибернетической литературе, и это, по-видимому, можно только приветствовать.

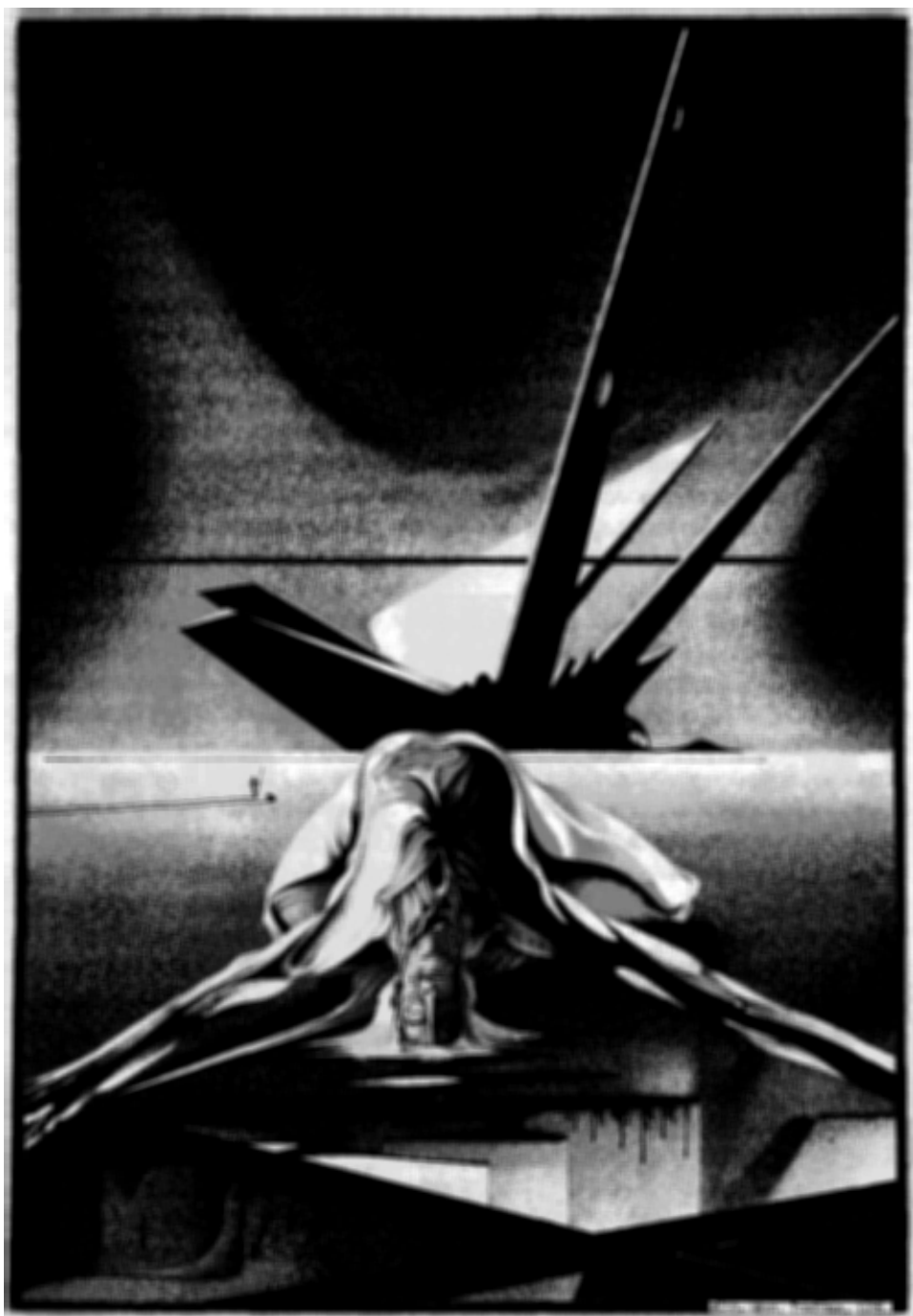
Как можно уже увидеть из нескольких приведенных здесь примеров, различных проблем, связанных с пониманием объективного устройства самых тонких разделов высшей нервной деятельности человека, очень много. И все они заслуживают должного внимания кибернетиков.

В заключение следует остановиться на вопросах, касающихся *этической* стороны идей кибернетики. Встречающиеся часто отрицание и неприятие этих идей проистекают из нежелания признать, что человек является *действительно сложной* материальной системой, но системой конечной сложности и весьма ограниченного совершенства и потому *доступной имитации*. Это обстоятельство многим кажется унижительным и страшным. Даже воспринимая эту идею, люди не хотят мириться с ней: такая картина всеобъемлющего проникновения в тайны человека, вплоть до возможности даже «закодировать» его и «передать по телеграфу» в другое место, кажется им отталкивающей и пугающей.

Встречаются опасения и другого рода: а допускает ли вообще наше внутреннее устройство *исчерпывающее объективное описание*? Выше, например, предлагалось поставить перед кибернетикой задачу научиться отличать *по объективным признакам* существа, нуждающиеся в сюжетной музыке, от существ, в ней не нуждающихся. А вдруг проанализируем, проанализируем — и окажется, что и в самом деле никакого разумного основания выделять такую музыку как благородную по сравнению с другими сочетаниями звуков нет?

— *«Мне представляется важным, — сказал А. Н. Колмогоров, — понимание того, что нет ничего унижительного и страшного в стремлении постичь себя до конца. Такие настроения могут возникать лишь из полужнания: реальное понимание всей грандиозности наших возможностей, ощущение присутствия вековой человеческой культуры, которая придет нам на помощь, должно производить огромное впечатление, должно вызывать восхищение!»*

Наше собственное внутреннее устройство, в принципе, может быть понято, но понятно и то, что это устройство содержит в себе колоссальные, ничем не ограниченные возможности. На самом деле, нужно стремиться этот глупый и бессмысленный страх перед имитирующими нас автоматами заменить огромным удовлетворением тем фактом, что такие сложные и прекрасные вещи могут быть созданы человеком, который еще совсем недавно чем-то непонятным и возвышенным находил простую арифметику».



Фоменко А. Т.
Геометрическая фантазия

О догмате натурального ряда¹⁾

П. К. Рашевский²⁾

Целые числа создал господь Бог,
остальное — дело рук человеческих.

Л. Кронекер

Конечно, никто в настоящее время не воспринимает слова Л. Кронекера в буквальном смысле, да вряд ли понимал их буквально и он сам. Но если прочесть их в надлежащей транскрипции, то они, пожалуй, выражают в некотором смысле господствующее умонастроение математиков до нашего времени включительно.

Этим я хочу сказать, что натуральный ряд и сейчас является единственной математической идеализацией процессов реального счета¹⁾. Это монопольное положение осеняет его ореолом некой истины в последней инстанции, абсолютной, единственно возможной, обращение к которой неизбежно во всех случаях, когда математик работает с пересчетом своих объектов. Более того, так как физик использует лишь тот аппарат, который предлагает ему математика, то абсолютная власть натурального ряда распространяется и на физику и — через посредство числовой прямой — предопределяет в значительной степени возможности физических теорий.

Быть может, положение с натуральным рядом в настоящее время имеет смысл сравнить с положением евклидовой геометрии в XVIII в., когда она была единственной геометрической теорией, а потому считалась некой абсолютной истиной, одинаково обязательной и для математиков, и для физиков. Считалось само собой понятным, что физическое пространство должно идеально точно подчиняться евклидовой геометрии (а чему же еще?). Подобно этому мы считаем сейчас, что пересчет как угодно больших

¹⁾Статья была впервые опубликована в журнале «Успехи математических наук». Т. XXVIII. Вып. 4 (172), 1973, с. 243–246.

²⁾Петр Константинович Рашевский (1907–1985) — профессор кафедры дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. П. К. Рашевский — выдающийся математик, автор многих замечательных работ, широко известен своими фундаментальными исследованиями в области римановой геометрии и тензорного анализа, теории групп и алгебр Ли и теории их представлений.

¹⁾Я позволю себе игнорировать те «варианты» формализованной теории целого числа, возможность которых вытекает из принципиальной неполноты ее аксиоматики; достаточно того, что они не имеют значения для реально работающих отраслей математики.

материальных совокупностей, измерение как угодно больших расстояний в физическом пространстве и т. п. должны подчиняться существующим схемам натурального ряда и числовой прямой (а чему же еще?).

Разница лишь в том, что на первый вопрос в скобках дало ответ развитие науки в XIX–XX вв. (неевклидова геометрия, а позже теория относительности), а на второй, как мне кажется, ответ предстоит еще дать.

Я хорошо понимаю, что те соображения на эту тему, которые меня давно занимают, ориентировочны и бездоказательны, но все же, в порядке постановки вопроса, решаюсь их высказать.

Процесс реального счета физических предметов в достаточно простых случаях доводится до конца, приводит к однозначно определенному итогу (число присутствующих в зале, например). Именно эту ситуацию берет за основу теория натурального ряда и в идеализированном виде распространяет ее «до бесконечности». Грубо говоря, совокупности большие предполагаются в каком-то смысле столь же доступными пересчету, как и малые, и со столь же однозначным итогом, хотя бы реально этот пересчет и был неосуществим. В этом смысле наше представление о натуральном ряде похоже на зрительное восприятие панорамы, скажем, панорамы какого-либо исторического сражения. На первом плане на реальной земле расположены реальные предметы: разбитые пушки, расщепленные деревья и т. п.; затем все это незаметно переходит в раскрашенный холст с точным расчетом на обман даже очень внимательного глаза.

В рамках математической теории подобная идеализация процесса счета, разумеется, вполне законна. Но ввиду единственности теории эта точка зрения автоматически навязывается и физике; однако здесь вопрос поворачивается по другому. В самом деле, пусть мы хотим узнать, сколько молекул газа заключено в данном сосуде. Должны ли мы искать ответ в виде совершенно точно определенного целого числа? Оставим в стороне вопрос о ненужности такой «точности» для физики, не будем останавливаться и на фактической трудности задачи. Гораздо более важной для нас является ее принципиальная неосуществимость: молекулы газа взаимодействуют со стенками сосуда, испытывают различные превращения и т. п., а потому наша задача просто не имеет определенного смысла. Физик вполне удовлетворяется — в этом и в аналогичных случаях — достаточно хорошим приближенным ответом. Из этого примитивного примера можно усмотреть некоторый намек. А именно, можно думать, что математик предлагает физику не совсем то самое, что тому нужно. Духу физики более соответствовала бы математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком-то смысле «размытый вид», а не являлись строго определенными членами натурального ряда, как мы это себе представляем. Существующая теория, так сказать, переуточнена: добавление единицы меняет число — а что меняет для физика добавление одной молекулы в сосуд с газом? Если мы согласимся принять эти соображения хотя бы за отдален-

ный намек на возможность математической теории нового типа, то в ней прежде всего пришлось бы отказаться от идеи, что любой член натурального ряда получается последовательным насчитыванием единиц — идеи, которая буквально, конечно, не формулируется в существующей теории, но косвенно провоцируется принципом математической индукции. Вероятно, для «очень больших» чисел присчитывание единицы вообще не должно их менять (возражение, что, присчитывая единицы, можно «присчитать» и любое число, не котируется в силу только что сказанного выше).

Разумеется, числа этой гипотетической теории были бы объектами другой природы, чем числа натурального ряда. Можно предполагать, что почти совпадение имело бы лишь для начальных отрезков существующего и гипотетического натуральных рядов, а по мере удаления по ним различие их структуры должно возрастать; в гипотетическом натуральном ряде началось бы нечто вроде «принципиального сбивания со счета», и он (ряд), все более «размываясь», приобретал бы в каком-то смысле черты непрерывной структуры числовой прямой. Можно догадываться даже, что математическая индукция при этом приняла бы своеобразные черты — промежуточные между индукцией обычной и, например, интегрированием дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ (здесь как бы вместо перехода $n \rightarrow n + 1$ мы применяем переход $x \rightarrow x + dx$).

Быть может, имеет смысл сделать такое замечание. В современных космологических теориях само собой подразумевается, что сколь угодно большие космические протяженности должны описываться на основе существующих математических представлений о натуральном ряде и числовой прямой. Но так ли это очевидно? Вспомним, что еще в 1900-х годах физики обсуждали вопрос о геометрической форме электрона. Считалось вполне осмысленным предположение, что электрон по своей геометрии не отличается от бильярдного шарика лишь очень малого размера. Другими словами, считалось, что наши геометрические представления полностью применимы к объектам микромира; только последующее появление и развитие квантовой механики показало абсурдность этой «очевидной» точки зрения.

Не следует ли ожидать, что в области очень больших протяженностей нас еще ждут сюрпризы, подобно встретившимся в области протяженностей очень малых (но, конечно, сюрпризы совсем другого стиля). И не исключено, что описание ситуации потребует существенно иных конструкций в самом математическом фундаменте, т. е. в наших представлениях об очень больших числах.

Впрочем, возможно, что нам даже не придется углубляться в космос для проверки того, насколько очень большие материальные совокупности на самом деле подчиняются счету на основе теории натурального числа. Возможно, что какое-нибудь из следующих поколений ЭВМ достигнет столь

гигантских возможностей в смысле количества производимых операций, что соответствующие эксперименты станут реальными.

Еще одно замечание в сторону. Знаменитые отрицательные результаты Гёделя 30-х годов в своем фундаменте исходят из убеждения: сколько бы ни продолжать построение метаматематических формул для данной (полностью формализованной) математической теории, принципы пересчета и упорядочения формул остаются обычными, т. е. подчиненными схеме натурального ряда. Разумеется, это убеждение даже не оговаривалось, — настолько оно считалось очевидным.

Между тем построение метаматематических формул — это реальный физический процесс, производимый человеком или, как стало возможно в последнее время, машиной.

Если мы откажемся от догмата, что натуральный ряд идеально приспособлен для описания любых сколь угодно больших материальных совокупностей, то становятся сомнительными и результаты Гёделя; точнее, их придется рассматривать, возможно, как утверждения, относящиеся не к реальному развитию данной формализованной математической теории, а к условному, идеализированному ее развитию, когда при пересчете формул, сколь много бы их ни было, и при описании их структуры, сколь громоздка ни была бы она, мы считаем законным применять схему натурального ряда. На это дополнительное условие, в сущности, и опирается тонкая игра Гёделя с двойным, математическим и метаматематическим, толкованием некоторых сконструированных им соотношений. Не успокаивает и финитность конструкций Гёделя: при полной расшифровке сокращений (что в данном контексте является принципиальным) его конструкции становятся чрезвычайно сложными, явно не выписываются, и сомнения, высказанные раньше насчет поведения «очень больших» совокупностей, напрашиваются и здесь.

Наша гипотетическая реформа числового ряда должна, конечно, сопровождаться соответствующей реформой и числовой прямой; как уже упоминалось, реформированный натуральный ряд в своих удаленных областях как бы станет походить на (реформированную) числовую прямую. И эта «реформированная» числовая прямая должна отличаться от обычной тоже некоторой размытостью своих элементов: сколь угодно точные рациональные приближения вещественных чисел возможны именно потому, что мы пользуемся обычным натуральным рядом, элементы которого определены абсолютно точно, сколь далеко мы ни зашли бы. Но если при удалении по натуральному ряду возникает возрастающая размытость его элементов, она передается и дробям с большими знаменателями, и мы доходим до оптимальной возможной точности в оценке (реформированных) вещественных чисел, может быть, раньше, чем знаменатель успеет «устремитесь к бесконечности».

Если здесь снова вспомнить о физике, то нам придется как бы повторить сказанное ранее, но под другим углом зрения. Вещественное число имеет в физике смысл результата измерения. Разумеется, любое измерение производится лишь с какой-то степенью точности, и та «идеальная точность», которую предлагает математика в понятии вещественного числа, физику не требуется. Однако до сих пор не существует иного способа создания физических теорий с математическим аппаратом. Что это: неизбежное, роковое обстоятельство или «просто» результат несуществования математической теории, о которой здесь идет речь и в которой идея «приближенности» будет заложена органически; в которой «точное» будет в то же время означать в каком-то смысле «оптимально приближенное».

Если бы такая теория стала реальностью, то можно было бы думать о новой трактовке дуализма волна частица в квантовой механике и даже мечтать об автоматическом исчезновении расходимостей релятивистской квантовой механики, после того как точки пространства-времени утратят свою резкую определенность и приобретут чуть-чуть размытый вид.

Не следует ожидать, что наша гипотетическая теория, если ей когда-нибудь суждено появиться на свет, будет единственной; наоборот, она должна будет зависеть от каких-то «параметров» (по своей роли отдаленно напоминающих радиус пространства Лобачевского, когда мы отказываемся от евклидовой геометрии в пользу геометрии неевклидовой). Можно ожидать, что в предельном случае гипотетическая теория должна будет совпадать с существующей.

Построение подобной теории (если вообще верить в его возможность) будет очень трудным, но не совсем в том смысле, как бывают трудны математические проблемы типа: доказать или опровергнуть данное утверждение. Видимо, сама ее логическая структура должна сильно отклоняться от общепринятых схем. Для примера: в обычной математической теории считается, что любой объект, участвуя в конструкции другого объекта, сам от этого не меняется, и тем более, не исчезает. Так, сопоставляя числам a, b их сумму $a+b$, мы в то же время сохраняем в своем распоряжении и прежние числа. Заметим, что этот принцип, общепринятый в математике, несколько парадоксален с точки зрения материальных прообразов математических операций. Так, «сложив» два мешка зерна путем ссыпания их в третий мешок, мы получим «сумму», но безвозвратно теряем «слагаемые». Восстановить же их мы можем лишь приближенно. Возможно, и в нашей гипотетической теории придется принять, что участие объекта в конструировании другого объекта некоторым образом влияет на первый объект, вызывая в нем какие-то изменения. Это не нужно, конечно, понимать как определенное предложение; я хочу лишь пояснить, какого рода могло бы быть серьезное отклонение логической структуры от обычной.

Возможен и другой вариант сказанного. Обычную точку зрения можно трактовать так: любой объект существует в неограниченном количестве

абсолютно одинаковых копий, и когда одна из них «истрачена» на конструкцию другого объекта, остается сколько угодно других. Возможно, в нашей гипотетической теории придется отказаться от абсолютной одинаковости «копий» и принять, что они «изготавливаются» в пределах некоторых «допусков». Кстати, это хорошо соответствует идее «размытости» объектов теории, о чем говорилось ранее.

Заканчивая эту заметку, я понимаю, конечно, что ничего не доказал, да и не пытался что-либо доказать. Я хотел только привлечь внимание к проблематике, которую смог обрисовать — это также нужно признать — лишь весьма туманно. Но обрисовать ее более ясно — это уже означало бы продвинуться и в ее решении.

Мне неизвестны какие-либо печатные материалы по затронутой теме, но в устной передаче я слышал, что о ней думали; по-видимому, в чем-то родственные соображения относительно натурального ряда высказывал в свое время Н. Н. Лузин.

Комментарий редактора

П. К. Рашевский поставил ряд вопросов и высказал гипотезы относительно обобщений координатного пространства, построенного на основе иной аксиоматики арифметики, а в работах В. Л. Рвачева¹⁾ было показано, что *изменения в представлениях о свойствах натурального ряда уже воплощены в физике в виде закономерностей специальной теории относительности*. Основные результаты его работ касаются не координатного пространства, а пространства скоростей (или импульсного пространства).

Как известно, в множестве вещественных чисел определены две групповые операции: сложения (и обратной — вычитания) и умножения (и обратной — деления). При обычном понимании этих операций их многократное применение приводит к появлению неограниченно больших чисел. Оказывается, можно так изменить определения групповых операций, что в принципе не смогут появиться числа, большие некоторого предельного числа c .

В. Л. Рвачев разработал арифметику с такими свойствами. При этом пришлось переопределить операции сложения и умножения. Новая операция сложения $\oplus$ (вычитания $\ominus$) двух чисел x и y определяется через привычные операции сложения и умножения следующим образом

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + \alpha^2 xy} \rightarrow x \ominus y = \frac{x - y}{1 - \alpha^2 xy},$$

где $\alpha = 1/c$. В этой операции сразу же можно усмотреть проявление релятивистского закона сложения скоростей. По этой причине введенная

¹⁾Рвачев В. Л. Релятивистский взгляд на развитие конструктивных средств математики. — Харьков: Препринт Института проблем машиностроения АН УССР, 1990.

операция была названа *релятивистским сложением (вычитанием)*. Она удовлетворяет всем привычным групповым свойствам.

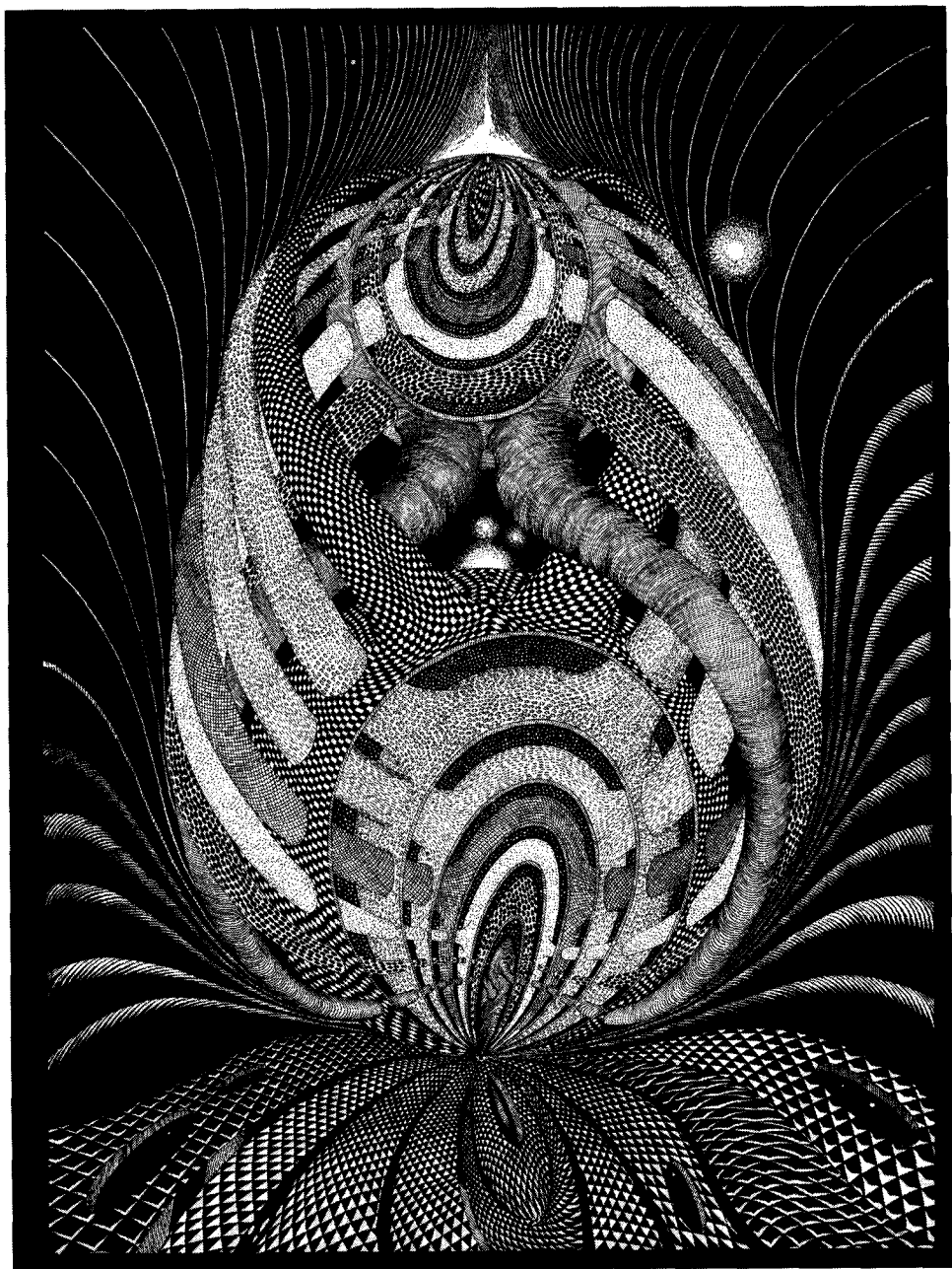
В специальной теории относительности фактически ограничиваются одной операцией релятивистского сложения, тогда как в новой арифметике определена и вторая операция — *релятивистское умножение (деление)*, — которая является коммутативной, обладает свойством ассоциативности, для нее определена обратная операция и имеется единица с обычными свойствами.

В рамках релятивистской арифметики были определены известные функции: степенная, экспоненты, логарифмы, тригонометрические и другие. Более того, в теории, опирающейся на релятивистскую арифметику, вводятся специфические *релятивистские производные и интегралы*, обладающие свойствами соответствующих операций в общепринятом математическом анализе.

Отметим, что в современной физике пока не нашла применение в полном объеме развитая Рвачевым релятивистская арифметика. Возможно, это будет сделано в будущем. Для физики (точнее, для метафизики) важное значение имеет сам факт существования релятивистской арифметики. «Классическому случаю, — отмечает В. Л. Рвачев, — соответствует значение $\alpha = 0$, и только в этом случае возникает в математике бесконечность. Выходит, что появлению этой (потенциальной) бесконечности математика обязана именно «рукам человеческим» или точнее — пальцам, с помощью которых люди научились считать. В принципе же, как это следует из приведенных результатов, для построения математики (впрочем, мы вправе говорить только о прикладной математике) допустимы, как мы видим, и другие пути, без бесконечности с порождаемыми ею парадоксами и различного рода монстрами. Прав был П. К. Рашевский, когда выступал против догматического взгляда на натуральный ряд. Что же касается ответа на вопрос, к каким последствиям для физических теорий может привести разрушение «монопольного положения натурального ряда», то его должны дать физики.

В последних работах В. Л. Рвачева была предпринята попытка применить новую арифметику к координатному пространству и на этой основе дать иную интерпретацию известных наблюдений по космологическому красному смещению в спектрах излучения от далеких астрофизических объектов.

Ю. С. Владимиров



Фоменко А. Т.
Деформация римановой поверхности алгебраической функции

Математика и физика: родитель и дитя или сестры?¹⁾

В. И. Арнольд²⁾

Я любил и теперь еще люблю математику ради нее самой, как не допускающую лицемерия и неясности, которые мне отвратительны.

Стендаль

Введение

Заявление, что математика — это часть теоретической физики, где эксперименты дешевы [1], немедленно вызвало множество нападок с обеих сторон, включая даже пародию (написанную А. М. Вершиком).

Начну с терминологии. Слово «математика» почти для всех языков чужое — это заимствованное древнегреческое слово, означавшее «точное знание». Из современных стран, кажется, лишь одна Голландия заменяет чужеродное слово «математика» родным «знание» (*vis-cunde*). Видимо, произошло это благодаря Стэвину, вообще протестовавшему против засорения родного языка интернациональными терминами. Треугольник понятнее ромба для каждого, говорящего по-русски. Заставляя детей мучиться с иноязычными «файлами» или «байтами», мы автоматически создаем среду баксов и киллеров, за чем следуют предпосылки технологической отсталости, за которую, возможно, придется платить судьбой Югославии.

Поразительные успехи Стэвина в создании в Нидерландах науки и культуры сказываются до сих пор — страна эта резко выделяется, хоть и не велика. Не только Амстердам, так полюбившийся Петру, но

¹⁾Статья впервые опубликована в журнале «Успехи физических наук», Т. 169, № 12, 1999, с. 1311–1323. Она частично воспроизводит доклады, прочитанные в 1998 г. на заседаниях Французского математического общества, семинаре ИТЭФ РАН и семинаре В. Л. Гинзбурга в ФИАНе.

²⁾Владимир Игоревич Арнольд (1937–2010) — выдающийся советский и российский математик. Доктор физико-математических наук (1963), академик РАН (1990). Иностранный член Национальной академии наук США, Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Национальной академии Линчеи, почетный член Лондонского математического общества, иностранный член Американского философского общества, а также Американской академии искусств и наук. Почетный доктор университетов Пьера и Мари Кюри (Париж), Варвика (Ковентри), Утрехта, Болоньи, Торонто, Комплютенсе (Мадрид). Лауреат многих международных премий. Президент Московского математического общества (с 1996 г.). Автор работ в области топологий, теории дифференциальных уравнений, теории особенностей гладких отображений и теоретической механики.

и Утрехт, и Лейден, и Саардам, и Гронинген — крупнейшие математические центры.

Первоначально математика создавалась ради реальных практических задач (в случае Голландии — прежде всего гидравлических и гидротехнических; планировалось даже залить всю страну водой в случае нашествия фашистов, но техника, кажется, подвела).

Я постараюсь описать побольше приложений самой фундаментальной математики, не ограничиваясь техническими подробностями. На первый взгляд, математика кажется набором ремесел. Но я постараюсь показать, что здесь всегда идет речь об одном и том же искусстве — искусстве математического описания мира.

§ 1. Объединяющая сила математики

(В этом разделе обсуждены математические аспекты следующих понятий: Волновой фронт. Каустика. Группы отражений. Осциллирующие интегралы. Особенности каустик. Каустики и группы отражений. Перестройки распространяющихся волн. Версальные деформации. Числа Кокстера. Коныусы Спрингера и числа Бернулли. Эта часть статьи опущена. — *Прим. ред.*)

§ 2. Граница между математикой и физикой

Вопрос о соотношениях этих двух наук много обсуждался. Гильберт, например, явно заявил, что геометрия — это часть физики, поскольку нет никакой разницы между тем, как получает свои достижения геометр и как физик.

Я боюсь, правда, что Гильберт просто не считал геометрию частью математики — ведь он утверждал, что для математики все равно, будут ли ее «точки» пивными кружками, а прямые — «скамьями». Это не вполне бессмысленно, например, в геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре) прямыми считаются окружности, и это полезно.

К сожалению, его последователи, вроде Бурбаки, внедрили эти «безобидные» идеи в преподавание школьной математики, заменив содержательную науку об устройстве мира жонглированием логическими символами. Ненависть к математике распространяется во всем мире, мы даже отстаем.

Недавно один из таких последователей прислал мне письмо, где, критикуя мое утверждение, что математика часть физики, настаивает на том, что никакого сходства между этими науками нет. Интересно, впрочем, что этот же выдающийся бурбакист отказался принять участие в написании обзорной книги о математике к 2000 году, мотивируя это тем, что «совместные

математические предприятия всегда заканчиваются неудачей». Я не знаю, действительно ли бурбакистское предприятие закончено.

Перечислять все замечательные высказывания (Паскаля, Декарта, Ньютона, Гюйгенса, Лейбница) по этому поводу было бы слишком долго, но я не могу удержаться от ссылки на Дирака, заявившего, что физику никогда не следует опираться на физическую интуицию, которая чаще всего — имя для предвзятых суждений. По его мнению, правильный путь состоит в том, чтобы взять математическую теорию и последовательно развивать ее, рассматривая одновременно приложения к возможно более важным моделям.

Например, правильная электромагнитная теория получается из уравнений Максвелла, а не из уточнений пород кошек и сортов янтаря. Вопрос о цвете меридиана — злоупотребление «интуицией» предвзятых мнений.

Я надеюсь, что выше показано, к каким результатам приводит следование этому совету Дирака. Пример недопустимого влияния предвзятых идей там, где следовало бы продумать содержательную математическую теорию, дает обсуждение Декартом барометрических идей Паскаля. Паскаль исходил из опыта Торричелли с ртутным столбом и построил соответствующий прибор с заменой итальянской ртути водой и французским вином (это трудно, так как нужна очень прочная бочка, выдерживающая давление десятиметрового столба вина или воды). Но Паскаль сумел все сделать — сначала на башне св. Якова в центре Парижа, а позже и на горе Пюи де Дом в Оверни — и построил первые водяные барометры (с пустотой над столбом воды). Он пришел к Декарту — крупнейшему ученому (Паскаль был еще совсем молодым) и рассказал ему о своей теории — законе Паскаля и т. д. Декарт, предтеча Бурбаки, изгнавший чертежи из геометрии, счел все это пустой теорией и написал Гюйгенсу: «Лично я все же нигде в природе пустоты не вижу, разве, быть может, в голове у Паскаля». Через несколько месяцев он уже утверждал, что сам всему научил Паскаля. Для Декарта аксиома «природа не терпит пустоты» была дороже теории Паскаля (позже он был недоволен и дальнодействием Ньютона, считая, что планетами движут эфирные вихри).

Кроме пустоты в голове у Паскаля, Декарт открыл много замечательного, например, в теории каустик ему принадлежит объяснение радуги и вывод ее раствора (43°) из показателя преломления воды.

Последние годы во всем мире наблюдается общая тенденция наступления на науку и образование со стороны бюрократов и менеджеров. Математика и физика первыми попадают под удар. Упомяну, например, недавние «калифорнийские войны»: штат Калифорния под руководством Г. Сиборга принял новые школьные требования, вызвавшие федеральное неодобрение как противоречащие общеамериканским. Сенат возражал.

Вот два примера: новая программа предусматривала сложение простых дробей для десятилетних школьников в курсе математики и учение о трех фазовых состояниях воды в курсе физики. В федеральной программе вода имеет лишь два фазовых состояния (превращающихся друг в друга в холодильнике), пар же считается недоступным незлитарным школьникам как понятие чересчур абстрактное. Тестирование школьных учителей показало, что они, как правило, не владеют и простыми дробями, и даже деление 111 на 3 требует компьютера. Попытки изгнания математики (в особенности доказательств) предпринимаются и нашими просветителями («гуманизация»).

Подчеркну, что доказательства всегда играли в математике совершенно подчиненную роль, примерно такую, как орфография или даже каллиграфия в поэзии. Математика, как и физика, — экспериментальная наука, и сознательное сложение простых дробей $1/2$ и $1/3$ — стандартный элемент общечеловеческой культуры. Попытки отучить людей думать и остановить всяческий прогресс — естественное, но опасное последствие всемирной бюрократизации и борьбы с культурой.

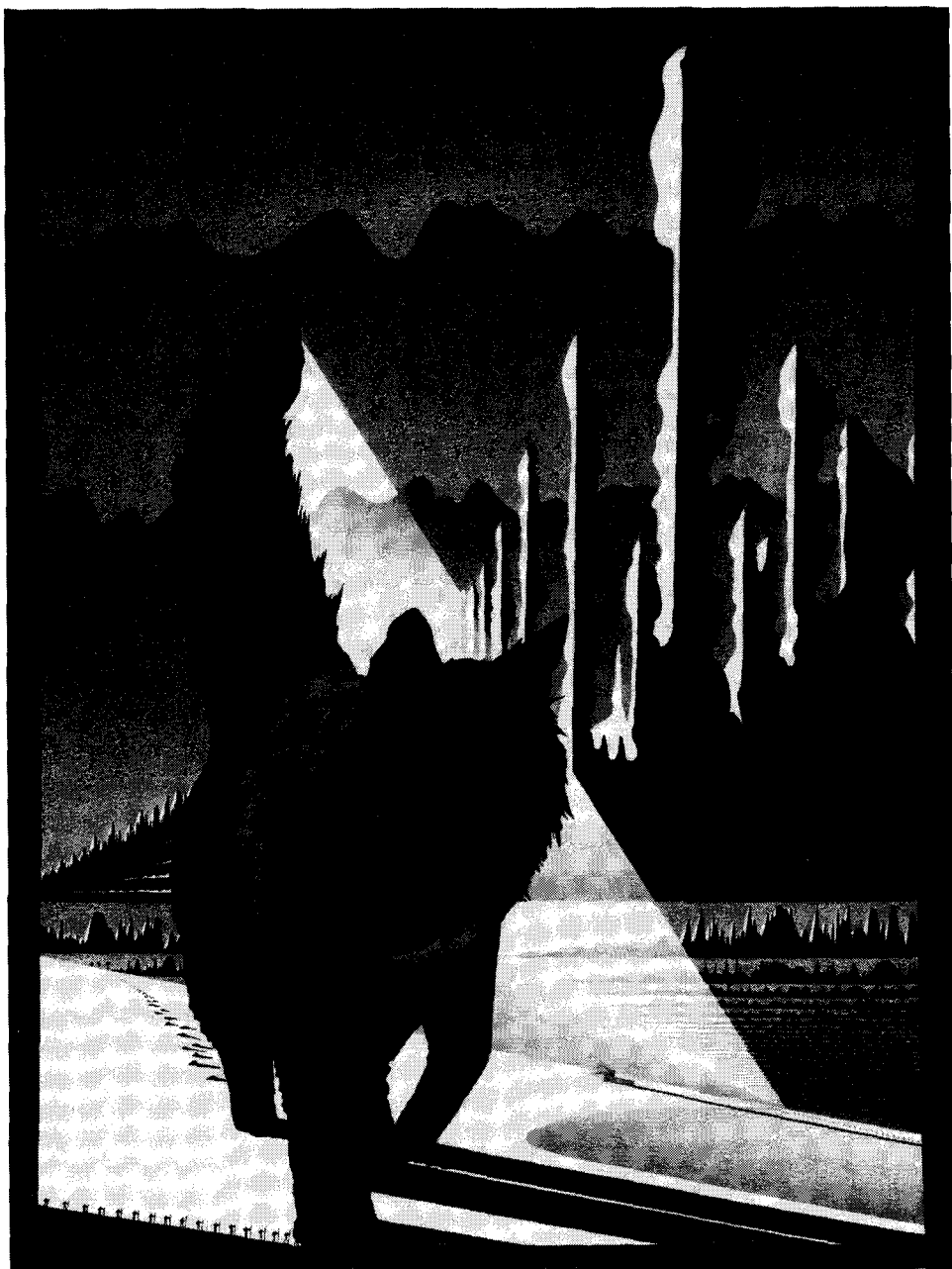
Римляне пытались оставить от греческой науки только «практически полезную» часть, и результатом явилось мрачное мракобесие средневековья.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-01109) и Institut Universitaire de France.

Литература

1. Арнольд В. И. «О преподавании математики» // *Успехи математических наук*. 53 (1) 229 (1998).
2. Whitney H. «Singularities of mappings of Euclidean spaces I. Mappings of the plane into the plane». *Ann. Math.* 62. 374. 1955.
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. *Особенности дифференцируемых отображений*. Т. I, II М.: Наука, 1982, 1984.
4. Арнольд В. И. *Теория катастроф*. 3-е изд. М.: Наука, 1990.
5. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1, 3–6, 39. М.: ВИНТИ, 1985–1989.
6. Арнольд В. И. *Особенности каустик и волновых фронтов*. М.: Фазис, 1998.
7. Арнольд В. И. «Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий» // *Функциональный анализ и его приложения*. 6 (3) 61. 1972.
8. Арнольд В. И. «Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и особые проекции гладких поверхностей» // *Успехи математических наук*. 34 (2) 3. 1979.

9. Арнольд В. И. «Топологическая теорема Максвелла о мульти-польном представлении сферических функций» // *Успехи математических наук*. 51 (6) 227. 1996.
10. Arnold V. I. «Wave front evolution and equivariant Morse lemma». *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (6) 537. 1976.
11. Арнольд В. И. «Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера» // *Успехи математических наук*. 47 (1) 3. 1992.
12. Арнольд В. И. «Критические точки функций и классификация каустик». *Успехи математических наук*. 29 (3) 243. 1974.
13. Looijenga E. «The complement of the bifurcation variety of a simple singularity». *Invent. Math.* 23 (2) 105. 1974.



Фоменко А. Т.
Сон прокуратора

Метафизика и математика двойственности

С. А. Вékшенов¹⁾

Хочу закрыть глаза и оказаться там,
Где ты мне говоришь о множествах и чис-
лах, . . . которым нет числа. . .

В. В.

Предисловие

Двойственность — фундаментальная особенность окружающего мира. Пространство и время, правое и левое, количество и порядок, частица и волна — подобные двойственные сущности можно множить и множить.

Идея двойственности лежит на поверхности, но, пожалуй, только квантовая теория возводит ее, хотя и не вполне осознанно, в ранг фундаментальных принципов: дуализм Л. де Бройля, принцип дополнительности Н. Бора, принцип взаимности М. Борна.

Иную тенденцию реализует теоретико-множественная математика. Она видит мир как универсум разнообразий одной сущности — множества. Этот, казалось бы, естественный взгляд, однако, очень быстро приводит к принципиальным коллизиям типа парадокса Рассела, континуум-проблемы и пр. Внимательный анализ ситуации говорит о том, что источником большинства этих коллизий является «склейка» двойственности, в данном случае, «количества» и «порядка» (пространства и времени). В результате этой склейки доминирующей становится количественная (пространственная) составляющая. Она же становится основой разнообразных формализмов, с которыми математика подступает к осмыслению реальности в самом широком ее понимании. Эти формализмы «продвигают» свойственные теории множеств взгляды и коллизии в самые тонкие и абстрактные инструменты познания. В результате структуры реальности в наших глазах приобретают отчетливый количественный, пространственный оттенок. Даже само время в этой трактовке становится формой пространства. В этом количественном мире трансформируются, становятся невидимыми, исчезают целые концепции, основанные на интуиции времени. Масштаб потерь оценить сложно, но, вероятно, часть изгнанных из математики теорий возникают в образе теорий физических. Является ли, например, квантование действия чистым феноменом реальности или его можно вывести из каких-то абстрактных

¹⁾Сергей Александрович Вékшенов (1957 г. р.) — доктор физико-математических наук, профессор, Российская академия образования.

положений? Ясно, что эти положения не следует искать в рамках теоретико-множественного мира. Но, может быть, они существуют в иной парадигме?

Одной из главных задач данной работы является идейное разъединение «количества» и «порядка», а также развитие формализма двойственности. Это позволит восстановить утраченное равновесие между названными компонентами и увидеть окружающий мир с большей «объемностью».

Существует и серьезная прагматическая сторона этой деятельности. Хотим мы того или нет, основным инструментом исследования окружающего мира становится компьютер — устройство, обладающее своей внутренней «философией». Теоретико-множественные структуры далеко не в полной мере ей соответствуют. Замена этих структур их дискретными аналогами, при традиционном понимании дискретности (строго говоря, также теоретико-множественном) существенно обедняет и усложняет всю картину. Но, может быть, двойственность позволит построить иную дискретность, более приближенную к идее времени? В данной работе мы попытаемся ответить на этот вопрос.

Работа состоит из двух параграфов.

Первый из них носит содержательный и отчасти метафизический характер. В нем обсуждаются проявления двойственности в теории множеств, формулируется постулат двойственной природы числа и общий принцип двойственности.

Второй параграф посвящен краткому описанию формального аппарата «математики двойственности». Ключевой идеей здесь является понятие порядковой бесконечности, двойственной к теоретико-множественной, количественной бесконечности. Это открывает дорогу для построения принципиально новых математических структур. Рассматривается обобщение континуума действительных чисел, в котором заложена не только «геометрия», но и «динамика».

§ 1. Метафизика двойственности

Всякая математическая деятельность осуществляется в рамках вполне определенной метафизической парадигмы (мы не употребляем термин «метаматематика», который имеет иной смысл). Деятельность современного математика прямо или косвенно связана с теорией множеств. По большей части ее используют как язык, который фиксирует возникающие в процессе этой деятельности образы. Но еще Л. Витгенштейн отметил, что границы языка очерчивают границы мира пользователя этого языка. Язык множеств — это, безусловно, большое благо. Именно благодаря этому языку математика приобрела интернациональный характер как в идейном, так и в организационном смысле. Однако, подойдя к границе этого языка, мы явно чувствуем, что за ней также существует целый мир. Сначала он только будоражит

воображение, но постепенно желание войти в этот мир становится все больше. Наконец, приходит понимание, что не войти в этот мир — значит остаться за «железным занавесом» теоретико-множественной математики, блага которой весьма оскудели. В конце концов математику интересует бытие, а не быт теоретико-множественных структур. Однако чтобы сделать решительный шаг в направлении этого Нового мира, необходимо изменить точку зрения на саму теорию множеств. Это не только язык и удобный (во многом уникальный) набор инструментов, но прежде всего *метафизическая парадигма*. Критическое осмысление этой парадигмы — обязательный этап всякого движения в новом направлении. Этому осмыслению и формулированию начал новой парадигмы посвящен данный раздел параграфа.

1.1. Теория множеств: двойственность в универсальности

Как известно, теория множеств идейно опирается на следующие положения:

- четкую различимость локализованных элементов;
- определение целого (множества) через свои элементы.

В действительности дело обстоит сложнее. Теоретико-множественный мир существенно отличается от того, что было задумано его создателями, прежде всего, Г. Кантором.

Проблемы теории множеств возникают, прежде всего, вследствие применения «диагонального метода», который позволяет указать новый элемент множества после того, как оно образовано. Добавив этот элемент к множеству, можно вновь применить диагональную конструкцию и добавить к множеству еще один новый элемент и т. д. Иными словами, имеет место «диагональный процесс», в котором реализуется принцип «от целого к части». Сам Кантор пытался «обуздать» этот процесс путем его разворачивания в шкалу мощностей, служащей продолжением в инфинитарную область натурального ряда. Эта «лестница в небо» (выражение самого Г. Кантора) оказалась столь притягательной, что в скором времени стала рассматриваться как главное идейное достижение теории множеств, хотя основы этой «лестницы» весьма проблематичны. На этот факт не раз указывали многие исследователи не только теоретико-множественных конструкций, но и самого феномена теории множеств. К таким исследователям принадлежал, в частности, известный историк математики и философ О. Беккер [9]. По-видимому, он первый указал на диалектичность диагонального метода и вытекающие из нее следствия для всей теории множеств. Последним по времени об этом убедительно говорил А. А. Зенкин [4], который зафиксировал в коротком, на 1/2 страницы доказательстве Кантора несчетности действительных чисел семь (!) ошибок.

Не менее проблематичным является взаимоотношение теории множеств с физическими моделями. Например, мыслить детерминированный процесс

геометрически — как непрерывную траекторию в точечном континууме представляется чем-то само собой разумеющимся. Однако в этом случае мы получаем *эффективную* вполне упорядоченность «следа» этого процесса, траектории, что противоречит представлениям о теоретико-множественном континууме. Как известно, вполне упорядоченность континуума постулируется или выводится из другого предположения, например аксиомы выбора. При этом получается существенно неэффективная упорядоченность, при которой мы не знаем, будет ли, например, $2 > 1$. Разумеется, ситуацию можно подправить, и для этих двух чисел изменить порядок на естественный. Однако в этом случае аналогичный вопрос возникает для любых других чисел, например 3 и 4.

Ради справедливости следует, однако, отметить, что при осмыслении физического мира используются не столько сами теоретико-множественные конструкции, сколько их образы, часто имеющие к этим конструкциям весьма опосредованное отношение.

В частности, при обсуждении непрерывности опираются не на представление континуума как совокупности последовательностей, — чем он является по определению, — а, по большей части, на его геометрический образ — множество точек. Соотнесение же точки и неограниченной последовательности — действительного числа — является крайне нетривиальным постулатом (в явном виде сформулированным Кантором), который отождествляет последовательность и геометрический объект.

Все вышесказанное позволяет сделать следующий вывод.

Теория множеств была задумана Кантором как синтез арифметики и геометрии (об этом, ссылаясь на личный разговор с Кантором, говорил еще Ф. Клейн). Именно в такой идеологии она была воспринята и развита его последователями. Однако более внимательный взгляд говорит о том, что этот синтез опирается на определенное число неявных постулатов, подобных тому, что был приведен выше. Если же отвлечься от этих постулатов, то можно увидеть внутри теоретико-множественных конструкций скрытые процессы. Среди этих процессов есть такие, в которых реализуется принцип «от целого к части», что перекликается со свойствами квантовомеханических систем. Все это еще раз подчеркивает мысль, что в теории множеств имманентно содержится «подавленная» двойственность.

1.2. Постулат двойственности натурального числа и общий принцип двойственности

В современной математике привычка мыслить структурами очень велика. Даже когда речь идет о некотором процессе, т. е. о временном феномене, его все равно пытаются представить какой-либо структурой. Так упорядоченное множество мыслится как «адекватная» модель времени (длительности).

Дело, разумеется, не только в привычке. Пространственно-подобное время позволяет получить исключительно глубокие результаты, обладающие, кроме того, несомненными техническими достоинствами.

Например, «остановленное» время позволяет увидеть разнообразные симметрии и активно исследовать их с помощью теории групп. Сделав время подобным пространству, удалось найти простейший и эффективный подход к синтезу механики и электродинамики, зафиксированный в теории относительности. Развитие динамической системы во времени можно определить стационарными точками $\partial S = 0$ в пространстве-времени. Подобных конструкций существует достаточно много.

С другой стороны, «мыслить процессами» также продуктивно.

Рассмотрим простой пример.

Возьмем траекторию γ в $\mathbb{R}^3$, $\gamma = r(t)$. С точки зрения теории множеств это вполне корректный объект. Однако к этому объекту традиционно «домысливается» процесс $\gamma^\sim$ последовательного перехода от одной точки к другой, в данном случае, определяемый вектор-функцией $r(t)$. На теоретико-множественном языке это означает эффективную вполне упорядоченность (линейную упорядоченность с условием минимальности) объекта мощности c , что, как уже подчеркивалось, некорректно с точки зрения теории множеств. Тем не менее, именно такое последовательное, «безотрывное» движение мы как будто бы наблюдаем в действительности. Если все же следовать за математикой, а не за тем, что мы видим непосредственно (в действительности, проблема «непосредственного наблюдения» исключительно трудна), мы с необходимостью должны «подправить» наши представления о движении в континууме. Рассмотренный выше диагональный процесс, позволяет следующим образом избежать названной коллизии (А. С. Бешенков) [3].

Процесс $\gamma^\sim$ необходимо представить как совокупность двух процессов:

- детерминированного дискретного процесса λ , такого, что значения λ принадлежат γ ;
- случайного процесса μ , значения которого дополняют значения λ .

Завершение этих процессов, в принципе, должно привести к образованию γ .

Рассмотренный пример еще раз подтверждает старую истину: изменение взгляда на хорошо известные и, казалось бы, очевидные вещи может оказаться очень информативным. Попробуем пойти по этой дороге!

Вернемся к обсуждению теории множеств, начатому в предыдущем пункте. Существует ли глубинная причина появления процессов v , казалось бы, ее полностью статичном мире? Как нам представляется, эта причина существует и заключается в следующем.

Как известно, натуральное число является единством количества и порядка: $n = \langle n_R, n_Z \rangle$. Современная математика явно или неявно отдает предпочтение количественному аспекту числа $n = n_R$. Наиболее значимым

следствием количественной точки зрения является именно теория множеств, поскольку множество есть абстрактное выражение количества.

В приведенном выше примере понятие траектории γ также двойственно: $\gamma = \langle \text{множество } \gamma, \text{ процесс } \gamma^\sim \rangle$. В сложившемся понимании $\gamma = \text{множество } \gamma$, что еще раз иллюстрирует мысль о количественных предпочтениях математики.

Количественный аспект числа традиционно ассоциируется с пространством, тогда как порядковый аспект считается проявлением времени. Таким образом, теорию множеств можно считать «пространственной» теорией.

Теория множеств в наибольшей степени ответственна за доминирование идеи количественности (пространства) в математике. В частности, она послужила идейной основой «программы Бурбаки», представляющей математику как теорию структур, т. е. структур количеств. Что же касается процессов, то они более или менее удачно облекались в теоретико-множественные формы. Даже такое фундаментальное понятие, как предельный переход, т. е. некоторый процесс в этой программе, трансформировался во множество со специальными свойствами, ультрафильтр.

Тем не менее, полностью устранить процессы (т. е. свести время к пространству), оказалось невозможным. Теория множеств только перемещает эти процессы на более высокие уровни (неограниченная шкала мощностей, которую нельзя сделать множеством) или прячет их вглубь (принцип вложенных отрезков, диагональный процесс).

Можно констатировать, что теория множеств, которая, несомненно, принесла математике огромные блага, тем не менее, не реализовала свою сверхзадачу — построение полностью статического, платоновского мира, в котором на равных присутствовало бы настоящее, прошедшее и будущее.

Арифметический постулат двойственности, утверждающий, что число есть единство двух различных *не сводимых* друг к другу сущностей: количества и порядка (времени и пространства) в сути формулирует status quo до теоретико-множественного понимания числа.

Для закрепления этой идеи сформулируем *общий принцип двойственности*, который заключается в том, что каждый «количественный» объект A имеет своего «порядкового» двойника $A^\sim$. Иными словами, каждый пространственный объект имеет своего временного двойника.

Одну из реализаций этого принципа можно найти в квантовой механике в виде принципа взаимности М. Борна (1937): «Для любого q -представления существует p -представление».

Общий же смысл принципа двойственности будет раскрыт в следующих пунктах.

1.3. Интуиция двойственности

Мы достаточно хорошо знаем, как выглядит мир в количественном, теоретико-множественном свете. Попробуем увидеть его в порядковом, длительностном ключе. Будем рассуждать интуитивно, оставив формальные конструкции до второго параграфа.

Рассмотрим фундаментальную цепочку множества чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ (натуральные числа $\subset$ целые числа $\subset$ рациональные числа $\subset$ вещественные числа $\subset$ комплексные числа $\subset$ кватернионы).

Принцип двойственности утверждает, что каждое множество из этой цепочки должно иметь своего двойника. При этом, если само понимание числа двойственно, то очевидно, что множество совпадает со своим двойником.

Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ совпадают со своими двойниками, поскольку как натуральное, так и целое число, двойственно в силу арифметического постулата.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т. е. множество дробей $\frac{m}{n}$, — это уже чисто количественное образование, которое согласно принципу двойственности должно иметь своего порядкового двойника $\mathbb{Q}^\sim$. То же самое можно сказать о действительных числах $\mathbb{R}$, комплексных числах $\mathbb{C}$ и кватернионах $\mathbb{H}$.

Таким образом, возникают следующие цепочки множества чисел:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} & \subset & \mathbb{H}, \\ & & & & | & & | & & | & & | \\ & & & & \mathbb{Q}^\sim & \subset & \mathbb{R}^\sim & \subset & \mathbb{C}^\sim & \subset & \mathbb{H}^\sim. \end{array}$$

Попробуем понять, какой смысл могут иметь эти новые множества чисел: $\mathbb{Q}^\sim, \mathbb{R}^\sim, \mathbb{C}^\sim, \mathbb{H}^\sim$.

Начнем с действительных чисел.

Как известно, существует три классических определения вещественного числа: через дедекиндовы сечения, через фундаментальные последовательности, через бесконечные десятичные дроби. Геометрически вещественное число мыслится как точка на прямой.

Все эти хорошо известные факты, тем не менее, содержат в себе внутреннюю коллизии. Как уже говорилось выше, отождествление геометрического объекта — точки и фундаментальной последовательности — является постулатом, характерным именно для теории множеств. Отказ от этого постулата приводит к существенному расширению математического универсума и, в частности, к возможности сделать шаг в сторону квантовой теории.

Следуя общей философии двойственности, будем понимать вещественное число r как двойственную сущность: длину отрезка $[0, r]$ (точку на прямой) и бесконечную десятичную непериодическую дробь, которая дается лишь потенциально. Это значит, что в числе присутствует некий параметр,

который условно можно назвать *внутренним временем числа* и который не имеет геометрических аналогов. Будем обозначать этот параметр $\rightarrow_r$. Двойственный характер вещественного числа в этом случае можно записать как $r = \langle [0, r], \rightarrow_r \rangle$. Опираясь на это двойственное представление вещественного числа, попытаемся проанализировать ряд фундаментальных положений, связанных, в частности, с феноменом квантования.

1.4. Двойственность и квантовая теория

По сложившимся представлениям квантование — это специфическая особенность физической величины действия S , состоящая в том, что ее значения кратны $\hbar$. Вряд ли возможно построение какой-либо математической модели этого феномена в рамках количественного понимания числа. Двойственное понимание вещественного числа такой возможностью обладает. Обоснуем эту гипотезу утверждениями **a**, **b**, **c**.

a. Согласно обрисованному выше пониманию вещественного числа, за каждой точкой r вещественной прямой стоит некий процесс $\rightarrow_r$, т. е. внутреннее время числа r . Возможна ситуация, когда процессы $\rightarrow_{r_1}, \rightarrow_{r_2}, \dots, \rightarrow_{r_n}, \dots$, соответствующие числам $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, можно определенным образом сгруппировать и в каждой группе соединить в единый замкнутый процесс.

Полученные замкнутые процессы можно считать новыми образованиями — «точками», наделенными внутренней динамической структурой (в этом плане они похожи на «монады» Г. В. Лейбница [5]). Эти «точки» вполне могут быть связаны между собой.

Такие «точки-монады» образуют дискретную структуру, причем совершенно иную, чем традиционные дискретные структуры. Квантовая теория, по-видимому, имеет дело именно с этой дискретностью (в разделении этих дискретностей можно усмотреть еще одно проявление принципа двойственности).

Более того, замкнутый процесс $\rightarrow_R$ можно считать *числом*, принадлежащим одной из совокупностей $\mathbb{C}^\sim$ или $\mathbb{H}^\sim$. В этой логике комплексное число $z = \exp i\phi$ получается путем «замыкания на себя» процесса $\rightarrow_w$, соответствующего некоторому вещественному числу w . Иными словами, комплексное число, понимаемое как амплитуда, порождается квантованием. Разумеется, эту идею надо поставить на более формализованные рельсы и, прежде всего, понять, что значит «замкнуть» абстрактный процесс. Мы отложим это до второго параграфа.

b. Как известно, одним из самых глубоких фактов квантовой теории является принцип неопределенности Гейзенберга. Покажем, что структурно этот принцип также может быть понят на основе двойственного представления вещественного числа.

Рассмотрим в контексте двойственности проблему измерения величин. В традиционном понимании измерение данной величины — это ее соотношение с эталоном, результат которого выражается вещественным числом. Двойственность в понимании вещественного числа вносит двойственность и в понимание измерения. В первом случае мы, образно говоря, прикладываем «линейку» и с определенной точностью (зависящий от «линейки»), измеряем отрезок $[0, r]$. Во втором случае мы «запускаем» внутреннее время числа и получаем его сколь угодно точное приближение.

Будем измерять две величины A и B , которые в результате дают вещественные числа X и Y . Если величины A и B таковы, что при любых измерениях внутреннее время числа X : $\rightarrow_X$ течет независимо от внутреннего времени числа Y : $\rightarrow_Y$, то очевидно, что величины A и B можно измерить *одновременно* со сколь угодно высокой точностью. Однако между внутренним временем $\rightarrow_X$ и внутренним временем $\rightarrow_Y$ может существовать определенная связь. В этом случае одновременное, сколь угодно точное знание значений величин A и B может оказаться невозможным. Наиболее простой вид связи заключается в том, что внутреннее время чисел X и Y едино, т. е. существует параметр $\rightarrow_Z$: $\rightarrow_Z = \rightarrow_X \dots \rightarrow_Y$, где многоточие означает «прыжок» от $\rightarrow_X$ к $\rightarrow_Y$. Если расписать $\rightarrow_X$ и $\rightarrow_Y$ по шагам, то существование $\rightarrow_Z$ означает, что с n -го шага времени $\rightarrow_X$ мы можем перейти только к $n + 1$ шагу времени $\rightarrow_Y$. В этом случае мы получаем неопределенность гейзенберговского типа, т. е. при полной определенности X имеет место полная неопределенность Y , и наоборот.

Если значение величин X и Y понимать в количественном смысле, то они становятся «обычными» вещественными числами, и образовать величину Z не представляется возможным. В этом случае путь к принципу неопределенности становится традиционным — через физические величины q и p .

с. Процедура «замыкания» внутреннего времени числа $\rightarrow_R$ приводит к образованию нового вида чисел (из совокупностей $\mathbb{C}^\sim$ или $\mathbb{H}^\sim$), которые мы условно будем обозначать через $\odot$.

Рассмотрим динамическую систему Σ с параметрами q — координаты и p — импульс. Введем следующий постулат:

$$\begin{cases} \text{значение } q \text{ принадлежит } \mathbb{R}; \\ \text{значение } p \text{ принадлежит } \mathbb{C}^\sim (\text{или } \mathbb{H}^\sim). \end{cases}$$

Покажем, что из этого постулата вытекает существование некой константы, которую естественно отождествить с постоянной Планка $\hbar$.

Значением p является некоторое абстрактное вращение $\odot$. Рассмотрим его образ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Это некоторая несамопересекающаяся кривая, которая обладает внутренним вращением. Эту кривую можно заменить статическим контуром γ , вдоль которого определено векторное поле $p(q)$. В этом случае «внутреннее вращение» можно отождествить с циркуляцией названного векторного поля вдоль контура γ : $\int p(q) dq$. Поскольку

данная циркуляция есть выражение абстрактного γ вращения $\odot$, приведенный выше интеграл не должен зависеть от выбора контура. Это значит, что $\int p(q) dq = \text{const}$. Именно эту константу и можно отождествить с постоянной Планка $\hbar$. Конкретное значение $\hbar$ дается, разумеется, экспериментом, но существование такой константы можно установить чисто умозрительным путем.

§ 2. Математика двойственности

Civilisation advances by extending the number of important operation which we can perform without thinking about them.

A. N. Whitehead

Приведенные в предыдущем параграфе метафизические рассуждения требуют формального подкрепления, в противном случае их существование становится призрачным. В таком контексте эти рассуждения можно суммировать следующим образом.

В математическом универсуме можно выделить структуры двух основных типов: «пространственно-подобные» и «времени-подобные» («количественные» и «порядковые»). Эти структуры обладают существенно различными качествами, обусловленными принципиальным различием пространства и времени. Естественно было бы ожидать, что математические формализмы будут обладать той же пространственно-временной двойственностью, которая свойственна нашей интуиции. В реальности же имеет место «склейка» этих двух типов структур в одно целое с доминированием пространственной (количественной) идеологии. Подобная идеология формирует хорошо известный «пространственно-ориентированный», количественный образ математики. Наряду с фундаментальными достижениями, полученными в рамках этой идеологии, имеют место многочисленные противоречия, источником которых является именно склейка «количества» и «порядка». Более того, такая склейка приводит к исчезновению целых концепций, которые могли успешно развиваться в рамках «математики двойственности». Приведенные в предыдущем параграфе содержательные примеры дают основание предполагать, что одной из таких концепций является квантовая теория.

Как нам представляется, подобная «математика двойственности» имела место и при создании математического анализа. Можно увидеть, что Г. В. Лейбниц стремился придать новой теории форму исчисления, т. е. некоторой дедуктивной структуры, тогда как И. Ньютон работал с рядами, чисто временными объектами. В современной математике доминирует линия Лейбница (В. И. Арнольд даже говорил о нем как о предшественнике Бурбаки). Линия Ньютона (а следовательно, и линия двойственности) не получила своего развития — во многом благодаря отсутствию адекватного

временного (порядкового) формализма. Создание такого формализма сопряжено с преодолением ряда препятствий, которые мы надеемся преодолеть.

Развиваемый в настоящей работе временной (порядковый) формализм основан на двух ключевых конструкциях:

- теории сюрреальных чисел Дж. Конуэя;
- сформулированной автором теории порядковой бесконечности.

Кратко рассмотрим каждую из названных конструкций.

2.1. Сюрреальные числа

Сюрреальные числа (surreal numbers — название принадлежит Д. Кнуту) возникли в работах Дж. Конуэя (John Horton Conway) [12] для описания ряда аспектов теории игр. С традиционной теоретико-множественной точки зрения сюрреальные числа — это еще одна, правда, очень интересная, модель нестандартных вещественных чисел, в которую, кроме обычных вещественных чисел, входят инфинитные и инфинитоземальные величины. До настоящего времени (с 1974 г.) сюрреальные числа практически не нашли себе адекватного применения и по большей части рассматриваются как изящная математическая экзотика. Однако сюрреальные числа допускают чисто временную трактовку, что представляет особый интерес с точки зрения нашего подхода.

Формально сюрреальные числа можно представить через конечные и неограниченные последовательности знаков « $\uparrow$ » и « $\downarrow$ ». В частности:

— «1»	соответствует	$\uparrow$;
— «-1»	—	$\downarrow$;
— «1/2»	—	$\uparrow\downarrow$;
— «1/3»	—	$\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\dots$

и т. д.

В рамках нашего подхода более точно необходимо говорить о двойственности, а именно:

- «единица» = $(1, \uparrow)$;
- «минус единица» = $(-1, \downarrow)$;
- «одна вторая» = $(1/2, \uparrow\downarrow)$;
- «одна треть» = $(1/3, \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\dots)$ и т. д.

В дальнейшем будем называть числа, построенные из знаков « $\uparrow$ » и « $\downarrow$ », K-числами.

K-числа можно рассматривать как порядковые аналоги вещественных чисел. Попробуем распространить их конструкцию на комплексные числа. Возьмем число $z = \alpha e^{i\beta}$. Вещественное число α , как мы уже убедились, можно представить в виде последовательности знаков « $\uparrow$ » и « $\downarrow$ ». При этом мы хорошо понимаем, что шаги, обозначаемые этими знаками,

являются *абстрактными*, имманентно присущими натуральному числу. Ситуация с вещественным числом β , которое обозначает точку окружности, принципиально иная. Следуя идеологии K -чисел, его нужно представить как совокупность *поворотов* окружности. В этом случае можно получить порядковый аналог комплексного числа, например: $\uparrow\downarrow\uparrow \cdots \circ\circ\circ\circ \dots$. Проблема состоит в том, что само понятие поворота *абстрактным не является*. Корректным считается поворот «чего-то», происходящий «где-то». Это полностью разрушает всю конструкцию, поскольку понятие порядка перестает быть автономным относительно понятия количества (пространства). Разрешить ситуацию можно только путем введения абстрактного поворота (вращения) и чисел, которые являются носителями таких абстракций. Это, в свою очередь, требует переосмысления понятия математической бесконечности.

2.2. Порядковая бесконечность

Идея бесконечности, с одной стороны, почти тривиальна, с другой — исключительно сложна. Действительно, отрицание является одной из логических операций, которые согласно И. Канту даны нам *a priori*. Отрицание всего конечного и есть бесконечное. Это самое естественное, «апофатическое» (отрицательное) определение бесконечности, в котором фиксируется, чем бесконечность «не должна быть».

Проблема придания бесконечности позитивного смысла («чем она может быть») имеет почти трансцендентный характер.

По традиции, идущей от Аристотеля, разделяют бесконечность как неограниченный процесс (потенциальная бесконечность) и бесконечность как объект (актуальная бесконечность). Наибольший интерес вызывает представление бесконечности как объекта. Идея двойственности (количества и порядка) позволяет увидеть две стороны этого бесконечного объекта.

Теория *количественной* бесконечности была развита Б. Больцано и, в особенности, Г. Кантором как «теория множеств», в которой множество являлось носителем количественной бесконечности (бесконечное количество есть бесконечное множество).

Проиллюстрируем это фундаментальное положение.

«... Для нас является важным только то, сможем ли мы при посредстве определения одного только количества определить бесконечность вообще. Это было бы не так, если бы оказалось, что понятие бесконечного в настоящем значении этого слова может быть применено только к количествам, т. е. бесконечность есть свойство одних только количеств, иначе говоря, что мы называем нечто бесконечным, поскольку мы в нем находим свойство, которое можно рассматривать как бесконечное количество. А это, по моему мнению, действительно справедливо. Математик, очевидно, никогда не употребляет этого слова в другом смысле, так как он вообще занимается

почти исключительно определением величин, принимая одну из них того же рода за единицу и пользуясь понятием о числе» (Г. Кантор [1]).

«Под актуально бесконечным следует понимать такое количество, которое, с одной стороны, неизменно, но определено и неизменно во всех своих частях и представляет собой истинную постоянную величину, а с другой, в то же время превосходит по своей величине всякую конечную величину того же вида» (Б. Больцано [2]).

Принцип двойственности утверждает, что наряду с количественной бесконечностью должна существовать также бесконечность *порядковая*. Для образования этой бесконечности достаточно самого факта перехода от одного члена последовательности к другому. При этом закон, по которому осуществляется такой переход, может отсутствовать в принципе.

Очевидно, что характерные для теории Кантора способы введения бесконечности — либо путем собирания в одно целое элементов неограниченного множества, либо переходом к множеству степени — неприемлемы для построения порядковой бесконечности. Однако существует иной способ введения новых объектов — аксиоматический. Выделив характеристическое свойство, можно определить новый объект как «нечто» этому свойству удовлетворяющее. Попытаемся следовать этой установке.

Прежде всего, очевидно, что, как и в случае количественной бесконечности, необходимо отталкиваться от неограниченного процесса. Попытаемся выделить такое свойство этого процесса, которое можно было бы считать характерным для актуальной бесконечности.

Рассмотрим следующий пример.

Предположим, мы наблюдаем за человеком, который неизменным шагом идет к горизонту. Степень удаленности горизонта от нашего взора может быть охарактеризована степенью неразличимости отдельных предметов: сначала мы перестаем различать пуговицы на пальто, затем черты лица и т. д. Для того чтобы полностью слиться с горизонтом, человек должен сделать бесконечное число шагов. Таким образом, неразличимость можно считать ключевым свойством бесконечности.

Следует отметить, что понятие «горизонта» не просто удачный образ, но и математическое понятие, которое ввел П. Вopenка [6, 7] в качестве основного инструмента построения «альтернативной теории множеств». В этой теории бесконечность трактуется как проявление нечеткости при подходе к горизонту. При этом Вopenка понимал бесконечность в канторовском, количественном смысле.

Наше понятие «горизонта» близко к понятию горизонта Вopenки, хотя наши взгляды на сущность бесконечного кардинально отличаются от его представлений.

Формальное определение бесконечного в «аксиоматической» трактовке выглядит следующим образом.

Рассмотрим какой-нибудь *неограниченный*, с постоянным шагом процесс γ , в котором порождаемые объекты различимы некоторым двуместным предикатом A . Определим объект α , на котором стабилизируется процесс γ в смысле предиката A . Если все объекты, порожденные процессом γ , являются *конечными*, то объект α можно считать *бесконечным относительно предиката A* (релятивизация бесконечности).

В применении к натуральному ряду данное определение работает следующим образом. Согласно аксиоме арифметической двойственности каждое натуральное число n является единством количества n_R и порядка n_Z : $n = (n_R; n_Z)$. Будем отражать факт совпадения чисел n_Z и m_Z в процессе их порождения предикатом « $=_Z$ ». С другой стороны, на натуральных числах можно ввести предикат « $=_R$ », который фиксирует их количественное различие. В этом случае можно образовать два бесконечных числа ω и Ω , на которых натуральный ряд стабилизируется в смысле количества и порядка соответственно, т. е. $\omega + 1 =_R \omega$, но $\omega + 1 \neq_Z \omega$. С другой стороны, $\Omega + 1 =_Z \Omega$, что влечет $\Omega + 1 =_R \Omega$.

Числа ω и Ω были определены с помощью формальной конструкции, которая требует интерпретации.

Бесконечное число ω может быть интерпретировано как первый бесконечный ординал, т. е. теоретико-множественным образом.

Для интерпретации бесконечного числа Ω требуется иной подход.

Во-первых, очевидно, что Ω не может быть множеством. Действительно, в противном случае порядок Ω в области множеств должен совпадать с порядковым типом (принцип соответствия). Однако в силу неограниченности шкалы порядковых типов (ординалов), Ω допускает увеличение в смысле порядка, что противоречит его определению.

Соотношения: $\Omega + 1 =_Z \Omega$, $\Omega + 2 =_Z \Omega \dots$ можно рассматривать как своеобразное проявление «периодичности» относительно «кванта времени» «1» = « $\rightarrow$ ». Вне теоретико-множественного универсума все шаги « $\rightarrow$ » сливаются и Ω становится числом с *внутренней циркуляцией времени* или *фундаментальным вращением*. В этом утверждении нет ничего необычного, поскольку последовательное, «линейное» движение является внутренним свойством вещественного числа.

Фундаментальное вращение не обладает никакими физическими характеристиками: осью вращения, частотой и пр., ровно так же, как и последовательность «внутри» действительного числа не является физическим процессом.

Метафизическое замечание.

Введенная нами порядковая бесконечность Ω , так же как и канторовская бесконечность ω (и все остальные кардинальные числа $\aleph_\lambda$), является «настоящей», актуальной бесконечностью (но существенно иной, чем все $\aleph_\lambda$). Это принципиальным образом отличает эти бесконечности от многочисленных

«естественно-научных» трактовок бесконечного, которые предпринимались на протяжении всего периода существования теоретико-множественной концепции. Например, предлагалось заменить актуальную бесконечность потенциальной, придать бесконечному статус «неосуществимого» и пр. Подобные ограничения происходили от желания устранить парадоксы и приблизить бесконечность к физической реальности.

В действительности, такое «приближение» оказывается иллюзорным. Насильственное ограничение трансфинитных возможностей разума затупляет тонкую остроту математического аппарата: дальнорукость сменяется близорукостью. Безусловно, для *описания* физических явлений и процессов достаточно финитных построений. Однако за описанием должно следовать *предсказание*, которое опирается на трансфинитные понятия и конструкции.

В плане таких предсказаний теоретико-множественная математика сыграла выдающуюся роль. Верно и то, что сегодня ее эффективность угасает. Однако это вовсе не связано с ее высокой степенью абстракции. Напротив, можно уверенно предположить, что теоретико-множественная бесконечность становится «недостаточно сильной» для понимания окружающего мира. В этом случае путь развития этой бесконечности — не «вниз», а «вверх»: не к «естественно-научным» ограничениям, а к повышению уровня абстракции, построению качественно новой бесконечности. Именно этот путь и реализован в данной работе.

Следует подчеркнуть еще один важный момент.

Как известно, в процессе создания теории множеств Г. Кантор активно опирался на разработку проблемы бесконечности в философии и богословии. Например, практически все основные теоретико-множественные конструкции и утверждения, включая парадокс Рассела, можно найти уже в «Первоосновах теологии» Прокла [8]. Множество подобных конструкций есть у Бл. Августина, Н. Кузанского. Более того, аналитика бесконечного в богословии оказалась гораздо более тонкой и многогранной, чем она представляется в современной математике. В частности, введенное выше понятие порядковой бесконечности достаточно точно отражено в понятии «эона» ($\alpha\omega\nu$) «неподвижного времени». Диалектику времени и эона можно найти у Преп. Максима Исповедника: «Эон — это время, когда оно прекращает свое движение, и время — это эон, когда он увлекается движением. Движение происходит во времени — от эона к эону».

Вернемся на основную дорогу и выясним соотношение чисел ω и Ω .

Рассмотрим шкалу кардинальных чисел:

$$0, 1, 2 \dots n, \dots \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \dots \aleph_\lambda \dots \quad (*)$$

Она неограничена и завершить ее в рамках теории множеств невозможно (парадокс Бурали — Форти). Такая ситуация во всех существенных чертах воспроизводит парадокс несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, что в свое время послужило источником введения иррациональностей.

Действительно, последовательность:

$$1; 1,4; 1,41; \dots \quad (**)$$

ничем принципиально не отличается от последовательности (*). Для завершения последовательности (**) числом $\sqrt{2}$ потребовалось преодолеть horror infinity (страх бесконечного). Точно также для завершения последовательности (*) необходимо преодолеть «страх сверхбесконечного», т. е. бесконечности Ω более высокого уровня по сравнению с количественной бесконечностью. Ситуация становится более понятной, если принять во внимание следующие соображения.

Легко видеть, что всякое кардинальное число $\aleph_\lambda$, являясь *бесконечным* в смысле количества, является *конечным* в смысле порядка. В частности $\aleph_{\lambda+1} \neq_z \aleph_\lambda$. Это значит, что в порядковом смысле кардинал $\aleph_\lambda$ «ведет себя» так же, как и любое конечное натуральное число. Иными словами в порядковом смысле последовательность кардинальных чисел (*) и последовательность натуральных чисел: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$, эквивалентны. Это значит, что последовательность (*) также стабилизируется на числе Ω . Поскольку каждый кардинал $\aleph_\lambda$ одновременно является порядковым числом, $\Omega > \aleph_\lambda$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: $\Omega > \omega$ и для любого кардинала $\aleph_\lambda$ справедливо $\Omega > \aleph_\lambda$.

Примечание. Неравенство $\Omega > \aleph_\lambda$ является полным аналогом неравенства $\omega > k$. Смысл последнего неравенства состоит в том, что шаг ω так велик, что он больше всех конечных шагов.

В свободном толковании данное утверждение означает, что *порядковых чисел больше чем количественных*. Принимая во внимание уже упомянутые философские традиции связывать количество с пространством, а бесконечность со временем, можно заключить, что *бесконечность пространства меньше чем бесконечность времени*. Подобные утверждения не отличаются точностью, но дают повод для развития многих плодотворных образов (теорема Гёделя о невозможности установления непротиворечивости системы ее внутренними средствами породила много глубоких вещей, хотя, строго говоря, утверждает несколько иной факт).

2.3. Метафизика и прагматика неравенства $\Omega > \omega$

Рамки настоящей статьи не позволяют представить развернутую теорию порядковых аналогов комплексных чисел и кватернионов. Выявленная же в ходе развития этой теории несимметрия по бесконечности пространства и времени представляет отдельный интерес.

Современный исследователь использует симметрию почти так же, как и древний инженер использовал силу падающей воды: и то, и другое дается

ему почти «даром». Впрочем, преобразование предельно общей, «даровой» идеи симметрии в конкретные физические законы глубоко загадочно. Тем не менее, именно это преобразование является на сегодняшний день основным рабочим инструментом теоретической физики. «Cherchez la groupe» — такова парадигма современного естествоиспытателя. Примечательно, что «непостижимая эффективность математики» в области естественных наук, прежде всего, в физике в значительной мере базируется на теоретико-групповом подходе.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли расширить границы этой «непостижимой эффективности» и найти новые ориентиры для получения принципиально нового типа законов, столь же общих и «даровых», как и законы симметрии.

Возьмем в качестве кандидата на такой универсальный принцип хорошо известный «принцип Дирихле». В самой простейшей, общеизвестной формулировке он звучит так. Если в n клеток посадить m кроликов, где $m > n$, то хотя бы в одной клетке будет сидеть два кролика. Этот принцип допускает следующие вариации, в зависимости от числа «клеток» и «кроликов»:

- количество «кроликов» и «клеток» конечно;
- количество «кроликов» — ω , количество «клеток» — n , где n — конечное число.

Неравенство $\Omega > \omega$ предельно расширяет границы применения принципа Дирихле, переводя его, наряду с симметрией, в фундаментальный принцип получения закономерностей «из ничего». Метод Дирихле при этом корректируется, поскольку в неравенстве $\Omega > \omega$ речь идет о порядковых числах.

Обрисуем схему применения этого принципа в случае, когда речь идет о пространстве бесконечности ω и бесконечности времени Ω .

Несимметрия пространства и времени по бесконечности ведет к нарушению законов сохранения, не говоря о том, что представление времени без пространства явно не соответствует физической интуиции. Чтобы этого избежать, необходимо вложить «длинное» время в «короткое» пространство, т. е. реализовать принцип Дирихле. Можно построить различные модели такого вложения. Рассмотрим одну, вероятно, простейшую модель.

Как известно, современная концепция, следуя идее Эрлангенской программы Ф. Клейна, определяет пространство-время через определенные типы симметрии, т. е. с помощью заданной группы преобразований, а именно группы Пуанкаре. В этом плане теория относительности, как специальная, так и общая, представляет собой, по-видимому, первый пример физической теории, нацеленной не на объяснение эмпирических фактов, а на синтез двух «правильных» теорий: механики Ньютона и электродинамики Максвелла. Идеологией такого синтеза в данном случае явился теоретико-групповой подход. Заметим, что переход от специальной теории относительности

к общей также может быть понят на основе этого подхода — от группы Пуанкаре P к группе де Ситтера D .

Выбор именно такого пути осуществления синтеза механики и электродинамики и, соответственно, получение определенной модели пространства-времени был в значительной мере детерминирован количественной, теоретико-множественной концепцией. Именно в рамках этой концепции, с одной стороны, возникла удовлетворительная теория точечного континуума, с другой — приобрела необходимую строгость теория групп.

Альтернативные пути синтеза электродинамики и механики, например, на основе моделей эфира, также возможны. Однако в силу сложившейся количественной ориентации математики они не могут в ее рамках приобрести необходимую строгость и стать полновесными теориями: само существование подобных путей говорит об особом статусе релятивистской программы.

Что касается теоретико-группового подхода, то он неоднократно и успешно использовался как инструмент синтеза различных теорий. Возникло даже желание отождествить понятие физического закона и идеи симметрии, с несколько иной, чем теория групп формализацией (Ю. И. Кулаков [11]). Однако ощутимых продвижений в этом направлении пока нет.

Следствием теоретико-группового подхода является «уравнивание в правах» пространства и времени, в частности, приравнивание бесконечности пространства к бесконечности времени. Не вдаваясь в тонкую проблему, имеет ли это место «на самом деле», построим модель вложения Ω в ω , в которой время, с одной стороны, подобно пространству, в частности, имеет ту же бесконечность ω , но в котором было бы «отпечатано» неравенство $\Omega > \omega$.

Структуру такого «отпечатка» можно извлечь из следующих соображений.

Как поведет себя автомобилист, видя впереди красный свет светофора? Очевидно, начнет, замедлять свое движение. Можно предположить, что все процессы, происходящие в пространстве $\mathbb{R}^3$, также замедляются в силу того, что бесконечность времени Ω больше бесконечности пространства ω и время должно «финишировать» на бесконечности ω . Это общее замедление можно представить как «уплотнение» шагов в натуральном ряду чисел. Все аксиомы Пеано выполняются для натурального ряда чисел взятого самого по себе. Уплотнение шагов возникает тогда, когда время соединяется с пространством в единое пространство-время и реализуется принцип Дирихле (при этом необходимо осуществить ряд тонких действий, которые в данном контексте могут рассматриваться как технические). В результате появляется пространственно-временной континуум, в котором расстояние между натуральными числами уменьшается по мере увеличения числа.

Примечательным является следующий факт. Еще в 1973 г. в «Успехах математических наук» было опубликовано знаменитое письмо П. К. Рашевского [10] (с. 77 настоящего издания), в котором он обосновывал целесооб-

разность новой модели натурального ряда, в определенной мере похожей на построенную модель: «Духу физики более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком-то смысле „размытый“ вид, а не являлись строго определенными членами натурального ряда, как мы себе это представляем».

Можно построить более «экзотическое» (и, возможно, более «правильное») вложение времени в пространство для обеспечения их симметрии по бесконечности. Однако для этого требуется существенное изменение во всей концепции пространства и времени.

2.4. Бесконечные порядковые числа $\mathbb{C}^\sim$

Вернемся к основной линии изложения. Сюрреальные числа Дж. Конуэя можно рассматривать как порядковый аналог действительных чисел $\mathbb{R}$. (В реальности у Конуэя получается больше — ${}^*\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$). Введем конструкцию, которую можно интерпретировать как порядковый аналог комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Среди всех последовательностей: из « $\uparrow$ » и « $\downarrow$ » можно выделить три класса:

- (i) все стрелки направлены вверх: $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots$;
- (ii) стрелки направлены произвольно: $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow \dots$;
- (iii) все стрелки направлены вниз: $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots$.

В классе (ii) выделим два подкласса:

- (iia) доминируют стрелки « $\uparrow$ »;
- (iib) доминируют стрелки « $\downarrow$ ».

Суть этого выделения при всей расплывчатости понятия «доминирования» будет ясна из дальнейшего контекста (разумеется, формализовать это понятие не представляет труда, но в данном случае формализация не яснее интуиции).

Согласно общему подходу, изложенному в п. 2.2, можно стабилизировать эти процессы по предикату « $=_2$ » и образовать порядковые числа Ω^+ , Ω^- . При этом последовательности, в которых доминируют стрелки « $\uparrow$ », будут «сворачиваться» в число Ω^+ , а последовательности с доминированием « $\downarrow$ » — в число Ω^- .

Числа Ω^+ , Ω^- можно интерпретировать как фундаментальные вращения в противоположных направлениях. Обозначим Ω^+ через $\odot$, Ω^- — через $\ominus$.

Вращения $\odot$ и $\ominus$ взаимно противоположны, следовательно, из них можно образовать K -число, но, разумеется, с другим смыслом, чем K -числа, образованные стрелками $\uparrow$ и $\downarrow$. Соединив в упорядоченную пару K -числа, образованные на стрелках « $\uparrow$ » и вращениях « $\odot$ », получим число $\mathcal{P}_\beta^\alpha = (\uparrow^\alpha, \odot_\beta)$,

где α и β — выбранное для удобства традиционное десятичное обозначение последовательностей из знаков « $\uparrow$ » и « $\downarrow$ » соответственно. После соответствующей технической работы числа $\mathcal{P}_\beta^\alpha$ можно рассматривать как порядковые двойники комплексных чисел: $(\uparrow^\alpha, \downarrow^\beta) \sim ae^{i\beta}$

2.5. Расширение канторовского континуума

Используя «линейные» шаги — стрелки $\uparrow$ ($\downarrow$) и фундаментальные вращения $\circ$ ($\odot$), — можно приступить к реализации высказанной в конце предыдущей главы идеи о расширении канторовского континуума.

Как известно, простейший континуум — совокупность вещественных чисел $\mathbb{R}$ — можно определить через классы фундаментальных последовательностей. Каждый такой класс в простейшем случае соотносится с точкой на прямой.

Теоретико-множественный континуум не дает адекватного представления о физических объектах, обладающих внутренними степенями свободы. Для их описания вводится понятие расслоенного пространства, в котором к каждой точке «привязан» некоторый геометрический объект — слой.

Попытки «привязать» к точке динамический объект, в конечном итоге, оборачивается сведением всей конструкции к геометрии, что вполне естественно в условиях доминирования количественной, пространственной парадигмы.

Как нам представляется, привязку «динамики» к «геометрии» более естественно осуществить не на геометрический, а на динамической основе, поскольку, как уже подчеркивалось, отождествление последовательности и точки не более чем постулат в рамках теоретико-множественного мира.

Конструкция такой привязки выглядит следующим образом.

Рассмотрим числа вида: $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow \dots \circ\circ\circ\circ\circ \dots$. Будем обозначать последовательность символов $\uparrow$ ($\downarrow$) через α , а последовательность символов $\circ$ ($\odot$) через β .

Для полного описания этой последовательности необходимо определить *трансцендентный шаг* от последовательности α к последовательности β . Это может быть сделано разными способами (как и на совокупности вещественных чисел может быть определена различная метрика). Возможны, например, такие ситуации:

- последовательности α и β развиваются независимо друг от друга. Такой подход позволяет сделать шаг в сторону количественной интерпретации совокупности рассматриваемых последовательностей: как прямого произведения двух нестандартных действительных «прямых»: ${}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$;
- через конечное число шагов последовательности α осуществляется трансфинитный шаг к началу последовательности β : эта ситуация реализуется в числе $\mathcal{P}_\beta^\alpha$ (α и β в этом случае уже не последователь-

ности, а вещественные числа, соответствующие этим последовательностям);

- через n шагов последовательности α осуществляется трансфинитный шаг к $n + 1$ шагу последовательности β . Как было показано в конце предыдущего параграфа, такой трансфинитный шаг приводит к соотношению, чрезвычайно похожему на соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Любая из этих возможностей формально расширяет канторовский континуум. Будем обозначать эти расширения символом $\omega(X)$, где X — это описание трансцендентного шага.

Введение пространства $\omega(X)$ позволяет подтвердить высказанную в предисловии гипотезу об умозрательном характере классической квантовой механики. При этом оказывается, что необходимая конструкция вписывается в общий метафизический принцип, который можно проследить, начиная со специальной теории относительности.

Как известно, суть специальной теории относительности состоит в том, что две отдельные категории «пространство» и «время» соединяются в единое пространство-время с псевдоевклидовой метрикой $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - ct^2$. Согласно Ю. С. Владимирову [16], в этом можно усмотреть проявление действующего во всей современной физике общего метафизического принципа сокращения числа фундаментальных категорий. С другой стороны, эффективность конкретного соединения категорий пространства и времени на геометрической основе, подкрепленная успехами общей теории относительности, позволила сформулировать геометрическую, теоретико-групповую, парадигму, которая на протяжении всего XX в. мыслилась универсальной платформой для всевозможных объединений.

Рассмотрим теперь фазовое пространство $F\{q, p\}$. Попытаемся реализовать в нем названный метафизический принцип. Введем в нем структуру пространства $\omega(X)$ по следующей схеме:

- а) введем соответствие (аналог постулата де Бройля):

$$q \rightarrow \uparrow^q$$

$$p \rightarrow \odot_p.$$

- б) трансцендентный переход X , связывающий последовательности, соответствующие q и p , будет осуществляться по третьей из приведенных выше возможностей, т. е. через n шагов последовательности осуществляется трансфинитный шаг к $n + 1$ шагу последовательности p .

Из этой схемы, как было показано выше, вытекает:

- существование некой константы, которую можно отождествить с постоянной Планка;
- выполнение соотношения, которое можно интерпретировать как соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Таким образом, гипотеза об умозрительном характере квантовой механики имеет определенное подкрепление.

Замечания

По поводу приведенной конструкции сделаем несколько замечаний общего характера.

Согласно основному принципу двойственности, приведенная конструкция имеет своего «количественного» двойника. Одним из них является такой.

Известно, что в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 любой вещественный вектор $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ можно представить эрмитовой матрицей $H = \xi_1 \sigma_1 + \xi_2 \sigma_2 + \xi_3 \sigma_3$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — эрмитовы спиновые матрицы Паули. Таким образом, пару (x, H) можно рассматривать как двойника конструкции $\uparrow^q \dots \circ_p$.

Структуру пространства $\omega(X)$, разумеется, надо исследовать адекватными средствами. Наиболее интересным инструментом такого исследования в настоящее время видятся f_0 -пространства в смысле Ю. Л. Ершова [14].

Наконец, возникает естественный вопрос: есть ли какие-либо аргументы в пользу того, что пространство $\omega(X)$ можно рассматривать как модель реального физического пространства, или оно является лишь абстрактной (хотя, возможно, и полезной) конструкцией?

Прежде всего, заметим, что пространство $\omega(X)$ формирует существенно иную систему образов, чем канторовский точечный континуум. Последовательности $\uparrow^q$ можно трактовать как бесконечные *нити*, а наличие фундаментальных вращений $\circ_p$ в импульсной составляющей придает им характер *токов*, причем в физическом смысле. Замечательным (и удивительным) фактом является то, что эти абстрактные (континуальные) токи были обнаружены экспериментально. Исследования, проведенные Б. У. Родионовым в рамках проверки выдвинутой им гипотезы *флюксов* — нитяных, цилиндрических атомов, с помощью созданного им специального прибора — фамметра — с определенностью показали существование континуальных токов [15]. Изучение свойств этих токов требует дальнейших исследований. Примечательным фактом является еще и то, что похожая конструкция возникла в рамках теории петлевой квантовой гравитации (Loop Quantum Gravity), исходя из совершенно иных соображений.

Заключение

По известному выражению Г. Вейля, математика — это искусство называть разные вещи одними словами. В XX в., благодаря теории множеств и деятельности Бурбаки, это искусство достигло размаха и совершенства. Однако в нем есть и обратная сторона. *Умение* видеть общее в разном оборачивается *неумением* видеть в одной вещи многообразие ее смыслов. В постмодернистском мире это принципиально важный момент, поскольку смысл вещей не подчиняется приказам языка.

По-видимому, главный метафизический смысл данной работы состоит в демонстрации (разумеется, на отдельных примерах) того, что математический мир может существовать не только как иерархия теоретико-множественных структур, но и как система взаимодействующих между собой двойственностей, разумея при этом двойственность смыслов. В этом развороте можно узреть род отступничества от пути, предначертанного теорией множеств. С другой стороны, этот отход только от теоретико-множественного универсализма, но не от идеи актуальной бесконечности. Мы просто заключаем с ней новое соглашение, допускающее существование и взаимодействие двух ее «ликов», двух принципиально различных типов бесконечностей: количественной и двойственной к ней — порядковой бесконечности. Наличие актуальной *неколичественной* бесконечности — принципиальное отличие предлагаемой теории от всех конструктивистских подходов, также эксплуатирующих интуицию времени.

Разумеется, всякая умозрительная конструкция, даже когда она полностью корректна, имеет смысл, если с ее помощью можно увидеть новую грань хорошо известных вещей и, как следствие, получить интеллектуальные и практические дивиденды. Рамки данной работы не позволяют в полной мере представить именно эту сторону теории двойственности. Конечное же суждение о дееспособности любого построения может дать только время, и мы должны внимательно в него вслушаться.

Литература

1. Cantor G. Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitum. (Русский перевод: Кантор Г. К учению о трансфинитном. Труды по теории множеств.— М.: 1985.)
2. Больцано Б. Парадоксы бесконечного.— Одесса: 1911.
3. Бешенков А. С. Теоретико-множественная модель взаимодействия поля с самим собой // Вестник ТГУ, 2007, т. 12, вып. 5, с. 619– 621.
4. Зенкин А. А. Infinitum Actu Non Danur // Вопросы философии, 2001, No 9, с. 157–169.
5. Лейбниц Г. В. Монадология. Сочинения, т. 1.— М.: 1982.
6. Вopenка П. Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность. Пер. со словацк.— Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004.

7. *Vopenka P.* Mathematics in the alternative set theory. Leipzig, 1979. (Русский перевод: Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.)
8. *Прокл*, Первоосновы теологии.— М.: Прогресс, 1993.
9. *Bekker O.* Gröse und Grenze der matematischen Denkweise. Freiburg, Munchen, 1959.
10. *Рашевский П. К.* О догмате натурального ряда // УМН, 1973, т. 28, вып. 4 (172), с. 243–246.
11. *Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Корнауков А. В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.— М.: Архимед, 1992.
12. *Konway J.* On numbers and games. London, 2001.
13. *Вékшенов С. А.* Математика и физика пространственно-временного континуума // Основания физики и геометрии.— М., 2008.
14. *Ершов Ю. Л.* Вычислимые функционалы конечных типов. — Алгебра и логика, 1972, Т. 2, № 4, с. 367–437.
15. *Родионов Б. У.* Регистрация континуальных токов // Метафизика век XXI, вып. 2, с. 343–365.
16. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.

Часть II

**МАТЕМАТИКИ ПРОШЛОГО
ОБ ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ**



Фоменко А. Т.
Дискретные группы, порожденные отражениями

О гипотезах, лежащих в основании геометрии¹⁾

Б. Риман²⁾

План исследования

Общеизвестно, что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий, тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно также а priori, возможна ли такая связь.

Начиная от Евклида и кончая Лежандром (я называю наиболее выдающегося из новейших исследователей основ геометрии), ни математиками, ни философами из числа занимавшихся интересующим нас вопросом упомянутые неясности не были устранены. Причина этому обстоятельству, как я полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной. В связи с этим я поставил перед собой задачу, исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные меры определения и что пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины. Необходимым следствием отсюда явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин и что, напротив, те

¹⁾Вступительная лекция, прочитанная Риманом 10 июня 1854 г. Впервые опубликована в 1868 г.: *Riemann B., Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen*, Bd. 13, 1868, ss. 133–152. (Здесь перепечатан с незначительными исправлениями перевод из книги: «Об основаниях геометрии», ГИТТЛ. М., 1956, с. 309–324.) Перевод с немецкого В. Л. Гончарова.

²⁾Бернхард Риман (1826–1866) — выдающийся немецкий математик, открывший второй вид неевклидовой геометрии (геометрии постоянной положительной кривизны) и положивший начало развитию дифференциальной геометрии, названной римановой, на основе которой была построена общая теория относительности Эйнштейна. Риман явился одним из создателей теории функций комплексного переменного; он автор работ по теории рядов, теории чисел и дифференциальных уравнений.

свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта. В таком случае возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства, — задача, естественно, не вполне определенная, так как не исключено, что возможно несколько систем простых допущений, из которых каждая достаточна для установления метрических свойств пространства; важнейшая среди них, с точки зрения поставленной нами цели, есть система, положенная в основу геометрии Евклидом. Допущения, о которых идет речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они — не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие (которое, как бы то ни было, очень значительно в пределах наблюдения) надлежит подвергнуть исследованию и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого.

§ 1. Понятие n -кратно протяженной величины

Я обращаюсь к первой из указанных мною задач, а именно к выяснению понятия многократно протяженной величины; при этом считаю для себя обязательным просить об известном снисхождении, тем более, что в относящихся сюда работах философского содержания, трудность которых заключена скорее в анализе понятий, чем в математических построениях, я не обладаю большой осведомленностью. Кроме очень кратких указаний, которые г. тайный советник Гаусс дал во втором мемуаре, посвященном биквадратическим вычетам (в Геттингенских ученых записках), и в своей юбилейной работе, а также некоторых философских исследований Гербарта, я не имел возможности использовать какие-либо литературные источники.

1

Образование понятия величины возможно лишь в том случае, если предпослано некоторое общее понятие, связанное с допущением ряда различных состояний¹⁾. В зависимости от того, существует ли или не существует непрерывный переход от одного состояния к другому, мы имеем дело с непрерывным или с прерывным многообразием; отдельные состояния на-

¹⁾«Состояние» — Bestimmungsweise. Под многообразием Риман понимает не только геометрические протяженности (это явствует, например, из конца абзаца, где Риман говорит об ощущениях и цветах). Поэтому позволительно воспользоваться, за неимением лучшего, общепонятным, хотя и не вполне геометрическим термином «состояние» для обозначения элемента многообразия, соответствующего совокупности некоторых определенных числовых значений параметров (координат). В случае геометрической протяженности «состояние» — то же, что «точка». (Ред. сб. «Об основаниях геометрии».)

зываются в первом случае точками, во втором — элементами многообразия. Величины, которые образуют дискретное множество состояний, встречаются столь часто, что по крайней мере в более развитых языках для соответствующих понятий всегда имеются особые наименования (и именно потому при построении учения о дискретных величинах математики могли исходить из допущения однородности данных объектов). Напротив, надобность в образовании понятий, соответствующих случаю непрерывных многообразий, встречается сравнительно редко; из немногочисленных примеров многократно протяженных многообразий, встречающихся в обыденной жизни, укажем локализованные ощущения и цвета; гораздо чаще приходится прибегать к рассмотрению и исследованию подобного рода понятий в высших разделах математики.

Отдельные части многообразий могут быть выделены с помощью некоторых признаков или же количественных (квантитативных) различий. С количественной точки зрения сравнение осуществляется в случае дискретных многообразий посредством счета, в случае непрерывных — посредством измерения. Измерение заключается в последовательном прикладывании сравниваемых величин; поэтому возможность измерений обусловлена наличием некоторого способа переносить одну величину, принятую за единицу масштаба, по другой величине. Если такой способ не указан, то сравнивать две величины можно лишь в том случае, когда одна из них является частью другой, и тогда речь может идти лишь о «больше» или «меньше», а не о «сколько». Исследования, которые имеют своим предметом величины такого рода, образуют общего характера, независимую от мероопределения, часть учения о величинах: в ней величины не мыслятся существующими независимо от их положения и выраженными через единицу измерения, а должны быть представляемы как области в некотором многообразии. Такого рода исследования стали крайне необходимыми для многих отраслей математики, в частности в теории многозначных аналитических функций; недостаточное их развитие, несомненно, есть причина того, что знаменитая теорема Абеля, а также результаты, полученные Лагранжем, Пфаффом, Якоби в общей теории дифференциальных уравнений, долгое время не давали своих плодов.

С точки зрения цели, которую мы здесь имеем в виду, из этой общей части учения о протяженных величинах (где не делается никаких допущений, которые не содержались бы в самом понятии) достаточно особо выделить два пункта: первый относится к способу введения понятия многократно протяженной величины, второй касается того, как определение местонахождения в многообразии сводится к установлению ряда количественных (квантитативных) данных, причем выяснено будет и то, какому многообразию приписывается n -кратная протяженность.

2

Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причем от одного состояния определенным способом можно переходить ко всякому другому; тогда все эти состояния образуют просто протяженное или однократно протяженное многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны — вперед и назад. Предположим дальше, что это многообразие в свою очередь может быть переведено в другое, вполне отличное от первого многообразия, притом также совершенно определенным образом, т. е. так, что каждая точка первого многообразия переходит в определенную точку второго; все состояния, которые могут быть получены при подобного рода операциях, образуют дважды протяженное многообразие. Так же образуется и трижды протяженное многообразие: достаточно представить себе, что дважды протяженное многообразие определенным образом переводится в иное, вполне отличное многообразие. Легко понять, как можно продолжить это построение. Если условимся термину «определенный» противопоставлять в качестве противоположного термина «изменяемый», то можно характеризовать наше построение как составление изменяемости $n + 1$ измерений из одной изменяемости n измерений и одной изменяемости одного измерения¹⁾.

3

Теперь я покажу, как, обратно, изменяемость, связанная с некоторой данной областью, может быть разложена на изменяемость одного измерения и изменяемость меньшего числа измерений. Для этой цели представим себе переменную точку на некотором многообразии одного измерения (на этом последнем отсчет ведется от определенной начальной точки, и различные результаты измерения сравнимы между собой) и вообразим, что для каждой точки данного многообразия указывается некоторое положение упомянутой переменной точки с сохранением непрерывности; другими словами, на данном многообразии указывается некоторая непрерывная функция точки и притом такая, которая на некоторой части данного многообразия не может оставаться постоянной²⁾. В таком случае всякая система точек, в которых функция сохраняет постоянное значение, образует непрерывное многообразие меньшего числа измерений, чем данное. Эти многообразия при измене-

¹⁾ «Изменяемость» — *Veränderlichkeit*. Этот термин Риман употребляет как синоним *Mannigfaltigkeit*, с целью облегчения правильного понимания. (Ред. сб. «Об основаниях геометрии».)

²⁾ Нужно напомнить, что у Римана «точка» не есть часть «кривой» или «поверхности», «кривая» не есть часть «поверхности» и т. д. Вообще под «частью» многообразия подразумевается принадлежащее ему многообразие того же измерения. (Ред. сб. «Об основаниях геометрии».)

нии значения функции непрерывно переходят одно в другое; поэтому можно считать, что из одного из них получаются все остальные, причем происходит это, вообще говоря, так, что каждая точка одного переходит в определенную точку другого (случаи исключения, исследование которых существенно, здесь оставляются в стороне). В итоге определение положения на данном многообразии приводится к определению числового значения просто протяженной величины и определению положения на многообразии, протяженность которого меньшей кратности. Легко показать, что это многообразие будет иметь $n - 1$ измерений, если данное многообразие их имеет n . Повторяя указанную операцию n раз, мы сводим определение положения на многообразии n -кратной протяженности к определению числовых значений n просто протяженных величин, т. е. определение положения на данном многообразии (если только такое определение возможно) — к указанию конечного числа числовых данных. Впрочем, существуют и такие многообразия, для которых определение положения требует указания бесконечного ряда или даже непрерывного множества числовых данных. Примером такого рода могут служить многообразия, образованные функциями в данной области, многообразия, образованные контурами геометрических фигур, и т. п.¹⁾

§ 2. Метроопределение, возможное на многообразии в предположении, что линии имеют длины, независимые от их положения, так что каждая линия измерима посредством каждой

После того как построено понятие n -кратно протяженного многообразия и установлено в качестве существенного признака n -мерности, что определение положения на многообразии приводится к определению числовых значений n просто протяженных величин, мы перейдем теперь ко второму из поставленных выше вопросов, а именно к исследованию метрических отношений, возможных на таком многообразии, и к выяснению условий, которые являются достаточными для установления этих отношений. Метрические отношения могут быть исследуемы посредством отвлеченных величин и поставлены во взаимную связь с помощью формул; однако при некоторых предположениях их можно свести к таким отношениям, которые, будучи рассматриваемы каждое в отдельности, допускают определенные геометрические представления, и, следовательно, становится возможным результаты вычислений выражать в геометрической форме. Поэтому, хотя (чтобы стоять на твердой почве) и нельзя вовсе избежать абстрактного исследования с помощью формул, все же результаты этого исследования

¹⁾ Можно сказать, что Риман здесь имеет в виду «функциональные многообразия»: неудобно сказать «функциональные пространства», так как «пространство» у Римана имеет более узкий смысл, чем в наше время. (Ред. сб. «Об основаниях геометрии».)

будут здесь представлены, если можно так выразиться, в геометрическом одеянии. Для того и другого прочное основание заложено в знаменитом сочинении о кривых поверхностях г. тайного советника Гаусса.

1

Мероопределение подразумевает независимость величин от местоположения. Эта независимость может быть понимаема в различных смыслах: первое допущение, которое естественно принять и которое я здесь подвергну дальнейшему рассмотрению, заключается в том, что длины линии не зависят от их положения, так что каждая линия измерима посредством каждой. Если определение положения приведено к определению величин, т. е. положение точки на данном n -кратно протяженном многообразии определяется n переменными величинами x_1, x_2, x_3 и т. д. до x_n , то для определения линии нужно задать величины x как функции некоторой одной переменной. Тогда задача заключается в том, чтобы указать математическую формулу для длины линий. В таком случае неизбежно подразумевать, что каждая из величин x может быть выражена через некоторую единицу. Поставленную задачу я буду исследовать только при некоторых ограничениях. Во-первых, ограничусь рассмотрением таких линий, для которых отношения величин dx (взаимно соответствующих приращений величин x) изменяются непрерывно. Тогда можно разбить линии на такие элементы, в пределах которых отношения величин dx допустимо считать постоянными, и задача наша сводится к тому, чтобы указать общую формулу для линейного элемента ds , выходящего из любой данной точки; эта формула должна, следовательно, содержать величины x и величины dx . Во-вторых, я допущу, что длина линейного элемента остается неизменной с точностью до величин второго порядка, если все его точки испытывают одно и то же бесконечно малое перемещение; отсюда, в частности, вытекает, что, когда все величины dx увеличиваются в одно и то же число раз, то и линейный элемент ds увеличивается во столько же раз¹⁾. При сделанных допущениях линейный элемент сможет быть произвольной однородной функцией первой степен от величин dx , которая не

¹⁾Эту мысль удастся расшифровать, если сделать допущение, что Риман молчаливо предполагает, что «длина» линейного элемента, т. е. расстояние ρ_{AB} между его конечными точками A и B , удовлетворяет требованию

$$\rho_{AB} = \rho_{AC} + \rho_{CB}.$$

Обозначим через $F(x, dx)$ расстояние между точками x и $x + dx$; тогда, согласно сделанному явно предположению, с точностью до величин высших порядков будем иметь $F(x + \delta x, dx) = F(x, dx)$. Отсюда следует при n целом $F(x, ndx) = \sum_{m=1}^n (x + m-1dx, dx) = nF(x, dx)$, и дальше, по непрерывности, получается для всех положительных λ : $F(x, \lambda \alpha x) = \lambda F(x, \alpha x)$. Точно так же, дальше, из требования $\rho_{AB} = \rho_{BA}$ вытекает $F(x, -\alpha x) = F(x - \alpha x, \alpha x) = F(x, \alpha x)$. (Ред. сб. «Об основаниях геометрии».)

изменяется, когда все величины dx меняют знаки, и в которой коэффициенты являются непрерывным функциями величин x . Чтобы прийти к простейшим возможным случаям, я сначала нахожу формулу для $(n - 1)$ -кратно протяженных многообразий, отстоящих от начальной точки линейного элемента повсюду на одно и то же расстояние, т. е. ищу непрерывную¹⁾ функцию точки, которая отличает одно из таких многообразий от другого. Такая функция должна будет во все стороны от начальной точки или уменьшаться, или увеличиваться; я предположу, что она во все стороны увеличивается и, следовательно, в самой точке имеет минимум. Тогда, если только ее первые и вторые производные конечны, дифференциал первого порядка должен обращаться в нуль, а дифференциал второго порядка не может становиться отрицательным; я предположу, что он всегда положительный. Это дифференциальное выражение второго порядка остается постоянным, когда ds остается постоянным, и возрастает в квадратном отношении, когда величины dx и, следовательно, также и ds увеличиваются в одно и то же число раз; поэтому оно $= \text{const} \cdot ds^2$ и, значит, $ds =$ квадратному корню из всегда положительной целой однородной функции второй степени величин dx с коэффициентами — непрерывными функциями величин x . В частности, для пространства, если определять положение точки прямоугольными координатами, мы имеем: $ds = \sqrt{\Sigma(dx^2)}$; пространство, следовательно, подпадает под этот простейший случай. Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвертой степени из дифференциального выражения четвертой степени. Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому я позволяю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задается как квадратный корень дифференциального выражения второй степени.

Дифференциальное выражение рассматриваемого типа может быть преобразовано в другое выражение подобного типа, если n зависимых переменных приравнять некоторым функциям от n новых независимых переменных. Но таким образом нет возможности преобразовать всякое дифференциальное выражение во всякое: действительно, наше выражение содержит $n \frac{n+1}{2}$ коэффициентов, являющихся произвольными функциями независимых переменных; при введении же новых переменных мы сможем удовлетворить

¹⁾ «Непрерывность» Риман здесь понимает в смысле Эйлера и, как можно судить из дальнейшего изложения, представляет рассматриваемую им функцию разложенной в степенной ряд. Об этом же свидетельствует упоминание (см. несколько выше) о коэффициентах. (Ред. сб. «Об основаниях геометрии».)

только n соотношениям, так что лишь n коэффициентов примут данные заранее значения. Поэтому $n \frac{n-1}{2}$ остальных коэффициентов зависят от природы исследуемого многообразия, и для установления отношений между ними требуются еще $n \frac{n-1}{2}$ функций точки на многообразии.

Те многообразия, для которых, как для плоскости и пространства, линейный элемент может быть приведен к виду $\sqrt{\Sigma(dx)^2}$, образуют частный случай изучаемых нами многообразий; они, без сомнения, заслуживают особого наименования, и потому я буду многообразия, для которых квадрат линейного элемента приводится к сумме квадратов независимых дифференциалов, называть плоскими.

Для того чтобы было легче обозреть существенные особенности различных многообразий, представимых в указанной форме, необходимо устранить особенности, возникающие из формы представления, что достигается надлежащим выбором переменных, совершаемым по определенному принципу.

2

Именно, вообразим, что построена система кратчайших линий, выходящих из произвольной начальной точки; тогда положение рассматриваемой переменной точки определится, если будут указаны начальное направление кратчайшей линии, на которой она лежит, и расстояние ее от начальной точки, отсчитываемое по этой кратчайшей линии; достаточно, следовательно, задать отношения величин dx^0 , т. е. величин dx в начале кратчайшей линии, и длины s этой линии. Но вместо dx мы введем линейные комбинации $d\alpha$, составленные из них таким образом, чтобы в начальной точке квадрат линейного элемента равнялся сумме их квадратов; независимыми переменными тогда будут: величина s и отношения величин $d\alpha$; и, наконец, вместо $d\alpha$ введем такие пропорциональные им величины $x_1, x_2, \dots, x_n$, чтобы сумма их квадратов равнялась s^2 . После введения этих переменных для бесконечно малых значений x квадрат линейного элемента примет вид Σdx^2 , причем член следующего порядка будет однородным выражением второй степени от $n \frac{n-1}{2}$ величин $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), (x_1 dx_3 - x_3 dx_1), \dots$, т. е. этот член будет уже бесконечно малой величиной четвертого порядка. Отсюда следует, что мы получим конечную величину, если разделим эту величину на квадрат площади бесконечно малого треугольника, в вершинах которого переменные имеют значения $(0, 0, 0, \dots)$, $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$. Эта величина сохраняет неизменное значение, поскольку величины x и dx содержатся в одних и тех же бинарных линейных формах или же поскольку обе кратчайшие линии от значений 0 к значениям x и от значений 0 к значениям dx лежат в одном и том же плоском элементе, и зависит, следовательно, только от местонахождения и направления этого элемента. Она, очевидно, равна нулю, если рассматриваемое многообразие плоское,

т. е. если квадрат линейного элемента приводится к виду Σdx^2 и может потому служить мерой того, насколько многообразие по данному плоскостному направлению отклоняется от плоского многообразия. Будучи умножена на $-\frac{3}{4}$, она становится равной той величине, которую г. тайный советник Гаусс назвал мерой кривизны поверхности. Уже раньше было отмечено, что для введения мероопределения на n -кратно протяженном многообразии, представимом в указанной выше форме, необходимо задать $n \frac{n-1}{2}$ функций точки; поэтому если в каждой точке задается мера кривизны, соответствующая каждому из $n \frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений, то тем самым определяются и метрические отношения на многообразии. Исключительным представляется лишь тот случай, когда между мерами кривизны имеются тождественные соотношения (что, вообще говоря, не имеет места). Таким образом, на многообразиях, линейный элемент которых представляется как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени, мероопределение может быть введено совершенно независимо от выбора переменных величин.

По совершенно аналогичному пути можно идти к поставленной цели и в том случае, если линейный элемент многообразия дается менее простым выражением, например в виде корня четвертой степени. В этом случае, вообще говоря, линейный элемент не может быть приведен к виду корня квадратного из суммы квадратов дифференциальных выражений, и в выражении для квадрата линейного элемента отклонение от плоскости было бы бесконечно малой величиной второго порядка, тогда как для ранее рассмотренных многообразий оно четвертого порядка. Уместно было бы сказать, что последние упомянутые многообразия являются «плоскими в бесконечно малых частях». Но наиболее важное с установленной нами точки зрения свойство этих многообразий, обуславливающее то, почему исключительно они одни здесь исследуются, заключается в том, что метрические отношения в случае двукратной протяженности допускают геометрическое истолкование посредством поверхностей, а в случае многократной протяженности могут быть сведены к рассмотрению метрических отношений на содержащихся в них поверхностях. К последнему замечанию необходимо теперь дать некоторые краткие пояснения.

3

При рассмотрении поверхностей следует различать внутренние метрические отношения, в которые входят лишь длины путей на самой поверхности, и отношения, характеризующие взаимное положение поверхностей и точек, лежащих вне их. От этих последних «внешних» отношений можно отвлечься следующим образом: станем изменять поверхности так, чтобы длины линий, на них лежащих, оставались неизменными, т. е. так, чтобы, будучи как

удовно изгибаемы, поверхности не подвергались растяжениям или сжатиям, и все получаемые в результате изгибаний одна из другой поверхности пусть рассматриваются как одинаковые.

Так, например, цилиндрические или конические поверхности существенно не отличны от плоскости, так как могут быть получены из плоскости посредством одного лишь изгибания, причем внутренние метрические отношения остаются неизменными и все теоремы, касающиеся этих отношений, т. е. вся планиметрия, остаются в силе; напротив, названные поверхности существенно отличны от сферы, которую без растяжений нельзя превратить в плоскость. Согласно предыдущему, в каждой точке внутренние метрические отношения дважды протяженной величины (если только линейный элемент может быть представлен в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени, что имеет место в случае поверхностей) характеризуются мерой кривизны. Оказывается, что в случае поверхностей этой величине можно дать наглядное истолкование: она равняется произведению двух главных кривизн в рассматриваемой точке; можно также сказать, что произведение ее на площадь бесконечно малого треугольника, составленного из кратчайших линий, равняется половине разности между суммой его углов и двумя прямыми углами (в долях радиуса). Первое определение подразумевало бы теорему: произведение главных радиусов кривизны при изгибании поверхности остается неизменным; второе — другую теорему: в одной и той же точке поверхности разность между суммой углов бесконечно малого треугольника и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника. Чтобы дать геометрическое истолкование мере кривизны n -кратно протяженного многообразия в данной точке относительно данного через нее проходящего плоского элемента, нужно исходить из того, что кратчайшая линия, выходящая из данной начальной точки, определяется полностью, если указано ее начальное направление. Отсюда следует, что мы получим совершенно определенную поверхность, если продолжим все кратчайшие линии, выходящие из данной точки и имеющие начальные направления, лежащие в данном плоском элементе. Эта поверхность имеет в данной точке определенную меру кривизны, каковая и есть мера кривизны n -кратно протяженного многообразия в данной точке относительно данного плоского элемента.

4

Прежде чем мы сделаем применение нашей теории к случаю пространства, необходимо еще изложить ряд соображений, касающихся общего случая плоских многообразий, т. е. таких многообразий, для которых квадрат линейного элемента представляется в виде суммы квадратов полных дифференциалов. В случае плоского n -кратно протяженного многообразия мера кривизны в каждой точке относительно любого направления равна нулю; согласно предшествующему исследованию, для того чтобы метрические

отношения были определены, достаточно знать, что в каждой точке относительно $n \frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений (таких, что соответствующие меры кривизны независимы между собой) мера кривизны равна нулю. Многообразия, для которых мера кривизны везде равна нулю, представляют собой частный случай многообразий, для которых мера кривизны всюду постоянна. Многообразия с постоянной мерой кривизны могут быть характеризованы также тем свойством, что фигуры могут в них перемещаться без растяжений и сжатий. В самом деле, очевидно, что фигуры не смогли бы быть как угодно перемещаемы и вращаемы в многообразии, если бы мера кривизны не оставалась неизменной в каждой точке по любому направлению. С другой стороны, метрические отношения на многообразии полностью определяются мерой кривизны; поэтому если в одной точке по всем направлениям мера кривизны остается той же, что и во всякой другой точке, то во всякой точке можно выполнить те же построения, что и в начальной точке, так что на многообразии с постоянной мерой кривизны фигуры способны занимать совершенно произвольные положения. Метрические отношения на их многообразиях зависят только от числового значения меры кривизны; по поводу аналитического представления я позволю себе заметить, что, если это числовое значение обозначено через α , выражение для линейного элемента может быть приведено к виду

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x^2} \sqrt{\Sigma dx^2}.$$

5

Чтобы дать геометрическую иллюстрацию, рассмотрим поверхности с постоянной мерой кривизны. Легко убедиться, что поверхности, у которых кривизна положительная, всегда разворачиваются на сферу, радиус которой равен единице, деленной на корень квадратный из меры кривизны. Чтобы обозреть все множество этих поверхностей, придадим одной из них вид сферы, а остальным — вид поверхностей вращения, которые касаются этой сферы по экватору. Поверхности, у которых мера кривизны, больше, чем у сферы, будут касаться сферы изнутри и будут иметь такой вид, как внешняя (отвернутая от оси) часть поверхности тора: их можно было бы развернуть на зоны сфер, меньшего радиуса, но при разворачивании они покрыли бы зоны сфер больше одного раза. Поверхности с мерой кривизны, меньшей, чем мера кривизны начальной сферы, получаются, если из сфер большего радиуса вырезать кусок, ограниченный двумя большими полукругами, и соединить линии разреза. Поверхность с мерой кривизны нуль будет цилиндр, касающийся сферы по экватору. Поверхности с отрицательной мерой кривизны будут касаться этого цилиндра извне и иметь такой вид, как внутренняя (повернутая к оси) часть поверхности тора.

Если захотим по всем этим поверхностям перемещать куски поверхности (как тела перемещаются в пространстве), то окажется, что для всех поверхностей такие перемещения возможны без растяжений и сжатий. Поверхности с положительной мерой кривизны можно изогнуть так, что произвольные перемещения кусков поверхностей смогут после этого осуществляться уже без изгибаний: достаточно развернуть их на соответствующие сферы. Для поверхностей с отрицательной мерой кривизны это невозможно. Кроме отмеченной независимости кусков поверхностей от положения, в случае поверхности с мерой кривизны нуль имеет место еще особого рода независимость направлений от положения, чего нет для других поверхностей.

§ 3. Применение к пространству

1

Установим теперь условия, необходимые и достаточные для определения метрических отношений в пространстве. При этом будем исходить из изложенных выше общих результатов, касающихся мероопределения в n -кратно протяженной величине, и допустим независимость линий от положения и представимости линейного элемента в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени, т. е. допустим, что пространство «плоско в бесконечно малом».

Во-первых, как ясно из предыдущего, требуемые условия сводятся к тому, чтобы мера кривизны в каждой точке относительно трех плоскостных направлений равнялась нулю. Поэтому нужно считать, что мероопределение в пространстве задано, если установлено, что сумма углов всякого треугольника равна двум прямым.

Во-вторых, следуя Евклиду, допустим, что не только линии, но и тела существуют независимо от их положения в пространстве, откуда вытекает, что мера кривизны пространства всюду постоянна. В таком случае сумма углов в любом треугольнике определена, если определена в каком-нибудь одном. Наконец, в-третьих, можно было бы, вместо того чтобы допускать независимость длины линий от места и направления, допустить независимость их длины и направления от места. Приняв эту точку зрения, мы приходим к тому, что перемещения или изменения местоположения являются комплексными величинами, выражающимися через три независимые единицы.

2

Излагая предшествующие соображения, мы начали с того, что отделили отношения протяженности (или отношения взаимного расположения) от метрических отношений, и пришли к заключению, что при одних и тех же

отношениях протяженности мыслимы различные метрические отношения; затем установили системы простых метрических отношений, которыми полностью определяется метрика пространства и необходимым следствием которых являются все теоремы геометрии. Остается еще выяснить, обеспечиваются ли опытной проверкой эти простые отношения, и если обеспечиваются, то в какой степени и в каком объеме? Между отношениями протяженности и метрическими отношениями с этой точки зрения имеется существенное различие: именно, поскольку для отношений протяженности возможно лишь дискретное множество различных случаев, результаты опытной проверки не могут не быть вполне точными (хотя, с другой стороны, не могут быть вполне достоверными), тогда как для метрических отношений множество возможных случаев непрерывно, и потому результатом опытной проверки неизбежно неточные, какова бы ни была вероятность того, что они приближенно точны. Это обстоятельство имеет большое значение, когда речь идет о распространении эмпирического опыта за пределы непосредственно наблюдаемого — в направлении неизмеримо большого или неизмеримо малого: за пределами непосредственно наблюдаемого метрические отношения становятся все менее точными, чего нельзя сказать об отношениях протяженности.

При распространении пространственных построений в направлении неизмеримо большого следует различать свойства неограниченности и бесконечности: первое из них есть свойство протяженности, второе — метрическое свойство. То, что пространство есть неограниченное трижды протяженное многообразие, является допущением, принимаемым в любой концепции внешнего мира; в полном согласии с этим допущением область внешних восприятий постоянно расширяется, производятся геометрические построения в поисках тех или иных объектов, и допущение неограниченности ни разу не было опровергнуто. Поэтому неограниченности пространства свойственна гораздо большая эмпирическая достоверность, чем какому бы то ни было другому продукту внешнего восприятия. Но отсюда никоим образом не следует бесконечность пространства; напротив, если допустим независимость тел от места их нахождения, т. е. припишем пространству постоянную меру кривизны, то придется допустить конечность пространства, как бы мала ни была мера кривизны, лишь бы она была положительной. Если бы мы продолжили кратчайшие линии, начальные направления которых лежат в некотором плоскостном элементе, то получили бы неограниченную поверхность с постоянной положительной мерой кривизны, т. е. такую поверхность, которая в плоском трижды протяженном многообразии приняла бы вид сферы и, следовательно, является конечной.

3

Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом — вопросы *праздные*. Иначе обстоит дело с вопросами о неизмеримо малом. От той точности, с которой нам удастся проследить явления в бесконечно малом, существенно зависит наше знание причинных связей. Успехи в познании механизма внешнего мира, достигнутые на протяжении последних столетий, обусловлены почти исключительно благодаря точности того построения, которое стало возможно в результате открытия анализа бесконечно малых и применения основных простых понятий, которые были введены Архимедом, Галилеем и Ньютоном и которыми пользуется современная физика. В тех же областях естествознания, где еще отсутствуют основные понятия, которые позволили бы произвести аналогичные построения, явления с целью установления причинных связей исследуются в пространственном бесконечно малом, насколько это осуществимо посредством микроскопа. Поэтому вопросы о метрических отношениях пространства в неизмеримо малом не принадлежат к числу *праздных*.

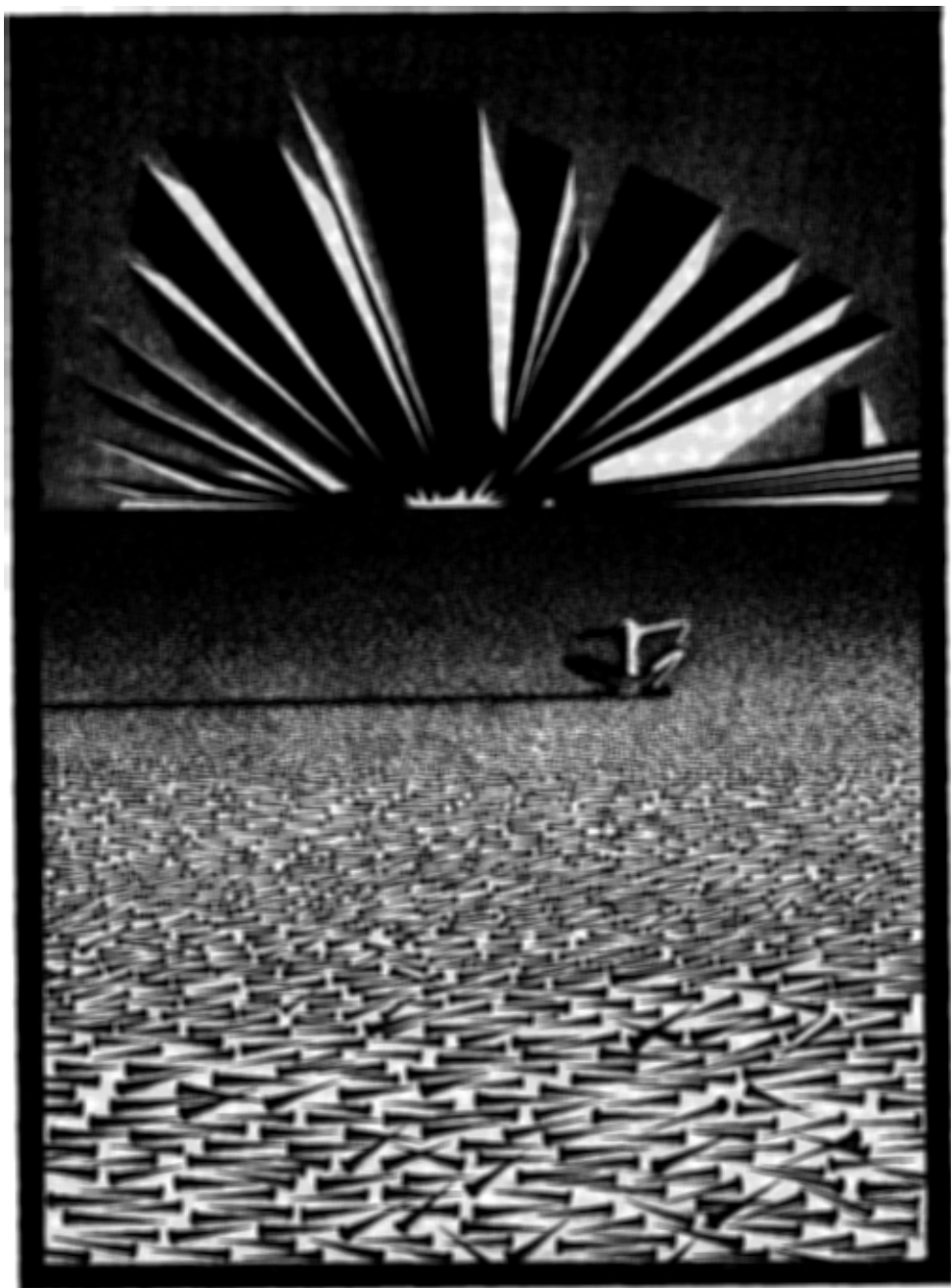
Если допустим, что тела существуют независимо от места их нахождения, так что мера кривизны везде постоянна, то из астрономических наблюдений следует, что она не может быть отлична от нуля; или если она отлична от нуля, то по меньшей мере можно сказать, что часть Вселенной, доступная телескопам, ничтожна по сравнению со сферой той же кривизны. Если же такого рода независимость тел от места их нахождения не отвечает действительности, то из метрических отношений в большом нельзя заключать о метрических отношениях в бесконечно малом: в таком случае в каждой точке мера кривизны может по трем направлениям иметь какие угодно значения, лишь бы в целом кривизна доступных измерению частей пространства заметно не отличалась от нуля. Еще более сложные соотношения имели бы место, если бы мы отказались от допущения о представимости линейного элемента в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени. Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления.

Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве, и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом

понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведенное в настоящей работе, именно, имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день.



Фоменко А. Т.
От хаоса к порядку

Пространство и время¹⁾

А. Пуанкаре²⁾

Пространство

Скрытые аксиомы

Являются ли аксиомы, явно формулируемые в руководствах, единственными основаниями геометрии? Мы можем убедиться в противном, замечая, что даже если одну за другой отвергнуть эти аксиомы, все-таки еще останутся нетронутыми некоторые предложения, общие теориям Евклида, Лобачевского и Римана. Эти предложения должны опираться на некоторые предпосылки, которые геометры допускают в скрытой форме. Интересно попытаться выделить их из классических доказательств.

Стюарт, Милль, утверждал, что всякое определение содержит аксиому, так как, определяя, скрыто утверждают существование определяемого предмета. Это значило бы заходить слишком далеко; редко бывает, чтобы математики давали определение, не доказав существования определяемого объекта; если же они избавляют себя от этого труда, то обыкновенно в тех случаях, когда читатель сам легко может сделать соответствующее дополнение. Но не следует забывать, что слово «существование» имеет различный смысл тогда, когда речь идет о математическом объекте, и тогда, когда вопрос касается материального предмета. Математический объект существует, если его определение не включает противоречия ни в самом себе, ни с предложениями, допущенными раньше.

Но если замечание Стюарта Милля не может быть приложено ко всем определениям, оно тем не менее остается справедливым для некоторых из них. Например, плоскость иногда определяют так: плоскость есть поверхность такого рода, что прямая, соединяющая две любые точки ее, укладывается целиком на этой поверхности.

Это определение, очевидно, скрывает в себе новую аксиому; правда, можно было бы его изменить, и это было бы лучше, но тогда надо было явно указать эту аксиому.

¹⁾Раздел из книги А. Пуанкаре «Наука и гипотеза», посвященный неевклидовым геометрическим системам (см. в книге Пуанкаре А. О науке.— М.: Наука, 1983, с. 36–41).

²⁾Анри Пуанкаре (1854–1912) — выдающийся французский математик, внесший существенный вклад в создание и развитие специальной теории относительности.

Другие определения могут дать повод к размышлениям, не менее важным.

Таково, например, определение равенства двух фигур: две фигуры равны, когда их можно наложить одну на другую. Чтобы сделать это, надо одну из них перемещать до тех пор, пока она не совпадет с другой; но как надо ее перемещать? Если мы зададим этот вопрос, то, без сомнения, нам ответят, что надо сделать это, не деформируя ее, — как если бы дело шло о неизменяемом твердом теле. Но тогда порочный круг будет очевиден. Фактически это определение ничего не определяет; оно не имело бы никакого смысла для существа, обитающего в мире, где имеются только жидкости. Если оно кажется нам ясным, то просто потому, что мы привыкли к свойствам реальных твердых тел, которые не отличаются значительно от свойств идеальных твердых тел, сохраняющих все свои размеры неизменными.

Между тем, как ни несовершенно это определение, оно скрывает в себе некоторую аксиому.

Возможность движения неизменной фигуры не есть истина, очевидная сама по себе; порядок очевидности ее во всяком случае не превышает порядка очевидности постулата Евклида и несравним с порядком очевидности аналитических априорных суждений.

Впрочем, изучая геометрические определения и доказательства, мы видим, что приходится допустить без доказательства не только возможность этого движения, но и еще некоторые из его свойств. И прежде всего — то, которое вытекает из определения прямой линии. Ей дано много несовершенных определений, но истинным является следующее, подразумеваемое во всех доказательствах, где используется прямая линия:

«Может случиться, что движение неизменной фигуры будет таково, что все точки некоторой линии, принадлежащей этой фигуре, остаются неподвижными, между тем как все точки, расположенные вне этой линии, движутся. Подобная линия будет называться прямой». В этой формулировке мы намеренно отделили определение от аксиомы, которую оно скрывает в себе.

Многие из доказательств — как, например, доказательства равенства треугольников, доказательство возможности опустить перпендикуляр из точки на прямую — предполагают предложения, которые прямо не указываются, так как они требуют допущения возможности переносить фигуру в пространстве определенным образом.

Четвертая геометрия. Среди этих скрытых аксиом, мне кажется, есть одна, которая заслуживает некоторого внимания, так как, опуская ее, можно построить четвертую геометрию, столь же свободную от внутренних противоречий, как и геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Чтобы доказать, что всегда можно восстановить из точки A перпендикуляр к прямой AB , рассматривают прямую AC , вращающуюся около точки A и сначала сливающуюся с неподвижной прямой AB , ее поворачивают около A до тех пор, пока она не образует продолжения AB .

Таким образом допускаются два предположения: во-первых, что подобное вращение возможно и, во-вторых, что можно продолжать его до тех пор, пока две прямые не составят продолжение одна другой. Если мы допустим первое и откинем второе, то придем к ряду теорем, еще более странных, чем теоремы Лобачевского и Римана, но в такой же степени свободных от противоречия.

Я приведу только одну из этих теорем и притом не из самых странных: *действительная прямая может быть перпендикулярна сама к себе.*

Теорема Ли. Число аксиом, скрытым образом введенных в классические доказательства, больше, чем это необходимо. Было бы интересно свести это число к минимуму. Можно спросить себя сначала, осуществимо ли это желание — не беспредельно ли и число необходимых аксиом и число воображаемых геометрий. В этого рода исследованиях первое место занимает теорема Софуса Ли. Ее можно выразить так:

Предположим, что допускаются следующие положения:

1. Пространство имеет n измерений.
2. Движение неизменяемой фигуры возможно.
3. Необходимо p условий, чтоб определить положение этой фигуры в пространстве.

Число геометрий, совместимых с этими положениями, будет ограниченное.

Я могу даже прибавить, что если n дано, то для p можно указать высший предел.

Следовательно, если допустить возможность движения неизменяемой фигуры, то можно будет придумать лишь конечное число (и даже довольно ограниченное) геометрических систем трех измерений.

Геометрии Римана. Между тем этот результат, по-видимому, находится в противоречии с заключениями Римана, так как этот ученый построил бесчисленное множество различных геометрий (та, которой обыкновенно дают его имя, есть не более чем частный случай).

Все зависит, говорит Риман, от способа, которым определяют длину кривой. Но существует бесконечное множество способов определять эту длину, и каждый из них может сделаться точкой отправления новой геометрии. Это совершенно верно; но большинство этих определений несовместимо с движением неизменяемой фигуры, которое предполагается возможным в теореме Ли. Эти геометрии Римана, столь интересные с различных точек зрения, могут быть лишь чисто аналитическими, и они не поддаются доказательствам, которые были бы аналогичны евклидовым.

Геометрии Гильберта. Наконец, Веронезе и Гильберт придумали новые, еще более странные геометрии, которые они называли *неархимедовыми*. Они построили их, устранив аксиому Архимеда, в силу которой любая данная протяженность, умноженная на целое достаточно большое число, в конечном

счете превзойдет любую данную протяженность, сколь бы велика она ни была. На неархимедовой прямой существуют все точки нашей обычной геометрии, но имеются множества других, которые вставляются между ними, так что между двумя отрезками, которые геометры старой школы рассматривали как смежные, оказывается возможным поместить множество новых точек. Одним словом, неархимедовы пространства уже не являются более непрерывностью второго порядка, если применять язык предыдущей главы, они суть непрерывность третьего порядка.

О природе аксиом. Большинство математиков смотрят на геометрию Лобачевского как на простой логический курьез; но некоторые из них идут дальше. Раз возможно несколько геометрий, то достоверно ли, что наша геометрия есть истинная? Без сомнения, опыт учит нас, что сумма углов треугольника равна двум прямым; но это потому, что мы оперируем треугольниками слишком малыми; разность, по Лобачевскому, пропорциональна площади треугольника; не может ли она сделаться заметной, когда мы будем оперировать большими треугольниками или когда наши измерения сделаются более точными? Таким образом, евклидова геометрия была бы только временной геометрией.

Чтобы обсудить это мнение, мы должны сначала спросить себя, в чем состоит природа геометрических аксиом. Не являются ли они синтетическими априорными суждениями, как говорил Кант?

Будь это так, они навязывались бы нам с такой силой, что мы не могли бы ни вообразить себе положение противоположного содержания, ни основать на нем теоретическое построение. Неевклидовых геометрий не могло бы быть.

Чтобы убедиться в этом, возьмем настоящее синтетическое априорное суждение, например то, которое, как мы видели в первой главе, играет первенствующую роль: *если теорема верна для числа 1 и если доказано, что раз она справедлива для n , то она верна и для $n + 1$; в таком случае она будет справедлива для всех положительных целых чисел.*

Попытаемся затем отвлечься от этого положения и, откинув его, построить ложную арифметику по аналогии с неевклидовой геометрией. Это нам не удастся. Сначала было даже стремление рассматривать эти суждения как аналитические.

С другой стороны, обратимся снова к нашим воображаемым существам без толщины; могли ли бы мы допустить, чтобы эти существа, если бы их ум был устроен по образу нашего, приняли евклидову геометрию, которая противоречила бы всему их опыту?

Итак, не должны ли мы заключить, что аксиомы геометрий суть истины экспериментальные? Но над идеальными прямыми или окружностями не экспериментируют; это можно делать только над материальными объектами. К чему же относятся опыты, которые служили бы основанием геометрии?

Ответ ясен. Выше мы видели, что рассуждения ведутся постоянно так, как если бы геометрические фигуры были подобны твердым телам. Следовательно, вот что заимствовала геометрия у опыта: свойства твердых тел.

Свойства света и его прямолинейное распространение также были поводом, из которого вытекли некоторые предложения геометрии, в частности предложения проективной геометрии; так что с этой точки зрения можно было бы сказать, что метрическая геометрия есть изучение твердых тел, а проективная геометрия — изучение света.

Но трудность остается в силе, и она непреодолима. Если бы геометрия была опытной наукой, она не была бы наукой точной и должна была бы подвергаться постоянному пересмотру. Даже более, она немедленно была бы уличена в ошибке, так как мы знаем, что не существует твердого тела абсолютно неизменного.

Итак, *геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами*. Они суть *условные положения* (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы *руководствуемся* опытными фактами, но самый выбор остается *свободным* и ограничен лишь необходимостью избегать всякого противоречия. Поэтому постулаты могут оставаться *строго* верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближенными.

Другими словами, *аксиомы геометрии* (я не говорю об аксиомах арифметики) *суть не более чем замаскированные определения*.

Если теперь мы обратимся к вопросу, является ли евклидова геометрия истинной, то найдем, что он не имеет смысла. Это было бы все равно, что спрашивать, какая система истинна — метрическая или же система со старинными мерами, или какие координаты вернее — декартовы или же полярные. Никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; та или иная геометрия может быть только *более удобной*. И вот, евклидова геометрия есть и всегда будет наиболее удобной по следующим причинам:

1. Она проще всех других; притом она является таковой не только вследствие наших умственных привычек, не вследствие какой-то, я не знаю, непосредственной интуиции, которая нам свойственна по отношению к евклидову пространству; она наиболее проста и сама по себе, подобно тому как многочлен первой степени проще многочлена второй степени; формулы сферической тригонометрии сложнее формул прямолинейной тригонометрии, и они показались бы еще более сложными для аналитика, который не был бы знаком с геометрическими обозначениями.

2. Она в достаточной степени согласуется со свойствами реальных твердых тел, к которым приближаются части нашего организма и наш глаз и на свойстве которых мы строим наши измерительные приборы.

Выводы. Мы видим, что опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии; но было бы ошибкой заключить, что геометрия — хотя бы отчасти — является экспериментальной наукой.

Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное — и весьма грубо приближенное! — значение. Она была бы только наукой о движении твердых тел. Но на самом деле она не занимается реальными твердыми телами; она имеет своим предметом некие идеальные тела, абсолютно неизменные, которые являются только упрощенным и очень отдаленным отображением реальных тел.

Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать.

Предмет геометрии составляет изучение лишь частной «группы» перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме (*dans notre esprit*), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждений. Надо только среди всех возможных групп выбрать ту, которая служила бы, так сказать, *эталон*ом, с которым мы соотносили бы реальные явления. Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее *удобна*.

Читатель заметит, что я был бы в состоянии описывать фантастические миры, которые я представлял себе выше, *не переставая пользоваться языком обыкновенной геометрии*.

И в самом деле, мы не изменили бы его, даже если бы были перенесены в такой мир.

Существа, получившие там свое развитие, нашли бы без сомнения более удобным создать геометрию, отличную от нашей, которая лучше соответствовала бы их впечатлениям. Что же касается нас, то наверное даже при наличии *тех же* впечатлений мы нашли бы более удобным не изменять наших привычек.

Пространство и время¹⁾

Одной из причин, побудивших меня вернуться к вопросу, которым я занимался неоднократно, является происшедший недавно переворот в наших взглядах на механику. Разве принцип относительности, как его понимает Лоренц, не должен заставить нас принять совершенно новые представления о пространстве и времени и разве он не заставит нас тем самым оставить уже окончательно установленные, казалось бы, выводы? Разве мы не говорили, что геометрия была создана нашим умом, конечно, в связи с опытом, но не из опыта, как нечто принудительно навязанное им, так что, однажды построенная, она уже недоступна никакой проверке, не боится никаких

¹⁾ Данный раздел является второй главой из книги А. Пуанкаре «Последние мысли» (см. в книге Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983, с. 420–430).

новых покушений со стороны опыта? И, однако, не кажется ли, что опыты, на которых основана новая механика, поколебали и геометрию? Чтобы разобратся во всем этом, я должен кратко напомнить некоторые из основных идей, которые я пытался развить в моих прежних работах.

Прежде всего я устранию понятие о мнимом чувстве пространства, которое будто бы позволяет нам локализовать наши ощущения в каком-то совершенно готовом пространстве, понятие о котором существует до всякого опыта и которое до всякого опыта уж имеет все свойства пространства геометра. Что такое в сущности это мнимое чувство пространства? Какой опыт должны мы поставить, когда желаем убедиться, обладает ли им какое-нибудь животное? Мы помещаем поблизости от этого животного различные вещи, которых оно очень хочет, и наблюдаем, сумеет ли оно произвести сразу, без пробы, движения, необходимые для достижения этих вещей. А как убеждаемся мы в том, что другие люди обладают этим замечательным чувством пространства? Точно так же, замечая, что они способны сокращать надлежащим образом свои мускулы и достигать предметов, о присутствии которых им сообщили определенные ощущения. Наконец, как уверяемся мы в наличии этого чувства пространства в нашем собственном сознании? Здесь также, имея различные ощущения, мы знаем, что в состоянии произвести движения, позволяющие нам достигнуть предметов, в которых мы видим источник этих ощущений, и тем самым воздействовать на наши ощущения, заставить их исчезнуть или сделать их более интенсивными. Вся разница заключается лишь в том, что для этого нам нет надобности действительно производить эти движения, достаточно лишь представить их себе. Это чувство пространства, которого будто бы не в силах выразить интеллект, могло бы быть разве лишь какой-то особенной силой, заключенной в глубинах подсознательного, а в таком случае сила эта могла бы стать нам известной только через вызываемые ею действия; но эти действия и суть как раз те движения, о которых я только что говорил. Таким образом, чувство пространства сводится, к некоторой постоянной ассоциации между определенными ощущениями и определенными движениями или к представлению этих движений (нужно ли во избежание постоянно повторяющихся, несмотря на мои неоднократные объяснения, недоразумений сказать еще раз, что я под этим понимаю не представление этих движений в пространстве, а представление сопутствующих им ощущений?).

Почему же и в какой мере пространство относительно? Ясно, что если бы наше тело и все окружающие нас предметы, равно как и наши измерительные инструменты, были перенесены в другую часть пространства, причем их взаимные положения не изменились бы, то мы бы этого вовсе не заметили. В действительности это и имеет место, ибо мы уносимся, даже не догадываясь об этом, вместе с Землей в ее движении. Точно так же мы ничего не заметили бы, если бы все предметы увеличились в одно и то же число раз и если бы то же самое произошло с нашими измерительными инструмен-

тами. Таким образом, мы не только не можем знать абсолютного положения в пространстве какого-либо предмета, так что сами эти слова «абсолютное положение в пространстве» не имеют никакого смысла и следует говорить лишь о его относительном положении по отношению к другим предметам, но и выражения «абсолютная величина предмета», «абсолютное расстояние между двумя точками» также не имеют никакого смысла; можно говорить лишь об отношении двух величин, об отношении двух расстояний. Больше того, предположим, что все предметы деформируются согласно некоторому закону, более сложному, чем предыдущий, согласно, скажем, совершенно произвольному закону, и предположим, далее, что в то же самое время наши измерительные инструменты деформируются по тому же самому закону. Мы и этого не могли бы заметить, так что пространство гораздо более относительно, чем это обыкновенно думают. Мы можем заметить лишь те изменения формы предметов, которые отличаются от одновременных изменений формы наших измерительных инструментов.

Наши измерительные инструменты представляют собой твердые тела или же состоят из нескольких твердых тел, подвижных друг относительно друга, относительные перемещения которых отмечаются особыми реперами, помещенными на этих телах, или указателями, перемещающимися по градуированным шкалам; пользование инструментом сводится к отсчету этих показаний. Мы, таким образом, можем узнать, переместился ли наш инструмент наподобие неизменного твердого тела или нет, так как в этом случае рассматриваемые отсчеты не должны были измениться. В состав наших инструментов входят также и оптические трубы, с помощью которых мы производим отсчеты, таким образом, можно сказать, что лучи света тоже принадлежат к нашим инструментам.

Способна ли наша интуиция пространства дать нам нечто большее? Мы видели, что она сводится к некоторой постоянной связи между определенными ощущениями и определенными движениями. Это значит, что те члены, с помощью которых мы производим эти движения, играют, так сказать, тоже роль измерительных инструментов. Инструменты эти, менее точные, чем инструменты ученого, достаточны, однако, для нашей повседневной жизни. Именно с их помощью ребенок или первобытный человек измерили или, вернее, построили себе пространство, которым они довольствуются в нуждах своей повседневной жизни. Наше тело — наш первый измерительный инструмент. Как и прочие инструменты, оно состоит из нескольких твердых частей, подвижных друг относительно друга, причем определенные ощущения предупреждают нас об относительных перемещениях этих частей. Благодаря этому мы, как и в случае искусственных инструментов, можем узнать, переместилось ли наше тело наподобие неизменного твердого тела или нет. Словом, все наши инструменты, как те, которыми ребенок обязан природе, так и те, которыми ученый обязан своему гению, имеют в качестве основных частей твердое тело и световой луч.

Спрашивается, имеет ли при таких условиях пространство геометрические свойства, независимые от инструментов, которые служат для его измерения? Пространство может, как мы сказали, подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию. Таким образом, пространство в действительности аморфно; оно рыхлая, лишенная твердости форма, которую можно приложить ко всему; оно не имеет своих собственных свойств. Заниматься геометрией — это значит изучать свойства наших инструментов, т. е. свойства твердого тела.

Но в таком случае, поскольку наши инструменты несовершенны, геометрия, казалось бы, должна изменяться со всяким новым усовершенствованием инструментов. Конструкторы должны были бы иметь право извещать в своих проспектах: «Предлагаю пространство гораздо более высокого качества, чем пространства моих конкурентов, гораздо более простое, более удобное, более комфортабельное». Но мы знаем, что это не имеет места. Хотелось бы сказать, что геометрия — это учение о свойствах, которые имели бы инструменты, если бы они были совершенными. Но для этого надо было бы знать, что представляет собой совершенный инструмент, а мы этого не знаем, потому что таких инструментов нет и потому что мы могли бы определить идеальный инструмент лишь с помощью геометрии, т. е. впадая в порочный круг. Поэтому мы скажем, что геометрия представляет собой исследование определенной системы законов, мало отличающихся от тех, которым подчиняются в действительности наши инструменты, но гораздо более простых, законов, которым реально не подчиняется никакой естественный предмет, но которые постижимы умом. В этом смысле геометрия есть некоторое условное соглашение, своего рода компромисс между нашей любовью к простоте и нашим желанием не слишком удаляться от того, что нам сообщают наши инструменты. Это соглашение определяет одновременно как пространство, так и совершенный инструмент.

То, что мы сказали о пространстве, применимо и ко времени. Говоря это, я имею в виду не время, как его понимают ученики Бергсона, не ту длительность, которая не является чистым количеством, лишенным всякого качества, но которая является, так сказать, самим качеством, длительность, различные части которой, взаимно проникая друг друга, качественно друг от друга отличаются. Эта длительность не могла бы быть инструментом ученого; она могла бы стать им, лишь подвергнувшись коренному преобразованию, лишь «опространствившись», как говорит Бергсон. Действительно, необходимо, чтобы она *стала* измеримой; то, что недоступно измерению, не может быть и объектом науки. Но измеримое время по существу также относительно. Если бы все процессы в природе замедлились и если бы то же самое произошло с нашими часами, то мы бы ничего не заметили; это произошло бы при любом законе замедления, лишь бы оно было одним и тем же для всех решительно процессов и для всех часов. Таким образом, свойства времени —

только свойства часов, подобно тому как свойства пространства — только свойства измерительных инструментов.

Это еще не все. Психологическое время, длительность Бергсона, из которой произошло время ученых, служит для классификации явлений, происходящих в одном и том же сознании. Оно непригодно для классификаций двух психологических явлений, происходящих в двух различных сознаниях, а тем более двух физических явлений. Допустим, что некоторое событие происходит на Земле, другое — на Сириусе. Как узнать, происходит ли первое раньше второго, одновременно с ним или после него? Это может быть лишь делом условного соглашения.

Можно, однако, рассматривать относительность времени и пространства с совершенно иной точки зрения. Рассмотрим законы, которым подчиняется мир; они могут быть выражены с помощью дифференциальных уравнений. Мы констатируем, что эти уравнения не изменяются, если так изменить прямоугольную координатную систему, что она остается неподвижной, точно так же, как и при изменении начала времени или при замене прямоугольной системы неподвижных осей координат такими же, но подвижными осями, движущимися прямолинейно и равномерно. Позвольте мне назвать относительность психологической, если она рассматривается с первой точки зрения, и физической, если она рассматривается со второй точки зрения. Вы сразу же видите, что физическая относительность гораздо уже психологической. Мы сказали, например, что ничего не изменится, если умножить все длины на одну и ту же постоянную величину, лишь бы умножение распространялось на все предметы и на все инструменты. Но если мы умножим все координаты на одну и ту же величину, то возможно, что наши дифференциальные уравнения изменятся. Они изменятся, например, если мы введем подвижные вращающиеся оси, потому что в этом случае придется ввести в уравнения простую и составную центробежные силы. Таким именно образом опыт Фуко показал наглядно вращение Земли. В этом есть нечто, противоречащее нашим основным идеям об относительности пространства, идеям, основанным на психологической относительности. Это несогласие смущало многих философов.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. Все части мира связаны между собой, и как ни далек Сириус, он все-таки несколько действует на то, что происходит у нас. Поэтому если мы захотим написать дифференциальные уравнения, управляющие миром, то они или не будут точными или же должны будут зависеть от состояния всего мира. Не будет отдельной системы уравнений для мира Земли, а другой — для мира Сириуса; будет одна система, применимая ко всей Вселенной.

Но мы не наблюдаем непосредственно дифференциальных уравнений; мы наблюдаем лишь конечные уравнения, которые являются непосредственными выражениями наблюдаемых явлений и из которых дифференциальные уравнения получаются дифференцированием. Дифференциальные уравне-

ния не изменяются, когда производят одну из тех замен координатных осей, о которых мы говорили выше. Иное происходит в случае конечных уравнений: изменение осей заставило бы нас изменить постоянные интегрирования. Таким образом, принцип относительности применяется не непосредственно к наблюдаемым, конечным уравнениям, но к уравнениям дифференциальным. Но как перейти от конечных уравнений к тем дифференциальным уравнениям, интегралами которых они являются? Необходимо знать несколько частных интегралов, отличающихся друг от друга величинами постоянных интегрирования, и исключить эти постоянные дифференцированием. Только одно из этих решений осуществлено в природе, хотя их возможно бесчисленное множество. Чтобы построить дифференциальное уравнение, необходимо знать не только то решение, которое осуществлено, но также и все остальные, возможные.

Но если мы имеем лишь одну систему законов, применимую ко всей Вселенной, то опыт может дать нам только одно-единственное решение, то самое, которое фактически осуществлено, ведь Вселенная существует в одном экземпляре. Это — первая трудность!

Кроме того, в силу психологической относительности пространства мы можем наблюдать лишь то, что могут измерить наши инструменты. Они дают нам, например, расстояние между звездами или между различными рассматриваемыми нами телами. Они не дадут нам их координат по отношению к некоторым подвижным или неподвижным осям, существование которых лишь дело условия. Если наши уравнения и содержат эти координаты, то только благодаря некоторой фикции, которая может быть удобной, но которая все же остается фикцией. Если мы желаем, чтобы наши уравнения прямо выражали то, что мы наблюдаем, то необходимо, чтобы расстояния непосредственно фигурировали в числе наших независимых переменных и тогда остальные переменные исчезнут сами собой. Это будет наш принцип относительности, но теперь уже лишенный всякого смысла. Он означает просто, что мы ввели в наши уравнения вспомогательные, добавочные переменные, не представляющие ничего осязаемого, и что их можно исключить.

Эти трудности исчезают, если не придерживаться абсолютной строгости. Различные части мира связаны между собой, но как только расстояние становится достаточно большим, их взаимодействие делается столь слабым, что мы вправе им пренебречь. А тогда наши уравнения разделятся на отдельные системы, причем одна окажется применимой только к земному миру, другая — к солнечному миру, третья — к миру Сириуса или даже к гораздо меньшим мирам, например таким, как лабораторный стол.

В таком случае уже нельзя сказать, что Вселенная существует лишь в одном экземпляре: в лаборатории может быть много столов, можно будет вновь провести известный опыт, изменив его условия. Тогда уже будет найдено не одно-единственное решение, осуществленное в действительности,

но целый ряд возможных решений, и можно будет легко перейти от конечных уравнений к дифференциальным уравнениям.

С другой стороны, мы будем знать не только взаимные расстояния различных тел одного из этих маленьких миров, но также и их расстояния до тел соседних маленьких миров. Мы можем сделать так, что будут меняться только вторые расстояния, а первые останутся неизменными. Это все равно, как если бы мы изменили оси, к которым отнесен наш первый маленький мир. Звезды слишком удалены от нас, чтобы заметно воздействовать на наш земной мир, но мы их видим и благодаря этому можем относить земной мир к осям, связанным с этими звездами. Мы имеем способ измерить сразу взаимные расстояния земных тел и координаты этих тел по отношению к системе осей, чуждой земному миру. Принцип относительности в этом случае приобретает определенный смысл, он становится доступным проверке.

Заметим, однако, что мы получили этот результат, пренебрегая известными действиями, но тем не менее мы не считаем наш принцип только приближенным, а приписываем ему абсолютное значение. Действительно, заметив, что он остается верным, как бы ни были удалены друг от друга наши маленькие миры, мы условно соглашаемся говорить, что он остается истинным для точных уравнений Вселенной. И это условное соглашение никогда нельзя будет опровергнуть, ибо принцип наш, взятый в применении ко всей Вселенной, недоступен проверке.

Вернемся теперь к случаю, о котором мы только что говорили. Дана некоторая система, относимая то к неподвижным, то к вращающимся осям. Изменяются ли при этом уравнения, выражающие ее движение? Да, отвечает обычная механика. Но верно ли это? Ведь то, что мы наблюдаем, — это не координаты тел, а их взаимные расстояния. Мы могли бы попытаться составить уравнения, которым подчиняются эти расстояния, исключив другие величины, являющиеся лишь добавочными, недоступными наблюдению переменными. Такое исключение всегда возможно. Но дело в том, что при сохранении координат мы получим дифференциальные уравнения второго порядка. Если же мы исключим все то, что недоступно наблюдению, то дифференциальные уравнения будут уже третьего порядка, так что останется значительно больше места для различных возможностей. При таком условии принцип относительности будет применим и в этом случае; при переходе от неподвижных осей к вращающимся эти уравнения третьего порядка не изменятся. Будут изменяться лишь уравнения второго порядка, определяющие координаты. Но эти уравнения второго порядка являются, так сказать, интегралами первых, и, как во все интегралы дифференциальных уравнений, в них входят постоянные интегрирования; эти-то постоянные и изменяются при переходе от неподвижных осей к вращающимся. Но так как мы предполагаем, что наша система совершенно изолирована в пространстве, т. е. рассматриваем ее как всю Вселенную, то мы не имеем никакой возможности

убедиться в том, вращается ли она. Значит, именно дифференциальные уравнения третьего порядка выражают то, что мы наблюдаем.

Вместо того чтобы брать всю Вселенную в целом, рассмотрим теперь наши маленькие разделенные миры, не имеющие механического воздействия друг на друга, но видные один другому. Если один из этих миров вращается, то мы заметим его вращение. Мы найдем, что значение, которое следует приписать постоянной, о которой мы только что говорили, зависит от скорости вращения. Тем самым будет оправдано соглашение, обычно принимаемое механиками.

Мы видим, таким образом, каков смысл принципа физической относительности. Он уже не является больше простым условным соглашением, он доступен проверке и, значит, может быть опровергнут опытом. Он — экспериментальная истина. Каков же смысл этой истины? Его легко вывести из предыдущих соображений. Принцип этот означает, что взаимодействие двух тел стремится к нулю, когда эти тела удаляются бесконечно друг от друга. Он означает, что два удаленных друг от друга мира ведут себя так, как если бы они были независимы друг от друга. Теперь более понятно, почему принцип физической относительности менее универсален, чем принцип психологической относительности. Мы уже не видим в нем необходимости, вытекающей из самой природы нашего ума. Это — экспериментальная истина, которой опыт указывает границы.

Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем, таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Каждому возможному перемещению твердого тела в этом случае соответствует некоторое преобразование пространства самого в себя, не изменяющее форм и величин фигур. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т. е. группы движений твердых тел.

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной, и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и в первом.

Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет. Твердое тело принимает свою форму под влиянием взаимных притяжений и отталкиваний составляющих его молекул, и эта система сил должна быть в равновесии. Определить пространство таким образом, что твердое тело сохраняет свою форму при перемещении, — это все равно, что определить его *тем*, что уравнения равновесия этого тела не изменяются при изменении осей. Но эти уравнения равновесия представляют собой только частный случай общих уравнений динамики, которые в силу принципа физической относительности не должны изменяться при таком изменении осей.

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же, что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка.

Еще одно замечание. Принцип физической относительности, сказали мы выше, является экспериментальным фактом в том же смысле, в каком им являются свойства данных в природе твердых тел. Как таковой, он подвержен непрерывному пересмотру. Между тем, геометрия не подлежит такому пересмотру, поэтому она должна быть условным соглашением, и принцип относительности должен рассматриваться как условное соглашение. Мы сказали выше, каков его экспериментальный смысл: он означает, что взаимодействие двух весьма удаленных друг от друга систем стремится к нулю, когда их взаимное расстояние бесконечно возрастает. Опыт показывает нам, что это приблизительно верно. Он не может показать нам, что это верно в точности, потому что расстояние между системами всегда останется конечным. Но ничто не мешает нам считать его в точности верным; ничто не помешало бы нам предположить это даже в том случае, если бы опыт обнаружил в принципе кажущуюся ошибку. Предположим, что взаимодействие двух тел, уменьшавшееся сперва с ростом расстояния, затем начало возрастать. Ничто не помешает нам предположить, что для еще большего расстояния оно снова начнет убывать, стремясь в пределе к нулю. В этом случае наш принцип получает характер условного соглашения и избавляется, таким образом, от посягательств опыта. Это — условное соглашение, которое подсказывает нам опыт, но которое мы принимаем добровольно.

В чем же заключается переворот, происшедший под влиянием новейших успехов физики? Принцип относительности в его прежней форме должен быть отвергнут, он заменяется принципом относительности Лоренца. Именно преобразования «группы Лоренца» не изменяют дифференциальных уравнений динамики. Если мы предположим, что наша система отнесена не к неподвижным осям, а к осям, обладающим переносным движением, то приходится допустить, что все тела деформируются, что шар, например,

превращается в эллипсоид, малая ось которого совпадает с направлением переносного движения осей координат. В этом случае и само время испытывает глубокие изменения. Возьмем двух наблюдателей, из которых первый связан с неподвижными осями, второй — с движущимися, но оба считают себя находящимися в покое. Мы найдем, что не только та геометрическая фигура, которую первый считает шаром, будет казаться второму эллипсоидом, но что два события, которые первый будет считать одновременными, не будут таковыми для второго.

Все происходит так, как если бы время было четвертым измерением пространства и как если бы четырехмерное пространство, получающееся из соединения обычного пространства и времени, могло вращаться не только вокруг какой-нибудь оси обычного пространства, так что время при этом остается неизменным, но и вокруг любой оси. Чтобы сравнение было математически верным, этой четвертой координате пространства следует приписать чисто мнимое значение. Четырьмя координатами какой-нибудь точки нашего нового пространства уже будут не x, y, z и t , но x, y, z и it . Но я не буду настаивать на этом пункте; важно лишь отметить, что в этом новом представлении пространство и время не являются уже двумя совершенно различными сущностями, которые можно рассматривать отдельно друг от друга, но двумя частями одного и того же целого, столь тесно связанными, что их не легко отделить друг от друга.

Другое замечание. Когда-то я пытался определить отношение между двумя событиями, происшедшими в двух различных местах, говоря, что одно можно считать предшествующим другому, если его можно рассматривать как причину этого другого. Это определение становится теперь недостаточным. В новой механике нет действий, которые переносятся мгновенным образом. Максимальная скорость передачи действия — это скорость света. При этих условиях может случиться, что событие A не может быть (при одном лишь рассмотрении пространства и времени) ни действием, ни причиной события B , если расстояние между теми местами, в которых они происходят, таково, что свет не может перенестись в надлежащее время ни от места B к месту A , ни от места A к месту B .

Каково же будет наше отношение к этим новым представлениям? Заставят ли они нас изменить наши заключения? Нисколько; мы приняли известное условное соглашение потому, что оно казалось нам удобным, и сказали, что ничто не заставит нас от него отказаться. Теперь некоторые физики хотят принять новое условное соглашение. Это не значит, что они были вынуждены это сделать; они считают это новое соглашение более удобным — вот и все. А те, кто не придерживается их мнения и не желает отказываться от своих старых привычек, могут с полным правом сохранить старое соглашение. Между нами говоря, я думаю, что они еще долго будут поступать таким образом.



Фоменко А. Т.

Сплайны двух трехмерных гиперболических компактных замкнутых многообразий наименьшей сложности

Интуиционизм и формализм¹⁾

Л. Э. Я. Брауэр²⁾

Предмет моего выступления будет связан с основаниями математики. Для того чтобы разобраться в развитии существующих в этой области противостоящих друг другу теорий, необходимо сначала достигнуть ясного понимания относительно понятия «наука», поскольку именно как ее часть математика изначально и возникает в человеческой мысли (культуре).

Под наукой мы подразумеваем систематический учет посредством законов природы казуальных (причинно-следственных) цепочек феноменов, т. е. последовательностей феноменов, которые для индивидуальных или общественных целей удобно рассматривать как воспроизводящиеся идентичным образом, — в особенности таких казуальных цепочек, которые играют важную роль в социальных отношениях.

Наука предоставляет человеку огромную силу в его воздействии на природу. Это происходит благодаря тому, что неизменно уточняющиеся данные о причинных связях явлений предоставляют все большие и большие возможности для воссоздания изучаемого события, которое бывает трудно или даже невозможно воспроизвести непосредственно, но удастся получить, воссоздав другие явления, связанные с первыми казуальными цепочками. Человек всегда и везде создает порядок в природе, и это в свою очередь происходит благодаря тому, что человек не только выделяет причинные связи явлений (т. е. старается отделить их от создающих помехи вторичных явлений), но также дополняет их феноменами (артефактами), вызванными

¹⁾Речь Брауэра при вступлении в должность профессора Амстердамского университета, прочитанная 14 октября 1912 г. Переведена на английский проф. Арнольдом Дрезденом (A. Dresden) и была опубликована в Бюллетене Американского математического общества в ноябре 1913 г. (Bulletin of the American Mathematical Society, 20 (2) (November, 1913), 81–96; *перепечатка*: Bull. Amer. Math. Soc, 37 (2000), 55–64; <http://www.ams.org/journals/bull/1913-20-02/>). Это была первая публикация (Брауэра) по интуиционизму на английском языке. Перевод на русский язык сделан С. Л. Катречко (при участии Н. Е. Горфинкель). Публикуется впервые.

²⁾Л. Э. Я. Брауэр (1881–1966) — голландский математик, выдвинувший в начале XX в. программу радикальной (*интуиционистской*) перестройки математики, которую он противопоставил двум другим программам обоснования математики: *логицизму* и *формализму*, в рамках которых математика сводилась к логике и представляла собой особую «языковую игру» оперирования с математическими символами.

его собственной деятельностью, расширяя тем самым сферу применения казуального подхода. Среди этих (вторичных) феноменов результаты разнообразных подсчетов и измерений занимают столь важное место, что многие законы природы, введенные наукой, основаны только на соответствии результатов подсчетов и измерений. В этой связи следует заметить, что законы природы, в формулировке которых присутствуют величины измерений, надо понимать как выполняющиеся в природе только с некоторой степенью точности, но на самом деле законы природы, как правило, не препятствуют использованию все более и более точных средств измерения.

Исключениями из этого правила с древнейших времен были, с одной стороны, практическая арифметика и геометрия, а с другой — динамика твердых тел и небесная механика. Обе эти группы до сегодняшнего дня противостояли всем новшествам в методах ведения наблюдений. Однако для второй группы это всегда рассматривалось как что-то случайное и временное, и все были готовы к тому, что эти науки снизойдут до ранга вероятностных теорий. При этом до сравнительно недавнего времени существовала непоколебимая уверенность в том, что никакие эксперименты не могут нарушить точность законов арифметики и геометрии; эта уверенность отражена в утверждении, что математика — это «точно» точная наука.

То, на чем зиждется убеждение в неоспоримой точности математических законов, на протяжении столетий было объектом философских исследований, и здесь можно выделить две точки зрения: *интуиционизм* (в основном, французский) и *формализм* (в основном, немецкий). Во многих аспектах две эти точки зрения становились все более и более противоположными друг другу; но в течение последних лет они пришли к согласию в том, что вопрос о применимости математических законов в качестве законов природы не подвергается сомнению. Но на вопрос, где же существует математическая точность, каждая из сторон отвечает по-разному; интуиционист говорит: *в разуме человека*, формалист: *на бумаге*.

У Канта мы находим старую форму интуиционизма, на сегодняшний день практически полностью исчезнувшую, в которой время и пространство рассматриваются как (априорные) формы познания, врожденные человеческому разуму. Для Канта аксиомы арифметики и геометрии были синтетическими априорными суждениями, т. е. суждениями, не зависящими от опыта и не нуждающимися в аналитическом обосновании. Это объясняло их аподиктическую точность, как в мире опыта, так и *in abstracto*. Поэтому для Канта возможность экспериментального опровержения арифметических и геометрических законов была не только исключена по причине твердой в них веры, но для него это было совершенно немыслимо.

Формализм занимает диаметрально противоположную точку зрения. Она заключается в том, что человеческий разум не располагает точными образами, чтобы решать, какие из линий прямые, а какие нет, или, например, какие из чисел больше десяти, а какие меньше, и поэтому утверждает, что

математические сущности существуют в нашем представлении о мире не больше, чем в нем самом¹⁾. Из нескольких соотношений между математическими сущностями, которые мы полагаем аксиомами, мы действительно выводим другие соотношения, следуя определенным законам, будучи уверены, что таким образом выводим истины из истин по правилам логики. Но это нематематическое обоснование истинности или легитимности и оно не несет в себе никакой точности, хотя и вызывает некоторое удовлетворение от того, что математические законы могут быть эффективно применяться в реальности. Для формалиста, таким образом, математическая точность есть, по сути, просто разработка серии отношений и не зависит от смысла, который можно было бы придать этим отношениям и/или математическим сущностям, которые они связывают. И для последовательного формалиста эта не имеющая значимости сама по себе серия отношений, к которой могут быть сведены все разделы математики, становится математически осмысленной, только если они были представлены в устной или письменной речи вместе с логико-математическими законами, на основании которых сделан их вывод, т. е. в виде символической логики.

Поскольку обычная устная или письменная речь не удовлетворяет даже минимальным требованиям согласованности (непротиворечивости), накладываемой этой символической логикой, формалисты стараются избегать использования повседневного языка в математике. Как далеко это может завести, можно увидеть на примере современной итальянской школы формалистов, чей руководитель, Пеано, опубликовал один из своих наиболее важных результатов, касающийся существования решений (интегралов) для действительных дифференциальных уравнений в «*Mathematische Annalen*» на языке символической логики; как результат, статью могли прочесть только несколько посвященных, и она не была общедоступной до тех пор, пока один из «формалистов» не перевел ее на немецкий.

Взгляды формалиста должны вести к убежденности, что если другие символические формулы заменят те, которые представляют сегодня фундаментальные математические соотношения и логические законы, отсутствие ощущения удовлетворенности, которое называют «сознание легитимности», которое может явиться результатом такой замены, ни в малейшей степени не уменьшит ее математической точности. Философу или антропологу, но никак не математику, выяснять, почему конкретные системы символической логики эффективнее других могут быть спроецированы на реальный мир природы. Не математику, а психологу объяснять, почему мы верим в конкретные системы символической логики и не верим в другие, и в частности, почему мы питаем такую антипатию к так называемым противоречивым системам, в которых могут быть одновременно истинны как высказывание, так и его отрицание²⁾.

¹⁾ Ср. с известным афоризмом Д. Гильберта: «Справедливость аксиом и теорем ничуть не поколеблется, если мы заменим привычные термины „точка, прямая, плоскость“ другими, столь же условными: „стул, стол, пивная кружка“!». — *Прим. перев.*

²⁾ См. Mannoury *Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik*, pp. 149–154.

Пока интуиционисты оставались верны принципам теории Канта, казалось, что развитие математики в XIX в. поставило их в как никогда слабое положение по сравнению с формалистами. Это развитие в первую очередь многократно продемонстрировало, как целые теории могут быть перенесены из одной области математики в другую. Проективная геометрия, например, осталась неизменной после того, как точка и прямая поменялись ролями, важная часть арифметики действительных чисел оказалась применима и для разнообразных других подполей в поле комплексных чисел. Практически все теоремы элементарной геометрии остались верны для неархимедовой геометрии, в которой для каждого отрезка существует отрезок, бесконечно малый по отношению к первому. Эти открытия, казалось бы, должны были действительно показать, что только логическая форма математической теории имеет значение, и не стоит заботиться о материи больше, чем, например, необходимо думать о смысле наборов цифр, с которыми оперируешь, для правильного решения задач арифметики.

При этом самым серьезным ударом по кантианской теории было открытие неевклидовой геометрии, непротиворечивой теории, разработанной на основе системы аксиом, отличающихся от аксиом элементарной геометрии только тем, что аксиома параллельности была заменена ее отрицанием. Это открытие показало, что явления, традиционно описываемые на языке элементарной геометрии, могут быть описаны с такой же степенью точности, хотя зачастую и менее компактно, на языке неевклидовой геометрии. Так что не только невозможно оставаться уверенным, что пространство нашего опыта имеет свойства элементарной геометрии, но лишен смысла даже вопрос о существовании какой-то выделенной геометрии, истинной для этого пространства. Элементарная геометрия действительно лучше, чем любая другая, подходит для описания законов кинематики твердых тел, а значит, и большого количества природных явлений, но если запастись терпением, можно было бы создать объекты, кинематику которых было бы проще интерпретировать в терминах неевклидовой, чем евклидовой геометрии.¹⁾

Какой бы слабой ни казалась позиция интуиционистов после этого периода развития математики, они вновь обрели вес, отказавшись от кантианской априорности пространства, но оставаясь при этом тем более верными теории априорности времени. Этот неоинтуиционизм рассматривает разложение моментов жизни на качественно разные части, которые должны вновь соединиться, только оставаясь разделенными во времени, как фундаментальное явление человеческого интеллекта, переходящее благодаря абстрагированию от его чувственного (эмоционального) содержания в фундаментальное явление математического мышления, в интуицию чистого двуединства. Эта интуиция двуединства, основополагающая интуиция математики, создает не только числа один и два, но и все конечные порядковые числа, поскольку

¹⁾См. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 104 (см. русский перевод: Пуанкаре А. Наука и гипотеза // Его же. О науке. — М.: Наука, 1990).

один из элементов этого двуединства можно помыслить как новое двуединство, и этот процесс может повторяться бесконечно; такое построение приводит нас к наименьшему бесконечному порядковому числу ω . Наконец, эта основополагающая интуиция математики, в которой связанное и разделенное, непрерывное и дискретное соединены, приводит непосредственно к интуиции линейного континуума, т. е. «находиться между» («between»)¹⁾, что не исчерпывается добавлением новых промежуточных элементов и что поэтому никогда нельзя помыслить как простое объединение элементов.

Подобным образом априорность времени не только определяет характеристики арифметики как совокупности синтетических априорных суждений, но делает то же самое со свойствами геометрии, причем не только элементарных двух и трехмерной геометрий, но и n -мерной неевклидовой геометрии, поскольку со времен Декарта мы научились сводить все эти геометрии к арифметике посредством вычислений в координатах.

С точки зрения современного интуиционизма, таким образом, все математические множества элементов, которые названы таким именем, могут быть получены, основываясь на базовой интуиции, и это может быть проделано применением конечного числа раз всего двух операций: «создать конечное ординальное число» и «создать бесконечное ординальное число ω »; здесь надо понимать, что для дальнейших целей любое ранее сконструированное множество или ранее проделанные конструктивные операции, могут быть использованы как элементы. Как следствие, интуиционист распознает только существование счетных множеств, т. е. множеств, чьи элементы могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие как с элементами финитного ординального числа, так и бесконечного ординального числа ω .

И в конструкции этих множеств ни повседневный язык, ни язык символической логики, не могут играть иной роли, как только служить в качестве нематематического вспомогательного аппарата, чтобы способствовать математической памяти или чтобы предоставить возможность разным людям построить одно и то же множество.

По этой причине интуиционист никогда не может почувствовать абсолютную уверенность в точности математической теории посредством таких гарантов как доказательство ее непротиворечивости и/или возможность определить ее понятия конечным числом слов,²⁾ или практическая достоверность того, что она никогда не приведет к непониманию в человеческих отношениях³⁾.

Как уже говорилось выше, формалист предпочитает предоставить психологам задачу выбора «истинно математического» языка среди множества символических языков, которые могут быть в равной мере развиты. Поскольку

¹⁾Заметим, что такая трактовка континуальности восходит к учению о континууме (непрерывности) Аристотеля, согласно которому между любыми двумя «точками» всегда можно взять среднюю точку (см. его *Физику*, кн. V, VI). — *Прим. перев.*

²⁾См. Poincaré, *Scientia*, No. XXIV, p. 6.

³⁾См. Borel, *Revue du Mois*, No. 80, p. 221.

психология еще не приступила к решению этой задачи, формализм вынужден обозначить границы, по крайней мере временно, области, которую он хотел бы воспринимать как «истинную математику», и наложить для этих целей определенную систему аксиом и законов вывода, если он не намерен видеть свою работу обреченной на бесплодие. Все различные направления, в которых была предпринята существенная попытка это проделать, следовали следующей ведущей идее, а именно: допущению существования мира математических объектов, мира, независимого от мыслящего субъекта и подчиняющегося законам классической логики, чьи объекты могут обладать, с учетом друг друга, «отношением множества со своими элементами». Со ссылкой на это отношение постулируются разнообразные аксиомы, подсказанные практикой с естественными конечными множествами. Среди них важнейшими являются: *«множество определяется своими элементами»*; *«для любых двух математических объектов определено, содержится ли один из них в другом в качестве элемента или нет»*; *«каждому множеству соответствует другое множество, содержащее в качестве своих элементов подмножества исходного множества и только их»*; аксиома выбора: *«множество, которое разделено на подмножества, содержит, по крайней мере, одно подмножество, которое содержит один и только один элемент из каждого из исходных подмножеств»*; аксиома включения: *«если для каждого математического объекта определено, выполняется ли для него некоторое свойство или нет, то существует множество, содержащее в себе ровно те объекты, для которых свойство выполняется»*; аксиома композиции: *«элементы всех множеств, которые принадлежат множеству множеств, образуют новое множество»*.

На базе такого множества аксиом формалист развивает теперь в первую очередь теорию «конечного множества». Множество называется конечным, если нельзя построить взаимно однозначное соответствие его элементов с элементами одного из его подмножеств. С использованием достаточно сложной аргументации доказано, что принцип полной индукции является фундаментальным свойством таких множеств¹⁾: этот принцип утверждает, что свойство будет выполнено для всех конечных множеств, если, во-первых, оно выполнено для всех одноэлементных множеств и, во-вторых, его истинность для произвольного конечного множества следует из его истинности для того же множества без одного из его элементов. Таким образом, формалисту необходимо дать точное доказательство этого принципа, который является очевидным для ординальных чисел интуициониста просто по их построению. Отсюда видно, что первый никогда не будет иметь возможности доказать правомерность его выбора аксиом, заменив неудовлетворительное для него обращение к неточным практическим методам или в равной степени неточной по его мнению интуиции на доказательство непротиворечивости его теории. Чтобы доказать, что во множестве следствий, которые могут быть получены из используемых им ак-

¹⁾Ср. с Zermelo, «Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète,» *Acta Mathematica*, 32, pp. 185–193.

сиом, не может возникнуть противоречия, он должен сделать следующее. Ему сначала пришлось бы показать, что если никаких противоречий не возникло в n -м следствии, то они не возникнут и в $(n + 1)$ -м, после чего ему пришлось бы интуитивно применить принцип полной индукции. Но этот последний шаг формалист как раз совершить не может, даже если бы он доказал принцип полной индукции; это потребовало бы математической уверенности в том, что множество свойств, полученных к моменту вывода n -го следствия, будет для любого n удовлетворять его определению конечного множества¹⁾. А чтобы добиться этой уверенности, ему пришлось бы прибегнуть не только к недозволенному с символической точки зрения применению этого критерия в данном конкретном случае, но и к еще одному интуитивному применению принципа полной индукции, что приводит его доказательство к порочному кругу.

В области конечных множеств, где аксиомы формалиста имеют абсолютно ясное для интуитциониста толкование, с которым они оба безоговорочно соглашаются, два этих направления отличаются исключительно в методе, а не в результатах; однако ситуация совершенно меняется в области бесконечных или трансфинитных множеств. Там, главным образом применяя аксиому включения, приведенную выше, формалист представляет разнообразные концепции, совершенно бессмысленные для интуитциониста. Например, «множество, элементами которого являются точки пространства», «множество, элементами которого являются непрерывные функции одной переменной», «множество, элементами которого являются дискретные функции одной переменной» и т. д. В ходе таких формалистических изысканий оказывается, что последовательное применение аксиомы включения неизбежно ведет к противоречиям. Наглядной иллюстрацией этого служит парадокс Бурали — Форти (1897)²⁾. Чтобы продемонстрировать его, нам надо дать несколько определений.

Множество называется упорядоченным, если любые два его элемента связаны отношением «старше чем» или «младше чем». При этом отношения согласованы в том смысле, что если элемент a старше, чем элемент b , то элемент b младше, чем элемент a , и если элемент b старше, чем a , и c старше, чем b , то c старше, чем a .

Вполне упорядоченное множество (в формалистическом смысле) — это такое упорядоченное множество, для которого каждое его подмножество содержит элемент, который младше всех остальных.

О двух вполне упорядоченных множествах, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением отношений «старше чем» и «младше чем», говорят, что они имеют одинаковое ординальное число.

Если два ординальных числа A и B не равны, то одно из них больше второго, скажем, A больше B . Это означает, что можно установить взаимно однозначное соответствие между B и начальным сегментом A с сохранением

¹⁾Ср. с Poincaré, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1905, p. 834.

²⁾Ср. с *Rendiconti del Circolo, Matematico di Palermo*, 1897.

отношений «старше чем» и «младше чем». Выше мы представили, с точки зрения интуициониста, наименьшее бесконечное ординальное число ω , т. е. ординальное число множества всех конечных ординальных чисел, упорядоченных по возрастанию¹⁾. Вполне упорядоченные множества, ординальные числа которых есть ω , называются элементарными рядами.

Без особых трудностей формалист доказывает, что произвольное подмножество вполне упорядоченного множества также является вполне упорядоченным, причем его ординальное число меньше или равно ординальному числу исходного множества; и также, что если добавить ко вполне упорядоченному множеству, состоящему не из всех математических объектов, новый элемент, положив его старше всех элементов исходного множества, то таким образом получится новое вполне упорядоченное множество, чье ординальное число больше, чем ординальное число первого.

Построим на основе аксиомы включения множество S , которое содержит в качестве элементов все ординальные числа, упорядоченные по возрастанию. Без труда можно доказать, что, с одной стороны, S это вполне упорядоченное множество, чье ординальное число не может превысить никакое другое ординальное число. С другой стороны, поскольку не все математические объекты являются ординальными числами, можно создать ординальное число, большее, чем число S , добавив новый элемент к S , — мы получили противоречие²⁾.

Хотя формалисты, если они хотят быть последовательными, обязаны допустить противоречие в качестве математических результатов, но парадоксы типа Бурали — Форти представляют для них неприятности, поскольку руководящим принципом развертывания их аргументации является закон (не)противоречия (*principium contradictionis*), т. е. отрицание возможности одновременной истинности двух противоположных свойств. По этой причине формулировка аксиомы включения была модифицирована следующим образом: «Если для всех элементов множества определено, выполняется для них некоторое свойство или нет, то это множество содержит подмножество, чьими элементами являются те элементы исходного множества, для которых свойство выполнено, и только они»³⁾.

¹⁾Более общие интуиционистские ординальные числа строятся с использованием двух канторовских принципов порождения (сравн. с *Math. Annalen*, vol. 49, p. 226).

²⁾Парадокс Бурали—Форти иногда несправедливо отождествляют с парадоксом Ричарда (Ю. Ричард, 1905 г. р., франц. математик — *Прим. перев.*), который в несколько упрощенной форме можно сформулировать следующим образом: «Существует ли наименьшее натуральное число, которое не может быть определено предложением, состоящим не более чем из двадцати слов? С одной стороны, да, число предложений из двадцати слов конечно; с другой стороны, нет, так как, если оно существует, то оно определяется предложением, выделенным курсивом».

Происхождение этого парадокса связано не с аксиомой включения, но с различными значениями слова «определить» во фразе, написанной курсивом, что делает возможным с помощью этого предложения последовательно определить бесконечно много натуральных чисел.

³⁾Ср. Zermelo, *Math. Annalen*, vol. 65, p. 263.

В такой формулировке аксиома позволяет представлять такие множества только как подмножества множеств, определенных ранее; если необходимо оперировать с другими множествами, то их существование должно быть явно постулировано. Однако, чтобы добиться хоть чего-то, существование конкретного набора множеств надо будет постулировать в самом начале. Поэтому единственный законный аргумент, который может быть приведен против создания нового множества, состоит в том, что это ведет к противоречию. В действительности, единственным изменением, которое открытие парадоксов привнесло в практику формализма, явилось устранение тех множеств, существование которых ведет к парадоксам. При этом формалисты без колебаний продолжают оперировать с другими множествами, полученными на основе старой аксиомы включения; результатом этого стало то, что обширные области исследования, бессмысленные с точки зрения интуициониста, представляют значительный интерес для формалиста. Подходящий пример есть в теории мощностей, основные принципы которой я набросаю ниже, потому что она очень прозрачно иллюстрирует непреодолимые разногласия, разделяющие две стороны.

Говорят, что два множества обладают одинаковой мощностью, или степенью, если можно установить взаимно однозначное соответствие между их элементами. Говорят, что мощность множества A больше, чем мощность множества B , и мощность B меньше, чем мощность A , если можно установить взаимно однозначное соответствие между B и частью A , но невозможно установить такое соответствие между A и частью B . Мощность множества, равномощного одному из своих подмножеств, называется бесконечной, другие мощности называются конечными. Множества той же мощности, что и ординальное число ω , называются счетно-бесконечными а их мощность $\aleph_0$ («алеф-ноль»): доказано, что это наименьшая бесконечная мощность. В соответствии с приведенными ранее утверждениями мощность $\aleph_0$ — это единственная бесконечная мощность, существование которой признают интуиционисты.

Давайте теперь рассмотрим понятие «счетно-бесконечное ординальное число». Из того, что это понятие имеет ясное и корректно определенное значение как для формалиста, так и для интуициониста, первый делает вывод, что он имеет право создать «множество всех счетно-бесконечных ординальных чисел», мощность которого он называет $\aleph_1$, право, которое интуиционист не признает. Так как можно выдвинуть доводы, убедительные как для интуициониста, так и для формалиста, что, во-первых, счетно-бесконечные множества счетно-бесконечных ординальных чисел могут быть сконструированы разными способами, и, во-вторых, что для каждого такого множества можно предъявить счетно-бесконечное ординальное число, не принадлежащее этому множеству, формалист заключает « $\aleph_1$ больше, чем $\aleph_0$ ». Однако это высказывание лишено смысла для интуициониста. Так как можно выдвинуть доводы, убедительные как для интуициониста, так и для

формалиста, что невозможно построить¹⁾ множество счетно-бесконечных ординальных чисел, про которое можно было бы доказать, что его мощность меньше, чем $\aleph_1$, но больше, чем $\aleph_0$, формалист заключает « $\aleph_1$ является следующим по возрастанию после $\aleph_0$ бесконечным ординальным числом» — высказывание, лишенное смысла для интуициониста.

Давайте рассмотрим понятие «действительное число между 0 и 1». Для формалиста это понятие эквивалентно «элементарный ряд цифр после десятичной запятой»²⁾, для интуициониста оно означает «закон построения элементарного ряда цифр после десятичной запятой за конечное число операций». И когда формалист создает «множество действительных чисел между 0 и 1», эти слова бессмысленны для интуициониста, даже независимо от того, представляет ли он себе действительные числа формалиста, заданные элементарным рядом произвольно выбранных цифр, или действительные числа интуициониста, заданные конечным законом построения. Можно доказать, убедительно как для формалиста, так и для интуициониста, что, во-первых, счетно-бесконечные множества действительных чисел между 0 и 1 можно построить разными способами, и во-вторых, что для каждого такого множества можно предъявить действительное число между 0 и 1, не принадлежащее ему. Отсюда формалист заключает: «мощность континуума, т. е. мощность множества всех действительных чисел между 0 и 1, больше, чем $\aleph_0$ » — высказывание, бессмысленное для интуициониста. Далее формалист поднимает вопрос о том, существует ли множество действительных чисел между 0 и 1, чья мощность меньше мощности континуума, но больше, чем $\aleph_0$, иными словами «является ли мощность континуума следующей по возрастанию после $\aleph_0$ бесконечной мощностью». Этот вопрос, все еще ожидающий ответа, он воспринимает как одну из наиболее трудных и наиболее фундаментальных проблем математики.

Для интуициониста, однако, этот вопрос, как уже говорилось, лишен смысла, и только после того как он будет проинтерпретирован так, что обретет смысл, на него можно будет легко ответить.

Если мы переформулируем вопрос в такой форме: «Правда ли, что невозможно построить³⁾ бесконечное множество действительных чисел между

¹⁾Если заменить здесь слово «построить» (construct) на «определить» (в формалистском смысле), доказательство будет неудовлетворительным для интуициониста. Поэтому в канторовском доказательстве в *Math. Annalen*, vol. 49 нельзя заменять слова «können wir bestimmen» (р. 214, строка 17 сверху) словами «muss es geben».

²⁾Здесь, как и везде в этой статье, делается предположение, что существует бесконечное число цифр, отличающихся от 9.

³⁾Если здесь заменить «построить» (construct) на «определить» (в формалистском смысле), и если мы предполагаем, что проблема касательно пар цифр в десятичной записи числа π , обсуждаемая в конце статьи (с. 160–161), не может быть решена, тогда на вопрос, сформулированный в тексте, нужно отвечать отрицательно. Давайте обозначим через Z множество тех бесконечных двоичных дробей, чья n -я цифра это 1, если n -я пара цифр в десятичной записи π состоит из неравных пар. Давайте далее обозначим через X множество

0 и 1, чья мощность была бы меньше мощности континуума, но больше, чем $\aleph_0$?, то ответ должен быть утвердительным; поскольку интуиционист может конструировать только счетно-бесконечные множества математических объектов и если, на основе интуитивного восприятия линейного континуума, он допускает элементарные последовательности произвольных выборов в качестве элементов построения, то каждое несчетное множество, сконструированное таким образом, содержит подмножество мощности континуум.

Если же мы переформулируем вопрос в такой форме: «Возможно ли установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества счетно-бесконечных ординальных чисел и множеством действительных чисел между 0 и 1, оба из которых воспринимаются как бесконечно расширяемые посредством конструкции добавления нового элемента, такого характера, что это соответствие не будет нарушено при сколько угодно долгом продолжении процедуры построения обоих множеств?», то ответ также должен быть утвердительным, поскольку процесс расширения обоих множеств можно так разделить на фазы, чтобы во время каждой из них добавлялось счетно-бесконечное множество элементов¹⁾.

Однако, если мы зададим вопрос в такой форме: «Возможно ли сконструировать закон, который будет приписывать счетно-бесконечное ординальное число каждому элементарному ряду цифр и который будет гарантировать априори, что два различных элементарных ряда никогда не будут соответствовать одинаковым счетно-бесконечным ординальным числам?», то ответ должен быть отрицательным, поскольку этот закон построения соответствия должен будет в некотором смысле обозначить конструкцию определенных счетно-бесконечных ординальных чисел на каждом очередном месте элементарного ряда. Поэтому для каждого места c_v существует корректно определенное наибольшее счетно-бесконечно число α_v , конструкция которого определяется именно этим местом. Тогда также существует корректно определенное счетно-бесконечное ординальное число α_ω , большее всех α_v , и которое таким образом не может быть превзойдено никаким другим ординальным числом, задействованным в законе построения соответствия. Значит, мощность такого множества ординальных чисел не может превысить $\aleph_0$ (алеф-ноль).

Чтобы получать множества все большей мощности, формалисты определяют вместе с каждой мощностью μ «множество различных способов, которыми может быть проделан выбор мощности μ ». После этого они доказывают, что мощность этого множества больше μ . В частности, воз-

всех конечных двоичных дробей. Тогда мощность $Z+X$ больше, чем $\aleph_0$ (алеф-ноль), но меньше мощности континуума.

¹⁾Называя *счетно-незаконченными* все множества, чьи элементы могут быть индивидуально реализованы, и в которых для каждого счетно-бесконечного подмножества существует элемент, не принадлежащий этому множеству, мы можем сказать в общем (в соответствии с определениями, данными в тексте): «Все *счетно-незаконченные множества имеют одинаковую мощность*».

можно разными способами сформулировать законы, в соответствии с которыми функции действительной переменной, отличные друг от друга, будут поставлены в соответствие всем элементарным рядам цифр. Однако можно убедительно как для формалиста, так и для интуициониста, доказать, что невозможно построить закон, по которому элементарные ряды цифр были бы поставлены в соответствие всем функциям одной действительной переменной, и который гарантировал бы априори, что две разные функции никогда не будут сопоставлены одному и тому же элементарному ряду. Формалист из этого заключает: «мощность c' множества всех функций действительной переменной больше, чем мощность континуума» — высказывание, бессмысленное для интуициониста; и аналогично тому, как он перешел от c к c' , он переходит от c' к еще большей мощности c'' .

Второй метод, который используют формалисты, чтобы получать множества все большей мощности, состоит в том, чтобы определить для каждой мощности μ , которая может служить мощностью ординальных чисел, «множество всех ординальных чисел мощности μ », а потом доказывать, что мощность этого множества больше μ . В частности, они обозначают $\aleph_2$ мощность множества всех ординальных чисел мощности $\aleph_1$ и доказывают, что $\aleph_2$ больше, чем $\aleph_1$, и это порядковое число сразу следует за порядковым числом $\aleph_1$. Если и будет возможно переформулировать этот результат так, чтобы он стал осмысленным для интуициониста, то осуществить такую переформулировку в данном случае будет не так уж и просто по сравнению с предыдущими случаями.

То, что обсуждалось до этого момента, должно восприниматься как негативная часть теории мощностей множеств; для формалиста, однако, существует и позитивная ее часть, которая основана на теореме Бернштейна: «Если множество A равномощно подмножеству во множестве B , а B равномощно подмножеству во множестве A , то множества A и B равномощны», или, эквивалентная форма: «Если множество $A = A_1 + B_1 + C_1$ равномощно A_1 , то оно также равномощно $A_1 + B_1$ ».

Эта теорема очевидна для счетных множеств. Если планируется сделать ее сколь-нибудь осмысленной для множеств большей мощности для интуициониста, ее придется переформулировать так: «Если возможно, во-первых, построить закон, определяющий взаимно однозначное соответствие между математическими сущностями типов A и A_1 , и, во-вторых, построить закон, определяющий взаимно однозначное соответствие между математическими сущностями типов A и A_1 , B_1 , C_1 , тогда на основе этих двух законов за конечное число операций можно определить третий закон, задающий взаимно однозначное соответствие между математическими сущностями типов A и A_1 , B_1 ».

Для того чтобы удостовериться в правомерности такой формулировки, мы цитируем доказательство:

«Из разделения A на $A_1 + B_1 + C_1$ мы имеем, используя соответствие η_1 между A и A_1 , разделение A_1 на $A_2 + B_2 + C_2$, а также взаимно однозначное соответствие η_2 между A_1 и A_2 . Из разделения A_1 на $A_2 + B_2 + C_2$, мы имеем, используя соответствие η_2 между A и A_2 , разделение A_2 на $A_3 + B_3 + C_3$, а также

взаимно однозначное соответствие γ_3 между A_2 и A_3 . Бесконечное повторение такой процедуры приведет к разделению A на элементарный ряд подмножеств $C_1, C_2, C_3, \dots$, элементарный ряд подмножеств $B_1, B_2, B_3, \dots$, и дополнительное множество D . Соответствие γ_c между A и $A_1 + B_1$, которое является целью, получается, если определить его так: сопоставим каждому элементу C_v элемент C_{v+1} , а любому другому элементу A сопоставим его самого».

Чтобы проверить это доказательство на конкретном примере, возьмем в качестве A множество всех действительных чисел между 0 и 1, представленное бесконечными десятичными дробями, в качестве A_1 множество тех десятичных дробей, у которых для каждого $n(2n - 1)$ -й разряд равен $(2n)$ -му; далее десятичные дроби, не вошедшие в A_1 , будут считаться принадлежащими B_1 или C_1 в зависимости от того, возникает ли такое равенство соответствующих разрядов на бесконечном или конечном числе мест. Последовательно заменяя каждую цифру произвольного элемента A на пару таких же цифр, мы немедленно получаем определение взаимно однозначного соответствия γ_1 между A и A_1 . Поскольку по элементу из A_1 , который соответствует произвольному корректно определенному элементу A , например, $\pi - 3$, мы можем последовательно определить столько разрядов этого элемента, сколько пожелаем, такой закон должен рассматриваться как корректно определенный.

Для того чтобы определить теперь элемент, сопоставленный $\pi - 3$ в соответствии с отображением γ_c , необходимо для начала решить, конечное или бесконечное число раз в десятичном представлении числа $\pi - 3$ встречаются разряды с нечетными номерами, которые равны следующему за ними четному разряду; для этой цели нам необходимо либо придумать алгоритм построения элементарных последовательностей пар равных разрядов числа $\pi - 3$, либо вывести противоречие из предположения о существовании таких элементарных рядов. Однако нет никаких оснований полагать, что какая-либо из этих задач может быть решена¹⁾.

Тем самым очевидно, что и теорема Бернштейна, а вместе с ней и вся позитивная часть теории мощностей множеств, не допускает интуиционистской интерпретации.

Вот мое представление фундаментальных разногласий, которые разделяют математический мир. По обе стороны от них есть выдающиеся ученые, и возможность прийти к согласию между ними за конечное время практически исключена. Говоря словами Пуанкаре: «*Les hommes ne s'entendent pas, parce qu'ils ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas.*» («Люди не понимают друг друга, потому что говорят на разных языках и не учат другие».)

¹⁾ Такое предположение может быть основано только на использовании принципа исключенного третьего, т. е. на аксиоме существования «множества всех математических свойств», аксиоме куда более сильной, чем аксиома включения, которую мы приводили выше. В этой связи ср. *Brouwer, De onbetrouwbaarheid der logische principes // Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 2-е jaargang, pp. 152–158.



Фоменко А. Т.
Математическая бесконечность в геометрии и топологии

Что такое континуум-проблема Кантора?¹⁾

*Курт Гёдель*²⁾

1. Понятие кардинального числа. Континуум-проблема Кантора заключается в простом вопросе: сколько точек находится на прямой линии в евклидовом пространстве? Или другими словами: сколько существует различных множеств целых чисел?

Конечно, этот вопрос мог возникнуть, только после того как понятие «числа» было распространено на область бесконечных множеств. Могут возникнуть сомнения в том, единственным ли способом может быть осуществлено такое расширение и, следовательно, справедлива ли постановка проблемы в тех простых терминах, в каких она дана выше. Более пристальное изучение показывает, однако, что канторовское определение бесконечного числа удивительным образом действительно единственно возможное.

Что бы ни означало понятие числа в применении к бесконечным множествам, необходимо, чтобы оно обладало тем свойством, что оно остается неизменным для некоторого класса объектов, если эти объекты меняют свои характеристики или взаимоотношения (например, их цвет или расположение в пространстве). Отсюда немедленно следует, что два множества (по крайней мере, два изменяемых множества в пространстве-времени) имеют одинаковое кардинальное число, если их элементы можно привести во взаимно однозначное соответствие, которое в канторовском определении означает равенство между двумя числами. Если для двух

¹⁾Gödel Kurt. What is Cantors Continuum Problem? — The American Math. Monthly, vol. 54, № 9, pp. 515–525. Перевод с английского С. А. Вёкшенова

²⁾Курт Гёдель (1906–1978) — один из крупнейших математиков XX в. и, несомненно, величайший из математических логиков. Наиболее известное достижение Гёделя — это сформулированные и доказанные им теоремы о неполноте (1931), которые сыграли решающую роль в истории логики и математики. Фундаментальные результаты были получены им в теории множеств. Кроме того, Гёделю принадлежат оригинальные работы в области дифференциальной геометрии и теоретической физики, в частности, общей теории относительности. В архивах Гёделя была обнаружена записка, датированная 10.02.1970, содержащая формальные рассуждения, призванные доказать существование Бога как воплощение всех позитивных качеств (опубликовано в третьем томе собрания сочинений издательством Oxford University Press в 1995 г.).

множеств A и B существует такое соответствие, возможно (по крайней мере теоретически) изменить свойства и отношения каждого элемента A на свойства и отношения соответствующего элемента B , при котором A трансформируется в множество, совершенно неотличимое от B , и, следовательно, имеющее то же самое кардинально число. Для примера рассмотрим квадрат и отрезок прямой, полностью заполненные материальными точками (таким образом, что на каждой их точке располагается в точности одна материальная точка). В связи с доказанным фактом, что существует взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и отрезка прямой, следует, что такое же соответствие есть и между материальными точками. Тогда материальные точки квадрата могут быть переставлены так, чтобы полностью заполнить отрезок, и наоборот. Такое преобразование, правда, применимо непосредственно только к физическим объектам и определение понятия «числа» будет зависеть от рода занумерованных объектов, что вряд ли может рассматриваться как удовлетворительное.

Таким образом, не остается ничего иного, как только принять канторовское определение равенства между числами, которое может быть расширено до определения «больше» или «меньше» для бесконечных чисел. Кардинальное число M множества A может быть названным меньшим, чем кардинальное число N множества B , если M отлично от N , но равно кардинальному числу некоторого подмножества B . На основе этих определений можно доказать существование бесконечно многих различных бесконечных кардинальных чисел или «мощностей», в частности, то, что число подмножеств множества больше, чем число его элементов. Кроме того, становится возможным расширить (снова без какого-либо произвола) арифметические операции на бесконечные числа (включая сумму и произведение с любым бесконечным числом слагаемых или сомножителей).

Но даже после этого проблема определения кардинального числа индивидуального множества, такого как линейный континуум, не может быть удовлетворительно определена, если не существует некоторого «естественного» представления бесконечного кардинального числа, подобно десятичной или другим системам счисления для целых чисел. Эта система представления существует благодаря теореме, что для каждого кардинального числа и каждого множества кардинальных чисел¹⁾ существует в точности одно кардинальное число, непосредственно следующее за ними по величине, и что кардинальное число каждого множества присутствует в полученной таким образом последовательности²⁾. Эта теорема позволяет определить

¹⁾Что касается вопроса, почему не существует множество всех кардинальных чисел, см. примечание ⁴⁾ на с. 166.

²⁾Чтобы доказать эту теорему необходимо воспользоваться аксиомой выбора (см. A. Frankel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3ed, Berlin, 1928, p. 288 ff.), однако можно сказать, что эта аксиома является (на современном уровне знаний) такой же обоснованной, как и система других аксиом. Была доказана их общая непротиворечивость при условии, что

кардинальное число, непосредственно следующее за множеством конечных чисел, которое обозначается как $\aleph_0$, (которое представляет собой мощность «счетно-бесконечных» множеств), следующее такое число обозначается через $\aleph_1$ и т. д. Число, непосредственно следующее за всеми $\aleph_i$, где i — целое, обозначим через $\aleph_\omega$, следующее — через $\aleph_{\omega+1}$ и т. д. Таким образом, теория ординальных чисел позволяет расширять эту последовательность дальше и дальше.

2. Континуум-проблема, континуум-гипотеза и некоторые результаты по доказательству ее истинности, существующие на сегодняшний день.

Итак, анализ фразы «сколько» однозначно ведет к вполне определенному ответу на вопрос, поставленный на второй строчке этой статьи, а именно определить, какое из кардинальных чисел $\aleph$ является числом точек на прямой линии или (что тоже самое) в любом другом континууме евклидова пространства. Кантор, доказав, что это число безусловно больше, чем $\aleph_0$, предположил, что оно равно $\aleph_1$, или (это эквивалентное утверждение), что любое бесконечное подмножество континуума имеет мощность либо множества целых чисел, либо мощность целого континуума. Это и есть канторовская континуум-гипотеза.

Однако, хотя канторовская теория множеств развивается уже более шестидесяти лет и эта проблема имеет для нее, очевидно, огромное значение, до сих пор ничего не было доказано относительно того, какова мощность континуума или, удовлетворяют ли его подмножества только что сформулированному условию. Исключением является утверждение, что мощность континуума не является кардинальным числом специального вида, а именно — пределом счетного числа меньших кардинальных чисел¹⁾. Вторым исключением является утверждение, что упомянутое предложение о подмножествах континуума справедливо для определенных инфинитезимальных извлечений из этих подмножеств, аналитических множеств²⁾. Но даже и верхняя граница, как бы высока она ни была, не может считаться мощностью континуума. Не больше мы знаем о свойствах кардинального числа континуума. Неизвестно, является ли это число регулярным или сингулярным, достижимым или недостижимым и какова характеристика его

другие аксиомы также непротиворечивы (см. мою статью, упомянутую в примечании ⁴⁾ на с. 168). Эта аксиома в той же степени очевидна, как и другие аксиомы для множеств в смысле произвольной совокупности элементов и для множеств в смысле элементов, удовлетворяющих данным свойствам, т. е. в экстенциональном смысле. Она также доказуема для тех понятий определяемости, для которых при настоящем уровне знаний возможно доказать другие аксиомы. Это объясняется в примечаниях ²⁾ на с. 169 и ²⁾ на с. 171.

¹⁾См. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1st ed. (1914), p. 68 (имеется русский перевод: — Хаусдорф Ф. Теория множеств. ОНТИ НКТП СССР, 1937. — Прим. перев.). Первооткрыватель этой теоремы J. König утверждал больше, чем он на самом деле доказал.

²⁾Список определений см. в конце работы.

конфинальности¹⁾ (кроме отрицательного результата Кёнига). Единственно, что нам известно — это большое количество следствий из канторовского предположения или из эквивалентных ему утверждений²⁾.

Сформулированная особенность становится еще более удивительной при рассмотрении континуум-проблемы в ее связи с общими вопросами арифметики кардинальных чисел. Легко доказать, что мощность континуума эквивалентна $2^{\aleph_0}$. Таким образом, континуум-проблема оказывается проблемой из области «таблицы умножения» кардинальных чисел, а именно проблемы вычисления определенного бесконечного произведения (фактически, простейшего нетривиального произведения, которое можно сформулировать). Существует, однако, не единственное произведение (сомножителей > 1), которому можно приписать значение наибольшей верхней границы значений этих сомножителей.

Все, что нам известно о вычислении бесконечных произведений, — это две нижние границы, полученные Кантором и Кёнигом (последняя из них заключает в себе обобщение сформулированной ранее негативной теоремы о мощности континуума), а также несколько редукционных теорем. Эти теоремы сводят³⁾ вычисление бесконечного произведения к вычислению $\aleph_\lambda^{cf(\aleph_\lambda)}$ и осуществлению некоторых фундаментальных операций над ординальными числами, таких как определение предела последовательности этих чисел. Выражение $\aleph_\lambda^{cf(\aleph_\lambda)}$ и связанные с ним произведения и степени могут быть легко вычислены⁴⁾, если принять обобщенную континуум-гипотезу, т.е. предположить, что $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$ для любого λ или, другими словами, что число подмножеств множества мощности $\aleph_\lambda$ равно $\aleph_{\lambda+1}$. Однако без специальных предположений неизвестна даже справедливость импликации: $m < n$ следует $2^m < 2^n$ (хотя очевидно, что $2^m \leq 2^n$), ни даже, что $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

3. Переформулировка проблемы на основе анализа фундаментальных положений теории множеств и результатов, полученных автором.

Недостаточность результатов, проясняющих даже наиболее фундаментальные вопросы в этой области, может быть вызвана чисто математическими трудностями. Однако, как нам кажется, за этим кроются более глубокие причины, и полное решение всех этих проблем может быть достигнуто в результате более глубокого анализа (более глубокого, чем математика привыкла давать) значений употребляемых терминов (таких как

¹⁾См. F. Hausdorff, Mengenlehre, 3rd ed. (1935), p. 32. Даже для дополнений аналитических множеств этот вопрос на настоящий момент не решен, и может быть доказано только, что они имеют (если они бесконечны) мощность либо $\aleph_0$, либо $\aleph_1$, либо континуум (см. С. Kuratowski, Topologie I, Warszawa-Lwow, 1933, p. 246).

²⁾См. Sierpinski, Hypothese du Continu, Warsaw, 1934.

³⁾Эта редукция может быть осуществлена благодаря результату и методу, изложенному в работе А. Тарского, опубликованной в Fund. Math, 7(1925), p. 1.

⁴⁾Для регулярных кардинальных чисел результат получается сразу: $\aleph_\lambda^{cf(\aleph_\lambda)} = \aleph_\lambda^{\aleph_\lambda} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

«множество», «взаимно однозначное соответствие» и др.), а также аксиом, лежащих в основе использования этих терминов. Некоторые варианты такого анализа были уже предложены. Давайте посмотрим, что нам предлагается.

Прежде всего, это интуиционизм Брауэра, результаты которого являются явно деструктивными. Вся теория кардинальных чисел, больших $\aleph_1$, обесценивается¹⁾. Канторовское предположение получает несколько различных трактовок. Все они, хотя и очень интересные сами по себе, весьма далеки от оригинального понимания проблемы. Они ведут частично к утвердительным, частично к отрицательным ответам²⁾. Однако далеко не все в этой области было достаточно прояснено. А. Пуанкаре и Г. Вейль³⁾, выражавшие полуинтуиционистскую точку зрения, едва ли сохранили значительно большее из положений теории множеств.

Однако это отрицательное отношение к канторовской теории множеств никоим образом не является неизбежным следствием более глубокого анализа ее фундаментальных положений, а представляет собой результат, вытекающий из определенного философского взгляда на природу математики, при котором математические объекты существуют только в той степени, в которой они могут быть восприняты (или считается, что могут быть восприняты) как действия или конструкции нашего сознания или по крайней мере, которые мы можем постигать своей интуицией. Для тех же, кто не разделяет этих взглядов, очевидно, что существует вполне удовлетворительное основание канторовской теории в ее полной оригинальной трактовке, а именно — аксиоматика теории множеств, в которую может быть включена (в подходящей интерпретации) логическая система «Принципов Математики».

На первый взгляд может показаться, что парадоксы теории множеств противоречат такому восприятию, но более глубокий взгляд показывает, что это не так. Эти парадоксы представляют собой очень серьезную проблему, но не для канторовской теории множеств. Пока понятие множества существует и важно для математики (по крайней мере, математики сегодняшнего дня, включая всю канторовскую теорию множеств), множествами будут: множество целых чисел, рациональных чисел (т. е. пар целых чисел), действительных чисел (т. е. множеств рациональных чисел), функций действительных чисел (множества пар действительных чисел) и т. д. Когда в общем виде

¹⁾L. E. J. Brouwer, Atti del IV congresso Internazionale dei Matematici (Roma 1908), p. 569.

²⁾L. E. J. Brouwer, Over de dondslagen der wiskunde (Amsterdam and Leipzig, 1907), I, 9; III, 2.

³⁾H. Weyl, Das Kontinuum, 2nd ed. 1932 (имеется русский перевод: Вейль Г. Континуум. В кн. Герман Вейль. Математическое мышление. — М.: Наука, 1989, с. 93–163. — Прим. перев.). Если описанную там процедуру конструирования множеств (с. 20) итерировать достаточно большое (трансфинитное) число раз, можно в точности получить действительные числа, являющиеся моделью для теории множеств, о которой речь пойдет ниже, и в которой континуум-гипотеза истинна. Но подобная итерация едва ли возможна в рамках полуинтуиционистской точки зрения.

сформулированы теоремы для всех множеств или о существовании множеств, они всегда могут быть легко применимы для конкретных множеств: целых чисел, действительных чисел и т. д.

Концепция, согласно которой множество является чем-то, получаемым из целых чисел (или других хорошо определенных объектов) путем последовательного применения¹⁾ операции «множество чего-то» («set of...»)²⁾, не приводит к противоречию, в отличие от концепции, когда множество получается путем деления всего сущего на две категории (принадлежащих и не принадлежащих данному множеству элементов — *Прим. перев.*). Это «наивное», но работающее понимание термина множества до сих пор показало себя вполне самостоятельным³⁾.

Но, более того, аксиомы, лежащие в основе неограниченного использования понятия множества, или по крайней мере часть из них, которая необходима для всех математических доказательств, были столь тонко сформулированы в аксиоматике теории множеств⁴⁾, что вопрос вывода из них некоторых утверждений может быть преобразован посредством символов логики в чисто комбинаторную проблему, касающуюся манипуляции символами, которую даже наиболее радикальные интуиционисты вынуждены признать как имеющую смысл.

Таким образом, канторовская континуум-проблема, независимо от того, с каких философских позиций на нее посмотреть, сохраняет следующее значение: можно ли из аксиом теории множеств, как они были сформулированы выше, получить какой-либо ответ на вопрос Кантора и каким может быть этот ответ.

При такой интерпретации существует (при условии непротиворечивости этих аксиом) а priori три возможности для канторовского предположения:

¹⁾Эту фразу следует понимать как то, что в этот процесс включена трансфинитная итерация всех множеств, полученных конечными итерациями, в результате которых снова получаются множества. Эти множества образуют базис для последующего применения операции «множества чего-то».

²⁾Операцию «множество чего-то» невозможно корректно определить (по крайней мере, на сегодняшнем уровне знаний), но ее смысл можно пояснить через другие выражения, включающие понятие множества, например в таких как: «совокупность X », «комбинации любого числа X », «часть целого X ». В отличие от понятия «множества в общем» (если рассматривать его как изначальное), у нас есть ясное понимание, что означает эта операция.

³⁾Прямо из этого понимания термина «множество» следует утверждение, что множество всех множеств или другие, подобные ему множества, не могут существовать, так как каждое, полученное таким образом множество, порождает следующую ступень применения операции «множество чего-то» и, таким образом, ведет к существованию еще большего множества.

⁴⁾См. например, P. Bernays, A system of axiomatic set theory, J. Symb. Log. 2 (1937), p. 65; 6 (1941) p. 1; 7 (1942), p. 65, p. 133; 8 (1943), p. 89. J von Neuman, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. reineu. angew. Math. 154 (1925), p. 219, см. также там же, 160 (1929), p. 227; Math. Zs. 27 (1928), p. 669. K. Gödel, The Consistency of the Continuum Hypothesis (Ann. Math. Studies No. 3), 1940.

оно может быть либо доказуемо, либо опровержимо, либо неразрешимо (независимо от остальных аксиом теории множеств — *прим. перев.*)¹⁾. Третья возможность (которая является всего лишь точной формулировкой высказанной ранее мысли, что трудности канторовской континуум-гипотезы имеют не математический характер) наиболее вероятна и на сегодняшний день является наиболее обещающим путем при штурме данной проблемы.

Один результат в этом направлении был уже получен, а именно, что канторовское предположение не опровергается аксиомами теории множеств (при условии, что эти аксиомы не противоречивы). Стоит отметить, что если кому-нибудь удастся показать, что данное утверждение недоказуемо, это (в отличие, скажем от доказательства трансцендентности π) не решит вопроса полностью. Такое решение удовлетворит только того, кто отрицает (как например, интуиционисты), что за понятиями и аксиомами теории множеств кроется какая-либо реальность, но не человека, который верит в эту реальность. Поскольку в этой реальности канторовское утверждение может быть истинным или ложным, его неразрешимость, насколько это известно на сегодняшний день, означает, что эти аксиомы не содержат полного описания этой реальности. Вера в такую реальность не является химерой, поскольку возможно указать решение этой проблемы, даже если она не выводима из аксиом в их настоящей форме.

Во-первых, аксиомы теории множеств не создают замкнутую в себе систему. Напротив, понятие множества²⁾, на котором они базируются, предполагает их расширение, которое утверждает существование итерации операции «множества чего-то». Эти аксиомы также могут быть сформулированы как утверждения о существовании очень больших кардинальных чисел (или, что тоже самое), множеств, имеющих эти кардинальные числа. Наиболее простые из этих аксиом бесконечности утверждают существование недостижимых кардинальных чисел (или сильно недостижимых чисел) $> \aleph_0$. Последняя аксиома, грубо говоря, означает, что совокупность множеств, полученная в результате процесса формирования множеств в других аксиомах, собирается в множество и, следовательно, становится новой основой для дальнейшего развития этого процесса³⁾. Другие аксиомы бесконечности

¹⁾В случае противоречивости аксиом существует еще одна априорная возможность для канторовского предположения, а именно оно будет одновременно доказуемо и опровержимо с помощью аксиом теории множеств.

²⁾Понятие «свойства множества» (второе основное понятие теории множеств) можно постоянно расширять, введя понятие «свойство свойств множества» и т. д. Посредством этого расширения могут быть получены новые аксиомы, выводы из которых, однако, ограничены областью множеств (такие как континуум-гипотеза), содержащихся в аксиомах, зависящих от понятия множества.

³⁾См. E. Zermelo, *Fund. Math.* 16 (1930), p. 29.

сформулированы Мало¹⁾. Об этой области теории бесконечности мало что известно, но в любом случае эти аксиомы ясно показывают, что имеющаяся на сегодняшний день аксиоматическая теория множеств не полна и что она однозначно может быть пополнена новыми аксиомами, которые являются естественным продолжением сформулированных ранее аксиом. Можно показать, что эти аксиомы имеют следствия, далеко выходящие из области очень больших трансфинитных чисел, которые являются их непосредственными объектами. Насколько нам известно, в предположении общей непротиворечивости, каждая из этих аксиом увеличивает число разрешимых утверждений даже в области диофантовых уравнений. Что же касается континуум-гипотезы, то мало надежды решить ее с помощью тех аксиом бесконечности, которые могут быть сформулированы на базе известных сегодня принципов. Например, упомянутое выше доказательство неопровержимости континуум-гипотезы остается без изменений и с этими аксиомами. Но, возможно, существуют кроме обычных аксиом, аксиом бесконечности и аксиом, упомянутых в примечании 4, другие аксиомы, основанные на неизвестных пока принципах, которые обеспечат нас более глубоким пониманием понятий, лежащих в основе логики и математики.

Более того, опуская внутреннюю необходимость таких аксиом (или даже если такой необходимости нет вовсе), решение об их истинности возможно получить иным путем, изучая их «успехи», а именно продуктивность следствий, в частности их «верифицируемость», т. е. выводимость без привлечения дополнительных предположений, что позволяет свести в одно доказательство много разных доказательств (хотя доказательства с использованием этих дополнительных предположений бывают значительно проще).

Аксиомы системы действительных чисел, отрицаемой интуиционистами, в этом плане были до некоторой степени верифицированы тем фактом, что аналитическая теория чисел часто позволяет нам получать теоретико-числовые теоремы, которые, в свою очередь, могут быть верифицированы элементарными методами. Однако можно предложить и более высокую степень верификации. Могут существовать аксиомы, настолько богатые по их верифицируемым следствиям, в такой степени освещающие всю дисциплину, обеспечивающие столь мощные методы решения данных проблем и даже решающие эти проблемы, насколько это возможно в конструктивном смысле, что независимо от их внутренней необходимости они могут быть приняты в той же степени, как и хорошо обоснованная физическая теория.

4. Некоторые размышления по поводу следующего вопроса: в каком направлении можно искать решение континуум-проблемы? Являются ли такие размышления адекватными континуум-проблеме? Имеются ли

¹⁾См. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. 63 (1911), pp. 190–200; 65 (1913), pp. 269–276. Из представления предмета по Мало, однако, не вытекает, что числа он определяет как актуально существующие.

серьезные указания на ее неразрешимость относительно известных аксиом. Я думаю, что существует, по крайней мере, два таких указания.

Первое обусловлено тем, что существуют два хорошо различимых класса объектов, которые удовлетворяют аксиомам теории множеств. Один класс состоит из множеств, определяемых некоторым образом через свойства этих элементов¹⁾. Другой класс множеств— это произвольные совокупности, независимо от того, могут ли они быть определены и каково это определение.

До того, как будет определено, какие объекты должны быть пересчитаны и на основе какого взаимно однозначного соответствия, вряд ли можно говорить об их числе (кроме, конечно, счастливого совпадения). Однако, если кто-то считает, что о множествах бесполезно говорить в каком-либо смысле, кроме как об «объеме» определяющих его свойств (т. е. экстенсивно), или по крайней мере, никакие другие множества, с этой точки зрения, не существуют, тогда вряд ли можно ожидать, что сколь-нибудь значительные проблемы теории множеств могут быть разрешены без использования этой, в его представлении, неотъемлемой характеристики множества, а именно, что все они определяются некоторыми свойствами (или, в некотором смысле, идентичны этим свойствам). Эта характеристика множества, однако, не формулируется эксплицитно и не содержится имплицитно в принятых аксиомах теории множеств. Так, с любой точки зрения, если еще к этому добавить сказанное в пункте 2, вероятно, что континуум-проблема не может быть разрешена с помощью известных до сих пор аксиом. С другой стороны, она может быть разрешена с помощью новой аксиомы, которая установит или предположит нечто, касающееся определимости множеств²⁾.

Последняя половина этого утверждения была верифицирована, а именно, только что упомянутое понятие «определимости» (которое самое по себе определимо в терминах начальных понятий теории множеств) дает возможность вывести обобщенную континуум-гипотезу, если к аксиомам теории множеств добавить аксиому, что каждое множество определимо в указанном смысле³⁾.

Поскольку эта аксиома (назовем ее «А») не противоречит другим аксиомам теории множеств (при условии их непротиворечивости), этот результат

¹⁾ А именно, определяемых «в терминах ординальных чисел» (т.е. грубо говоря, в предположении, что для каждого ординального числа дан определяющий символ) посредством трансфинитной рекурсии основных понятий логики, $\in$ -отношений, применяемых только к элементам множеств, множество кванторов применимых только к множествам, определимых на предыдущем шаге. См. мою работу, цитируемую в сносках 13 и 19, где практически то же самое, но слегка по-другому выражено с помощью понятия «определимости» (definability), названную там «конструктивностью». Парадокс Ричарда, конечно, не применим к этому типу определимости, поскольку общее число ординалов заведомо несчетно.

²⁾ Попытка Гильберта решения этой проблемы, которая никогда не была доведена до конца, также основывалась на рассмотрении всех возможных определений действительных чисел.

³⁾ С другой стороны, из аксиомы, в каком-то смысле противоположной данной аксиоме, может быть получено отрицание канторовского утверждения.

(независимо от философской точки зрения) показывает, что континуум-гипотеза не противоречит аксиомам теории множеств при условии того, что эти аксиомы сами не противоречивы¹⁾. Это доказательство в своей структуре аналогично доказательству непротиворечивости неевклидовой геометрии путем построения модели в рамках евклидовой геометрии. Таким образом, как следует из аксиом теории множеств, множества, определенные в вышеуказанном смысле, определяют модель теории множеств, в которой истинны как утверждение А, так и обобщенная континуум-гипотеза. Но понятие «определимости» может быть сформулировано таким образом, что оно станет определением понятия «множества» и отношения «элемента чего-то» (которые удовлетворяют аксиомам теории множеств) в терминах абсолютно других понятий, а именно, понятия «ординального числа», в смысле элементов, упорядоченных отношением «больше» и «меньше». Это упорядочивающее отношение само по себе и «рекурсивно определенная функция ординалов» могут быть взяты за основу и аксиоматически описаны с помощью расширения аксиом Пеано²⁾. [Заметим, что это не относится к моей оригинальной формулировке, представленной в моих первоначальных работах, поскольку понятие «множества» с его связями между элементами встречается в понятии «определимого множества». Множества остаются теми же, если в понятии «определимости» термин «множество» заменить на «определяемое множество»].

Второй аргумент в пользу неразрешимости континуум-проблемы на основе традиционных теоретико-множественных аксиом может быть обоснован с помощью фактов (неизвестных или не существовавших во времена Кантора), которые указывают, как нам кажется, что канторовское предположение неверно³⁾ и его отрицание (в указанном выше смысле) возможно вывести на основе известных сегодня аксиом теории множеств.

Существует значительное число фактов этого рода, которые в то же самое время делают вероятным предположение, что не все множества определяемы в сформулированном выше смысле⁴⁾. Например, один такой

¹⁾См. мою работу, указанную в примечании ⁴⁾ на с. 168 (Proc. Nat. Ac. Sci. 25 (1939), p. 220). Пользуясь случаем, исправляю ошибку и опечатку, которые были в этой работе. В строчках с 25 по 29 с. 221 и строчках с 4 по 6 и 10 на с. 222, строчках с 11 по 19 на с. 223 букву α следует заменить (где это возможно) буквой μ . Также в теореме 6 на с. 222 символ « $\Leftarrow$ » должен быть вставлен между $\phi_\alpha(x)$ и $\alpha_\alpha(\dot{x})$. Для понимания доказательства, процитированного в примечании ⁴⁾ на с. 168 это весьма существенно.

²⁾О таком расширении см. A. Tarski, Ann. Soc. Pol. Math. 3 (1924), где в аксиомах используется общее понятие «множества ординальных чисел». Его можно избежать без потерь для доказуемых в рамках этого расширения теорем, если ограничиться рекурсивно определяемыми ординалами.

³⁾Такого же рода соображения были высказаны Н. Лузиным в Fund. Math. 25 (1935) p. 129 ff. См. также В. Серпинский, там же, p. 132.

⁴⁾Более ожидаемым является то, что все множества «определяемы в терминах ординалов», если все процедуры определены (т. е. кванторы всеобщности и существования, операция

факт — это наличие определенных свойств точечных множеств (предельной разреженности), для которых можно доказать существование несчетных множеств, обладающих этими свойствами. При этом не видно путей, где можно искать примеры таких множеств мощности континуума.

Свойства этого типа (для подмножеств прямой) таковы: (1) «быть первой категорией для каждого совершенного множества»¹⁾; (2) «быть преобразованным в множество меры нуль каждым непрерывным взаимно однозначным отображением прямой в себя»²⁾.

Это не единственные следствия континуум-гипотезы. Есть еще и такие, где существуют: (1) подмножества прямой мощности континуума, которые покрыты (за исключение, возможно счетного числа точек) любым плотным множеством интервалов или, другими словами, которое не содержит несчетных нигде не плотных на прямой подмножеств³⁾, (2) подмножества прямой мощности континуума, которые не содержат несчетного подмножества меры нуль⁴⁾, (3) подмножества гильбертова пространства мощности континуума, которые не содержат несчетных подмножеств конечной размерности⁵⁾ (4) бесконечная последовательность A^i разбиений любого множества M мощности континуума, которая может быть преобразована в последовательность континуальных, взаимно непересекающихся множеств A_x^i , таких что, каким бы путем множество A_x^i не было бы выбрано для каждого i , $\prod_i (M - A_x^i)$ всегда счетно⁶⁾. Даже если в (1)–(4) «мощность континуума» будет заменена на $\aleph_1$, эти утверждения трудно предвидеть; утверждения же, получаемые из (3), в этом случае даже эквивалентны (3).

Можно сказать, что многие из результатов теории точечных множеств, полученные без использования континуум-гипотезы, весьма неожиданны и непредвидимы⁷⁾. Но ситуация здесь несколько иная, чем в тех примерах (таких, например, как кривая Пеано), где впечатление противоречивости может быть объяснено несогласованностью между нашими интуитивными геометрическими представлениями и теоретико-множественным концепциями, которые имеют место в этих теоремах. Также очень подозрительно,

$\hat{X}$ — «множество объектов x , для которых...») относительно *всех* множеств, независимо от того были ли они определены или могут быть определены. Однако это предположение еще не может быть взято за аксиому. Следует отметить, что доказательство континуум-гипотезы, не переносится на этот тип определимости, хотя эквивалентность двух этих понятий определимости не противоречит аксиомам теории множеств.

¹⁾См. Sierpinski, Fund. Math. 22 (1934) p. 270 и C. Kuratowski, Topologie 1, p. 269.

²⁾См. N. Lusin и W. Sierpinski, Bull. Intrnat. Ac. Sci. Cracove 1918, p. 35 и W. Sierpinski, Fund. Mat. 22 (1934). p. 270.

³⁾См. Lusin, C. R. Paris 158 (1914), p. 1259.

⁴⁾См. W. Sierpinski, Fund. Math. 5 p. 184.

⁵⁾См. W. Hurewicz, Fund. Math. 19 (1932), p. 8.

⁶⁾См. S. Braun и W. Serpinski, Fund. Math. 19 (1932), p. 1, утверждение (Q). Это утверждение и утверждение, обозначенное в тексте как (3), эквивалентны континуум-гипотезе.

⁷⁾См. также L. Blumental, Am. Math. Manthly. 47 (1940), p. 346.

что несмотря на многие правдоподобные утверждения, которые влекут отрицание континуум-гипотезы, неизвестно ни одного правдоподобного утверждения, из которого она бы следовала. Таким образом, можно весьма обоснованно предполагать, что роль проблемы континуума в теории множеств такова, что, в конце концов, будут открыты новые аксиомы, которые позволят опровергнуть канторовское предположение.

Примечание переводчика. Статья Гёделя завершалась списком технических терминов, содержащих определения: «множества меры нуль», «множеств первой категории» и пр. Большинство этих терминов в настоящее время хорошо известны не только профессиональным математикам, но и всем специалистам, работающим в близких к математике областях, поэтому при подготовке перевода мы сочли излишним давать в нем определение этих терминов. Исключение сделано лишь для нескольких специальных понятий теории кардинальных чисел, которыми пользуется автор статьи. Их определение в авторской трактовке приводится ниже.

1. Я называю «характером конфинальности» кардинального числа m (обозначается как $cf(m)$) наименьшее число n , такое, что m есть сумма n чисел, меньших m .

2. Кардинальное число регулярно, если $cf(m) = m$, в противном случае оно сингулярно.

3. Бесконечное кардинальное число m недостижимо, если оно регулярно и не имеет непосредственных предшественников (т. е. хотя оно и является пределом чисел $< m$, оно не является пределом меньшего, чем m таких чисел). Существует недостижимость в более сильном смысле, если каждое произведение (и, следовательно, каждая сумма), меньшее чем m чисел $< m$ само $< m$ [см. W. Serpinski и A. Tarski, Fund. Math. 15 (1930), p. 292; A. Tarski, Fund. Math. 30 (1938), p. 68]. Из обобщенной континуум-гипотезы следует эквивалентность этих двух понятий.

Комментарий переводчика

С. А. Вёкишенов

Приведенная выше работа К. Гёделя весьма примечательна. Один из крупнейших математиков XX в. дает пояснения к одной из самых метафизически «заряженных» проблем этого же века, в осмысление которой он сам внес выдающийся вклад. Статья, написанная в 1947 г., весьма полно отражает имеющееся на тот момент состояние континуум-проблемы. Однако за истекшие шестьдесят лет в этой области произошли перемены, коренным образом изменившие всю философию проблемы континуума.

При подготовке перевода мы сочли целесообразным снабдить его настоящим комментарием, нацеленным в основном на прояснение метафизики континуум-проблемы, что соответствует направленности данного Альманаха на выявление значимых для математики и физики XXI в. тенденций.

Путь «континуум-проблемы» именно как математической проблемы хорошо известен. Основные вехи на этом пути таковы.

1. Континуум-проблема, как и большинство важных проблем, возникла из математической эмпирики: Кантор заметил, что все множества, с которыми он работал, либо счетны, либо равномощны множеству действительных чисел, т. е. между счетным множеством и множеством всех подмножеств счетного множества нет никакой промежуточной мощности. Это предположение он сформулировал в 1877 г. в виде так называемой «континуум-гипотезы».

2. Безуспешные попытки Кантора доказать эту гипотезу привели его, тем не менее, к очень существенному результату — построению неограниченной шкалы кардинальных чисел, в которую укладывалась мощность любого вполне упорядоченного множества. Континуум-гипотеза утверждала, что $c = \aleph_1$. Если это предположение оказалось бы неверным, то возникла бы другая проблема: каково место континуума (всех подмножеств счетного множества) на кардинальной шкале. Это суть континуум-проблемы.

3. Значимость континуум-проблемы в глазах современников была столь велика, что Д. Гильберт в своем знаменитом списке 23-х проблем, представленном международному математическому конгрессу 1900 г., поместил ее на первое место.

4. В 1905 г. Й. Кёниг показал, что мощность континуума c не может быть равна никакому $\aleph_\lambda$, где λ — счетный предельный ординал.

Забегая вперед, можно сказать, что этот результат до сих пор дает единственную локализацию (если это можно так назвать) мощности континуума.

5. В том же 1905 г. Б. Рассел обнаружил парадокс универсального множества: «множество всех множеств» содержит в себе внутреннее противоречие (строго говоря, известное еще неоплатонику Проклу). Предлагаемое им и его последователями решение было сугубо «юридическим». Были

«изданы законы» — сформулирована аксиоматическая система, в которой строго прописывались способы образования множеств. В качестве эталона была принята аксиоматическая система Цермело—Френкеля (**ZF**). Соответственно, континуум-проблема окончательно получила статус математической проблемы именно в рамках этой системы. При этом, разумеется, континуум-проблема остается таковой и в рамках других аксиоматических систем, например, аксиоматической системы Гёделя—Бернаиса (**GB**).

6. Философия аксиоматики и вообще «лингвистическая философия» достаточно серьезно, хотя и внешне незаметно, изменили первоначальный смысл континуум-проблемы и континуум-гипотезы. Вместо подсчета точек на прямой (при всей тонкости и неоднозначности этой процедуры и ее инструментов) была поставлена задача доказать или опровергнуть утверждение о числе этих точек в рамках эталонной аксиоматической системы **ZF**. Разумеется, это не одно и то же. Тем не менее, в XX в. такая смысловая замена (подмена?) обозначила «царский путь» в решении континуум-проблемы.

7. Первый вопрос, возникающий в связи с такой трансформацией, состоит в определении статуса континуум-гипотезы. Является ли она теоремой (в **ZF**) или аксиомой, т. е. не зависит от остальных аксиом **ZF**. Традиционный способ, позволяющий ответить на этот вопрос, состоит в построении подходящих моделей. В данном случае их построение требует исключительно высокой техники, граничащей с искусством, — ведь речь идет о моделях всего математического универсума. Именно К. Гёдель в 1939 г., основываясь на идеях Д. Гильберта, построил модель **ZF**, в которой $c = \aleph_1$. Суть его построения в нескольких словах можно описать так.

Главным «возмутителем спокойствия» в теории множеств является диагональный метод. Он позволяет указать элемент множества уже после того, как множество образовано. Это приводит к неконтролируемому росту числа элементов и, соответственно, мощности множества. Идея Гёделя состояла в том, чтобы «взять под контроль» образование таких элементов через полное описание процесса образования новых множеств. Множества, полученные таким образом, Гёдель назвал *конструктивными* (в статье он называет их «определяемыми» — definable), обозначил через L и ввел новую аксиому: «все множества являются конструктивными»: « $V = L$ ». Далее он доказал два фундаментальных результата:

- а) $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \Rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZF} + \langle V = L \rangle)$, т. е. из непротиворечивости **ZF** вытекает непротиворечивость **ZF** + « $V = L$ »;
- б) $\mathbf{ZF} + \langle V = L \rangle \Rightarrow c = \aleph_1$.

8. Следующий шаг в осмыслении континуум-проблемы сделал в 1963 г. П. Коэн. С помощью созданного им «метода форсинга», очень тонкой разработки диагонального метода, он показал, что:

$$\text{Con}(\mathbf{ZF}) \Rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZFC} + c = \aleph_2),$$

где $ZFC = ZF +$ аксиома выбора, обеспечивающая вполне упорядоченность любого множества;

$$\begin{aligned} \text{Con}(ZF) &\Rightarrow \text{Con}(ZFC + c = \aleph_3); \\ &\dots\dots\dots \\ \text{Con}(ZF) &\Rightarrow \text{Con}(ZFC + c = \aleph_{\lambda+1}), \end{aligned}$$

для любого конечного или счетного ординала λ .

Соединяя результаты Гёделя и Козна, можно, не впадая в противоречие, принять в качестве аксиомы любое из следующих утверждений:

$$c = \aleph_1, \quad c = \aleph_2, \quad c = \aleph_3 \dots$$

Таким образом, континуум-гипотеза не зависит от остальных аксиом ZF или, другими словами, ресурсов аксиоматической системы ZF не хватает, чтобы указать место континуума на кардинальной шкале.

9. Несколько позже, в 1966 г. П. Вopenка построил нестандартную модель ZF , в которой не выполняется континуум-гипотеза. Дальнейшее развитие этого подхода привело его к созданию «Альтернативной теории множеств», о которой речь пойдет ниже.

10. Созданный Козном «метод форсинга» был трансформирован Д. Скоттом и Р. Соловеем в теорию «булевозначных моделей» (1965 г.). Суть такой трансформации в общих чертах состояла в следующем. Значения классической функции истинности принадлежат, как известно, двухэлементному множеству {истина, ложь}. Замена этого множества на множество {1, 0} принципиально меняет семантику этой функции. Множество {1, 0} можно превратить в простейшую булеву алгебру, которую можно расширить до булевой алгебры B . Это позволяет ослабить понятие истинности, понимая ее как принадлежность некоторому выбранному ультрафильтру U («большому множеству»), являющемуся элементом B . Таким путем можно доказать множество теорем о независимости, в том числе и независимость континуум-гипотезы. Эта чрезвычайно эффективная техническая идея заставила еще раз задуматься о смысле «истины» в формальных теориях. Обсуждение этой проблемы можно найти, в частности, в книге Б. Россера «Simplified independence proofs» (1969) в разделе с примечательным, «пилатовским», заголовком: «What is a Truth?». Сама же идея «булевозначности» перешагнула континуум-гипотезу и стала самостоятельным предметом исследований и приложений. Появился булевозначный анализ, возникли идеи его приложения в квантовой механике и т. д.

11. Замена «истинности» на «истинность почти всюду», которая вытекает из конструкции Скотта — Соловея, естественно, ведет к стохастическому осмыслению континуум-гипотезы. В 1985 г. К. Фрилинг предложил простую схему ее опровержения на основе введенной им аксиомы симметрии. Суть этой аксиомы такова.

Два игрока независимо друг от друга бросают в мишень дротики. Если гипотеза континуума верна, то точки на поверхности этой мишени можно упорядочить так, что для всякой точки P множество $S_P = \{Q | Q < P\}$ счетно. Предположим, что первый и второй игроки попали в мишень в точках P_1 и P_2 соответственно. Тогда либо $P_1 < P_2$, либо $P_2 < P_1$. Предположим первое, тогда $P_1 \in S_{P_2}$. Предположим также, что сначала дротик бросил второй игрок, тогда S_{P_2} зафиксировано и, поскольку оно счетно, его мера равна нулю. Следовательно, вероятность попадания P_1 в S_{P_2} также равна нулю. По соображениям симметрии (в этом суть аксиомы) вероятность попадания P_2 в S_{P_1} также равна нулю. Следовательно, с вероятностью единица ни одно из этих событий не произошло. Это противоречит тому, что мишень имеет несчетную мощность.

12. Результаты Гёделя—Козна привели континуум-проблему в «патовое состояние». С одной стороны, изначальный вопрос: «Какова мощность континуума?» вполне правомерен и не зависит от какой-либо формализации: **ZF**, **GB**, **TT**, **NF** и т. д. С другой стороны, все имеющиеся на сегодняшний день ресурсы теоретико-множественного формализма не могут указать место континуума на кардинальной шкале.

Выход из этой ситуации можно искать по нескольким направлениям:

- (i) признать status quo данной ситуации;
- (ii) попытаться расширить систему **ZF**, добавив в нее утверждения, которые можно было бы принять за аксиомы, и которые бы разрешали континуум-гипотезу;
- (iii) принципиально пересмотреть статус континуума, в частности, задать прямой вопрос: «Является ли континуум множеством в самом общем, «наивном» смысле?»

Очень кратко скажем о каждой из этих возможностей.

(i) Для значительного числа профессиональных математиков «континуум-проблема» психологически вообще не является проблемой. Действительно, теория множеств предоставляет им удобный, легко формализуемый язык. Большинство встречающихся множеств счетны или несчетны. Где именно на кардинальной шкале находится континуум, на результаты математической деятельности никак не влияет. Что же касается несообразий, то их в математике вполне достаточно, и континуум-проблема, если отвлечься от ее метафизики, не меняет общей картины. Что же касается логиков, то они полагаются на новые аксиомы, добавление которых позволило бы разрешить континуум-проблему.

(ii) Наиболее естественное расширение **ZF** связано с введением так называемых «больших кардиналов» — по сути, более сильных, чем в **ZF** аксиом бесконечности. Как показал еще А. Тарский в 1938 г., при соответствующей формулировке этих аксиом из них следует аксиома выбора, а следовательно, возможность корректно сформулировать континуум-

проблему. Однако сами большие кардиналы представляют собой весьма экзотические математические объекты. Это дало повод известному математику А. Мэтиасу (A. Mathias) весьма остроумно назвать указанное расширение **ZF** «Surrealist landscape with figures» (при этом обыгрывается и сама фамилия «Mathias», созвучная с фамилией знаменитого французского художника-фовиста). Никаких приобретений в смысле локализации мощности континуума на кардинальной шкале этот путь пока не принес.

Следующий класс аксиом связан с введением в **ZF** той или иной формы стохастики. Этот путь, как было показано выше, довольно быстро ведет к цели, но значительная часть математиков не готова воспринимать эти утверждения как аксиомы. Изучением возможных подходов занимались М. ван Ламбалген (M. van Lambalgen) и др.

Особый интерес и надежды связаны с так называемой аксиомой детерминированности (Я. Мыцельский и Г. Штейнгауз). Эта аксиома, грубо говоря, утверждает, что каждое множество бесконечных последовательностей натуральных чисел может быть получено в результате некоторой игры двух лиц, одно из которых действует согласно выигрышной стратегии. У этой аксиомы много интересных следствий. Из нее, в частности, вытекает континуум-гипотеза в следующей форме: каждое бесконечное множество действительных чисел либо является счетным, либо имеет мощность континуума. Однако в теории **ZF** + «аксиома детерминированности» невозможно доказать вполне упорядоченность множества всех действительных чисел и, следовательно, соотнести его с каким-либо алефом.

(iii) Пересмотр статуса континуума, по-видимому самый естественный, но очень тонкий путь, поскольку он влечет за собой изменение взгляда на всю теоретико-множественную цивилизацию. Несколько движений в этом направлении будет осуществлено ниже.

Перечисленные выше шаги не исчерпывают интереса к континуум-проблеме прежде всего потому, что она является не только чрезвычайно сложной математической задачей, но и фундаментальным *метафизическим* вопросом. Главный смысл этого вопроса состоит в том — можно ли принципиально «очислить» континуум, свести его к множеству точек? Такая мысль казалась неестественной еще Аристотелю. Формулируя континуум-гипотезу, Кантор бросил вызов двухтысячелетней традиции.

Попав на почву математики, этот вопрос приобрел конкретные черты, но, тем не менее, остался метафизическим вопросом. Наметим только несколько линий его развития.

1. Прежде всего спросим себя: «Насколько можно было предвидеть независимость континуум-гипотезы от остальных аксиом **ZF**?». Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к оригинальным текстам Кантора.

Внимательный анализ показывает, что истинным фундаментом канторовской теории является не столько понятие «множества», сколько понятие

актуальной бесконечности, причем понимаемой в количественном смысле. Проиллюстрируем эту мысль.

Первоначальная конструкция Кантора, приводящая к актуальной бесконечности, заключается в следующем.

Рассмотрим ряд натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Он возникает путем присоединения единицы к уже имеющемуся числу. Назовем это первым принципом порождения. Таким образом, каждое число n можно полагать состоящим из n единиц. Количество чисел, получаемых этим способом, неограничено. Предположим теперь, что весь процесс присоединения единицы закончен, т. е. сделано бесконечное число шагов и образовано новое число ω . Это будет второй принцип порождения.

В соответствии с первым принципом порождения получим числа: $\omega + 1, \omega + 2, \omega + \dots + 3$, которых тоже существует неограниченное количество. К этим числам применим второй принцип порождения и образуем число 2ω . Если снова применить к числу 2ω первый принцип порождения, то мы приходим к продолжению: $2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, \dots$ и т. д.

Таким образом, можно получить числа вида: $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_n\omega +$, затем вида ω^ω и т. д.

Внимательное изучение этой конструкции позволяет заметить, что «количество» здесь понимается исключительно в разделительном смысле, т. е. как нечто состоящее из хорошо различимых частей, что позволяет назвать это «атомистической гипотезой». Эта гипотеза приводит к тому, что принцип разделительности становится синонимом принципа количественности, а само понятие количества становится предикатом множества. Тем самым предметом теории Кантора, в конечном итоге, становится множество. Он был первым, кто придал этому понятию экстенциональный характер. Его предшественники, как правило, заменяли «множество» словом «свойство» (например Б. Больцано).

Вспомним знаменитое канторовское определение множества: «Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unserer Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen».

«Под „множеством“ мы будем понимать всякое соединение M определенных и различных объектов m (называемых элементами множества M), существующих в нашем восприятии или в нашей мысли».

Ключевым моментом в конструкции Кантора послужили две характеристики множества: «мощность» (*Mächtigkeit*) и «количество» (*Abzahl*). Соответствующие определения выглядят следующим образом: «Мощностью или кардинальным числом множества M мы назовем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из M , когда мы абстрагируемся от количества его различных элементов и от порядка их задания. Напротив, „количество“ (позднее Кантор назвал

его порядковым типом) — это общее понятие, что получается из M , если отвлечься от качества элементов, но сохранить их порядковое различие».

Несмотря на чрезвычайную общность этих понятий, можно увидеть, что они являются не более чем обобщением количественного и порядкового аспекта натурального числа. Не углубляясь в хорошо известную область уточнения этих понятий, отметим лишь, что по своему смыслу они должны быть применены далеко не ко всем множествам, а только к тем, которые возникают в процессе порождения согласно высказанным выше принципам. В этом случае эти понятия не отрываются от источника своего возникновения и не создают проблемной ситуации.

Однако все разворачивалось по-иному. Признав множество самостоятельным математическим объектом, Кантор вводит принципиально новую операцию — образование множества степени $P(x)$, множества всех подмножеств X . И хотя $P(x)$ уже прямо не связано с первоначальными процессами порождения, Кантор все равно применяет к нему понятие мощности и доказывает, что мощность $P(x)$ строго больше мощности X , хотя позднейшие исследования не раз ставили под сомнение корректность его метода доказательства. Благодаря этой теореме Кантор строит количественную шкалу актуально бесконечного. Одновременно это приводит к беспрецедентному росту множеств, вовлекаемых в новую теорию.

Введением операции образования множества-степени Кантор фактически разделил свою теорию на две составляющие: теорию бесконечных чисел и собственно теорию множеств. Отождествление этих составляющих явилось шагом, который привел к континуум-проблеме. При таком отождествлении континуум «приобретает» мощность волевым усилием и *a priori* нет никаких аргументов, почему ее величину можно извлечь из теории бесконечных чисел. В этом смысле независимость утверждений о мощности континуума от остальных теоретико-множественных аксиом выглядит вполне естественно. (Данные рассуждение, вероятно, можно отнести к «упущенным возможностям» и пополнить, тем самым, известный список Ф. Дайсона.)

2. Приведенные рассуждения, тем не менее, должны были лечь в определенную канву формализма, в рамках которого только и можно понять все оттенки проблемы. Можно восхищаться орнаментами Альгамбры, но чтобы более тонко оценить их симметрию, мы должны изучить соответствующие им группы.

Континуум-проблема имеет смысл, как уже подчеркивалось в рамках «наивной теории» множеств. Однако «патовое состояние» этой проблемы возникло в рамках конкретного формализма. Это говорит о том, что мы либо неправильно выбрали формализм, либо недостаточно искусны в его применении. Попробуем под этим углом зрения осмыслить основу теоретико-множественного формализма, а именно — аксиоматического метода.

Как известно, непосредственным толчком к оформлению современной аксиоматики послужило открытие неевклидовой геометрии. Собственно

говоря, все открытие состояло в том, что некоторые свойства пространства перестали быть априорными и перешли под управление аксиом. Таким образом, возникло *множество* пространств, среди которых находилось и евклидово пространство. Дальнейшая деятельность по конструированию этих пространств приобрела такой размах, что потребовалось эксплицитно выделить, осмыслить и обобщить механизм этой деятельности. Так возникла аксиоматика в ее современном понимании.

Этот фрагмент аксиоматического метода хорошо известен, однако остается один очень существенный вопрос. Для того чтобы изучать и сравнивать различные аксиоматические теории, необходима убежденность, что их аксиомы описывают объекты *одной природы*.

Можно представить себе следующую ситуацию. Два разумных существа, одно на Земле, другое на некой планете в Туманности Андромеды, с помощью аксиом описывают окружающий мир. Это описание имеет универсальную ценность, если для них можно найти (а скорее, постулировать) единую основу. Например, считать, что все вещество во Вселенной складывается из элементов таблицы Менделеева.

Этот методологический подход, свойственный, строго говоря, всему рациональному познанию, впервые был осознан еще Галилеем. Его идея математизации естествознания с необходимостью предполагала введение универсальной субстанции — материи. В этом случае отношения между физическими объектами представлялись теми или иными математическими структурами, а вопрос, насколько такое представление адекватно, в принципе снимался. В математике, как это ни парадоксально, подобная методология была разработана значительно позже — в конце XIX в., когда Г. Кантором было отчетливо осознано, что универсальным понятием для математики может выступить понятие *множества*.

Таким образом, теория множеств стала играть в математике примерно такую же роль, как сама математика — в естествознании. По транзитивности это означает, что основу большинства теоретических конструкций составляет множество. Соответственно, все аксиоматические теории явно или неявно апеллируют к понятию множества. К примеру, говоря о различных пространственно-временных континуумах, мы подчеркиваем, в частности, что пространство-время специальной теории относительности есть *множество*, которое удовлетворяет одной системе аксиом, а пространство-время общей теории относительности является опять-таки *множеством*, которое удовлетворяет другой системе аксиом.

Возникает парадоксальная ситуация. Современная аксиоматика, возникшая во многом благодаря отрицанию априорности евклидова пространства, сама априорно опирается на понятие множества. Можно сказать, что современный аксиоматический метод основан на *теоретико-множественном* априоризме. Следовательно, как в наивной, так и аксиоматической теории множеств мы а'priori считаем континуум множеством, т. е. неким статиче-

ским образованием. Между тем, существуют веские аргументы, что это не так. Приведем некоторые из них.

Начнем с того, что никакой объединяющей идеи, «существующей в нашем воображении или нашей мысли» для подмножеств данного множества, у нас нет. Мы просто сразу полагаем его множеством.

С другой стороны, в этом «множестве» можно увидеть внутренние процессы, порожденные диагональной процедурой (первый это заметил, кажется, О. Беккер еще в 1953 г.). Сам же Кантор путем достаточно спорных рассуждений трансформировал этот процесс в неограниченную шкалу мощностей.

Как уже подчеркивалось выше, без противоречия можно полагать, что континуум имеет мощности: $c = \aleph_1$, $c = \aleph_2$, $c = \aleph_3$, ... Если отвлечься от модельного характера этих соотношений, то мощность континуума c вполне можно считать *переменной величиной*.

Следует сказать, что понимания континуума как среды становления придерживались многие математики, например, Л. Э. Я. Брауэр и А. Н. Колмогоров. В частности, Колмогоров в Математической энциклопедии, в статье «Бесконечность» писал: «В случае континуума действительных чисел уже рассмотрение одного его элемента — действительного числа — приводит к изучению процесса образования его последовательных приближений, а рассмотрение всего множества действительных чисел приводит к изучению общих свойств такого рода процессов образования его элементов. В этом именно смысле сама бесконечность натурального ряда, или системы всех действительных чисел (континуума), может характеризоваться как бесконечность лишь потенциальная».

3. Если множество как единственная основа математического универсума вызывает возражения, то возникает естественный вопрос — что можно ему противопоставить. В рамках теории множеств этот вопрос решается чрезвычайно просто — если некая совокупность элементов не является множеством, то она является «классом», т. е. *не-множеством* по определению. Например, формальная система Гёделя — Бернайса **GB** постулирует наличие двух сущностей: множеств и классов. При этом ее аксиоматика устроена таким образом, что все «неудобные» совокупности элементов оказываются классами.

Возможно ли этому, «апофатическому», определению классов придать позитивный смысл? Укажем две конструкции, которые качеством «позитивности» обладают, а именно: «категорию» и «полумножество».

В теории категорий, делающей акцент не на структуре объектов, как в теории множеств, а на их взаимодействии с другими объектами, достаточно легко возникают объекты, которые неправомерно соотносить с множествами.

Менее известными (но не менее значимыми) являются работы П. Вонпенки по созданию и развитию «Альтернативной теории множеств». При этом автор, сам очень крупный специалист по теории множеств, подвергает

ее беспрецедентной критике, во многом напоминающей борьбу за «наблюдаемость» в физике. Поскольку эта критика действительно очень существенна, процитируем ее основные моменты, пользуясь русским переводом книги *Вопенка П. «Математика в альтернативной теории множеств»*.— М.: Мир, 1983.

«Канторовская теория множеств есть математическая теория конечных и актуально бесконечных множеств. В ней канонизируются основные принципы, которые математики признают в качестве верных утверждений относительно множеств.

Основы теории конечных и бесконечных множеств были заложены Б. Больцано, который сформулировал некоторые из ее принципов. Несколько позднее Г. Кантор развил теорию множеств систематическим образом и дополнил ее рядом принципов.

Часть этих принципов, образующих базис теории множеств, относится к конечным множествам и со времен начала цивилизации признается в качестве основных истин не только математиками, но и всеми людьми. Принципы эти считаются самоочевидными как в результате традиционного образования, так и в силу того, что их можно непосредственно проверить в некоторых очень частных случаях, встречающихся в каждодневной практике. Тем не менее, критический анализ показывает несостоятельность обычных доводов в пользу абсолютного признания даже этих принципов. ...

И все же основной предмет канторовской теории множеств — это бесконечные множества; их существование предполагается. Основные постулаты канторовской теории множеств сформулированы не случайным образом и не выводятся непосредственно из простого допущения о существовании некоторого актуально бесконечного множества.

В настоящее время существование актуально бесконечных множеств превратилось в догму, в которую верит большинство математиков; более того, математики пытаются внушить веру в эту догму и другим людям. В то же время мы не можем указать какое-либо актуально бесконечное множество в реальном мире — здесь мы имеем дело с конструкцией, расширяющей реальный мир и качественно превосходящей пределы пространства возможностей наших наблюдений. Таким образом, утверждения о бесконечных множествах теряют свое феноменологическое содержание. В результате дальнейшее развитие теории множеств всецело зависит от формальных соображений, которые оказываются единственным надежным поводом в тьме, сгустившейся вокруг множеств. ...

Это обстоятельство привело к трудностям уже в самом начале теории множеств. ...

Сегодня известно заметное количество независимых суждений теории множеств, т. е. суждений, не доказуемых и не опровержимых с помощью

базисных аксиом. Похоже, что математики не могут предложить интересных принципов, достаточно сильных для разрешения их истинности. Типичным примером является континуум-гипотеза. Принятие континуум-гипотезы дает некоторые технические преимущества, но и теория множеств с отрицанием континуум-гипотезы также довольно интересна. Итак, нет единой теории множеств: вместо этого имеются различные теории множеств, для которых исходная канторовская теория множеств служит общей идейной основой. . . .

Попытки математиков до конца постичь актуальную бесконечность оказались безуспешными. Но это не уменьшает, конечно, важности канторовской теории множеств, которая остается свидетельством стремления человека раздвинуть пределы пространства способом, не имеющим никакой аналогии в истории.

Значение канторовской теории множеств для математики определяется не только ею самой, но и ее положением в математике. . . .

Теория множеств дала математике богатейшую в комбинаторном отношении структуру, а именно структуру конечных и актуально бесконечных множеств . . . , открыла путь к изучению необъятного количества различных структур и к беспрецедентному росту знаний относительно них. . . .

Современная математика изучает конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики. Это ставит под вопрос роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть низведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики.»

Выход из этого кризиса автор видит в перестройке математики на феноменологической основе. Именно с этой целью он и вводит понятие «полумножества».

Укажем конкретный, принадлежащий Вопенке пример полумножества, представленный им в жанре научной пародии, в данном случае на процесс эволюции (непревзойденный пример научной пародии привел еще в 60-х гг. прошлого века О. де Бартини).

«Профессор Чарльз Дарвин учит нас, что существует множество D объектов и линейное упорядочение этого множества, такие, что первый элемент этого множества есть некая обезьянка Чарли, каждый не первый элемент есть сын непосредственно предшествующего элемента и последний элемент есть сам Чарльз Дарвин. Совокупность A всех обезьян из множества D не является множеством; в противном случае A содержало бы последний элемент. Но, как знает всякий, сын обезьян суть обезьяны.

Таким образом, все элементы D оказались бы обезьянами, включая Чарльза Дарвина.»

При всей неординарности введенных конструкций они все же не создают полновесной альтернативы теоретико-множественной концепции, а скорее ее укрепляют.

Дело в том, что теория множеств, как уже подчеркивалось, есть, прежде всего, теория актуальной бесконечности. Множество возникает как *носитель* этой бесконечности. Без равновеликой альтернативы теоретико-множественной, количественной бесконечности невозможно найти серьезную альтернативу множеству. Разумеется, поиск такой альтернативы никак не может стать самоцелью. Речь может идти о поиске новой, столь же мощной и плодотворной теории, как и теория множеств, которая в настоящий момент медленно угасает. Без принципиально новой актуальной бесконечности такую теорию, как нам представляется, построить невозможно. Что это за бесконечность? Возможно, это порядковая бесконечность, которая предложена автором (см. статью С. А. Вékшенова настоящего сборника), возможно, какая-то иная.

Общую идею поиска такой бесконечности высказал в свое время Ю. И. Манин в письме к автору данных комментариев: *«Формальная бесконечность в любом ее варианте есть плод замученной любви-ненависти между языком и воображением, причем воображением обыденным, хотя бы и культивируемым с помощью математического образования. Лучшие всего ей там, где о ней не философствуют, а воспринимают наивно — математически: тогда есть шанс, что будут доказаны красивые и глубокие теоремы».*

Общий же смысл этих комментариев заключается в том, что континуум-проблема, хотя и решенная в определенных формальных рамках, продолжает сохранять свой статус в более широком контексте. Эта ситуация видится более предпочтительной, поскольку согласно известному психологическому эффекту Зейгарник не решенная задача запоминается лучше, чем решенная, что побуждает к ее дальнейшему осмыслению.

Литература

1. Cantor G. Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitum. (Русский перевод: Кантор Г. К учению о трансфинитном. Труды по теории множеств.— М.: 1985.)
2. Gödel K. The Consistency of the Continuum Hypothesis. Ann. Math. Studies No. 3, 1940 (русс. пер. УМН, т. 3, No 1, 1948, с. 1948–149).
3. Вopenка П. Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность. Пер. со словац.— Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004.
4. Vopenka P. Mathematics in the alternative set theory. Leipzig, 1979. (Русский перевод: Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.)

5. *Cohen P. J.* Theory and the continuum hypothesis. (Русский перевод: Коэн П. Д. Теория множеств и континуум-гипотеза.— М.: Мир, 1969.)
6. *Scott D., Solovay R.* Boolean-valued models for set theory, Proc. of Symp. in Pure Math., 13. II.
7. *Прокл.* Первоосновы теологии.— М.: Прогресс, 1993.
8. *Tarski A.* Über unerreichbare Kardinalzahlen, Fund. Math., 30, 1938, s. 68– 89.
9. *Bekker O.* Größe und Grenze der mathematischen Denkweise. Freiburg. München. 1959.
10. *Раишевский П. К.* О догмате натурального ряда // УМН, 1973, т. 28, вып. 4 (172).— с. 243–246.
11. *Freiling C.* Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line // The Journal of Symbolic Logic, v. 51, No 1, 1986.
12. *Rosser J. B.* Simplified independence proofs (Boolean valued models of set theory), Academic Press, New-York, London, 1969.
13. *Дайсон Ф.* Упущенные возможности. Перев. с англ. // Успехи математических наук, 1980, 35, Вып. 1.
14. *Кановей В. Г.* Aksioma выбора и aksioma детерминированности.— М.: Наука, 1984.
15. *Mathias A.* Surrealist landscape with figures // Periodica Mathematica Hungaria, v. 10 (2–3), 1973, p. 109–175.
16. *Kanamori A.* The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen, Bull. Symbolic Logic, 2(1), 1996, 1–71.
17. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.
18. *van Lambalgen M.* Independence, randomness and axiom of choice // The Journal of Symbolic Logic, v. 57, No. 4, 1992.
19. *ди Бартини Р. О.* Некоторые соотношения между физическими константами // Доклады Академии Наук СССР, 1965. Том 163, No 4.



Фоменко А. Т.
Эффект намагничения

Об основаниях теории множеств¹⁾

*П. Дж. Коэн*²⁾

Высказываться о философских проблемах теории множеств, — разумеется, не совсем то, что высказываться о самой теории множеств. Я, по крайней мере, в этом положении чувствую себя непривычно и неловко. Я остро ощущаю тщетность попыток сформулировать позицию, приемлемую для всех или хотя бы для многих, и одновременно сознаю непоследовательность и трудности моей собственной точки зрения. Конечно же, те, кто до меня совершали этот рискованный переход от математики к философии, обычно шли на это на более позднем этапе своей научной карьеры. Наконец, к довершению трудностей, почти немислимо добавить что-нибудь новое к этому старому спору. В самом деле, я склонен думать, что на такие фундаментальные вопросы любые технические достижения почти не проливают света — хотя, конечно, они могут повлиять на распространение той или иной точки зрения.

Но вот, невзирая на все эти оговорки, я чувствую некоторое воодушевление от возможности высказать свои мысли, надеюсь, не слишком догматично, и указать на обстоятельства, на которые, пожалуй, следует указать. Фундаментальные открытия в логике были сделаны так недавно, что мы еще в состоянии разделять глубокое волнение от этих поисков вслепую. Всплеск исследовательской активности в теории множеств, о котором свидетельствует нынешняя встреча, возможно, усиливает наш энтузиазм. Тон сегодняшних философских дискуссий, однако, как будто изменился. Возможно, математики полностью выложились в неистовых спорах прошлого, или их аудитория утомилась от полемики, — как бы то ни было, сейчас принято формулировать свою точку зрения, но не пытаться тут же

¹⁾*Cohen P. J.*, Comments on the foundations of set theory, *Proc. Sym. Pure Math.* 13:1 (1971), 9–15. Перевод с английского выполнен Ю. И. Маниным и опубликован в журнале «Успехи математических наук», т. XXIX. Вып. 5(179), 1974.

²⁾Пол Джозеф Коэн (1934–2007) — американский математик, профессор Стенфордского университета. Вершиной профессиональной деятельности Козна в области теории множеств стало опубликование в 1963 г. доказательства невозможности доказательства континуум-гипотезы Гёделя.

обращать слушателя в собственную веру. В этом духе собираюсь выступить и я, чистосердечно уверив слушателей в своей терпимости к чужим взглядам.

Хотя я не представляю себе, что можно было бы назвать «истинным» прогрессом в основаниях математики, очень интересно проследить с точки зрения историка, как высказывались на эту тему разные поколения, и попытаться угадать, как окрашивал их мнения дух времени. Сам я предпочитаю рассматривать математическую деятельность как сугубо человеческое предприятие, а отнюдь не как безличное наступление науки, свободной от всех человеческих слабостей. Так, позиция по вопросам оснований, которую занимает тот или иной математик, в большой мере определяется его воспитанием и окружением. Мне кажется, что желание принять принципы, ведущие к интересной и красивой математике, в прошлом безусловно преодолело разнообразную и серьезную критику. В этом докладе я хотел бы указать на аналогичные тенденции, которые существуют сегодня.

Прежде в центре споров находились многие вопросы, о которых я без особых на то причин высказываться не стану, например, закон исключенного третьего. Хотя он и связан с проблемами теории множеств, скажем, через использование непредикативных определений, сам по себе он не относится к теории множеств и здесь обсуждаться не будет. Я не намерен заниматься также всеми остальными проблемами законности применения исчисления предикатов, вопросами о природе формализации математики и чисто философскими вопросами, мало связанными со спецификой математического знания. Для меня важнейшей проблемой представляется существование бесконечных совокупностей. Отношение к бесконечным множествам по традиции было критерием размежевания математиков. Знаменитые логические антиномии никогда не играли заметной роли в математике просто потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми рассуждениями. Никогда не рассматривались все мыслимые объекты универсума, длины описаний и т. п. Все эти трудности принадлежат, собственно, истории развития понятия формальной системы. Подобно этому, парадоксы Зенона вовсе не производят на нас впечатления демонстрации серьезных трудностей, ради чего они и были придуманы. В общем, я склонен считать, что многие из этих проблем исторически связаны с переходным периодом от классической философии к нынешней математике.

Нет сомнения, что в ряде случаев бесконечными множествами можно пользоваться без особых опасений. Очевидно, все равно, сказать ли, что некоторым свойством обладают все целые числа или все элементы множества целых чисел. Точно также, сказать, что n принадлежит множеству четных чисел, все равно, что сказать « n четное». Иными словами, можно заменить использование некоторых множеств названием соответствующих свойств. Если бы это удавалось сделать всегда, у нас осталось бы мало оснований для беспокойства. В теории чисел, желая избежать апелляции к понятию произвольного множества целых чисел, мы должны формули-

ровать принцип индукции отдельно для каждого свойства, которое можно выразить. Однако чрезвычайная сложность теории множеств, особенно ее непредикативный характер, мешают просто представлять себе множества как стенограмму свойств. Все же самые мощные и характерные аксиомы теории множеств — аксиомы степени и подстановки — описывают множества свойствами, а гёделевская теория конструктивных множеств показывает, что некоторую модель теории множеств можно получить, рассматривая вообще только множества, в некотором смысле отвечающие свойствам. То обстоятельство, что аксиома подстановки есть на самом деле бесконечная схема аксиом, в определенных отношениях является недостатком. Действительно, создается впечатление, что мы позволяем рассматривать лишь некоторые свойства, вместо того чтобы указать фундаментальное описание способов построения множеств. Конечно, все это связано с теоремой Гёделя о неполноте, согласно которой никакая конечно аксиоматизируемая система не может быть полной. Эта теорема является величайшим препятствием для любой попытки полностью понять природу бесконечных множеств. Одновременно, показывая, что высшие бесконечности отражаются в теории чисел, ибо позволяют нам доказывать недоказуемые без них утверждения, теорема Гёделя чрезвычайно затрудняет отстаивание той точки зрения, что высшие бесконечности можно попросту отвергнуть. Наша привычка к теореме о неполноте не должна мешать нам постоянно видеть эту фундаментальную недостаточность всех формальных систем, которая имеет гораздо более далеко идущие последствия, чем независимость частных утверждений вроде гипотезы континуума. Именно это лежит в основе моего пессимистического мнения о том, что любое техническое достижение и в будущем не прольет света на основные философские проблемы.

Рядовому математику, желающему лишь увериться в том, что его дело стоит не на песке, самым привлекательным способом избежать трудностей может показаться программа Гильберта. С этой точки зрения математика есть формальная игра, в которой следует заботиться лишь о непротиворечивости. С течением времени, когда операционный подход распространился на другие области, скажем, физику, привлекательность этой позиции, возможно, увеличилась. Можно работать лишь с непосредственно данными объектами, а в математике к таким относятся скорее формальные языки, чем бесконечные множества. Действительно, гильбертовская программа формализации по-прежнему остается единственной вполне точной (мы не говорим правильной) точкой зрения в этих вопросах. Вот убедительный пример того, как само по себе течение времени мало повлияло на появление новых и оригинальных концепций в основаниях. Но, разумеется, формализму присущи свои трудности, и прежде чем вернуться к нему, мы рассмотрим его главную альтернативу, точку зрения, которую можно назвать платонизмом, а мы предпочтем называть реализмом.

Сторонник реалистической философии полностью принимает ценности традиционной математики. Все вопросы типа гипотезы континуума допускают положительный или отрицательный ответ в реальном мире безотносительно к их независимости от той или иной системы аксиом. Вероятно, большинство математиков предпочли бы эту точку зрения. В ней начинают сомневаться лишь после осознания некоторых трудностей теории множеств. Если эти трудности особенно смущают математика, он спешит под прикрытие формализма, предпочитая, однако, в спокойное время обретаться где-то между двух миров, наслаждаясь лучшим, что есть в обоих. Главное преимущество реализма состоит в том, что он избавляет от необходимости обосновывать аксиомы теории множеств. Нет нужды устанавливать их непротиворечивость и, что кажется мне столь же важным, нет нужды объяснять, почему именно эти аксиомы оказались настолько успешными и достойными специального внимания. Соответственно самая большая слабость формализма состоит в невозможности объяснить, почему аксиомы теории множеств, предположительно не отражающие никакой реальности, способны доказывать арифметические утверждения, не доказуемые с помощью более финитистских средств. Слабость, которую, как я полагаю, вынужден будет признать любой реалист, состоит в неспособности объяснить нескончаемую последовательность новых аксиом, вроде высших аксиом бесконечности. Несомненно, самый закоренелый реалист содрогнется, рассматривая кардиналы достаточно недостижимого типа. А есть еще аксиомы, как аксиома об измеримом кардинале, которые сильнее всех предложенных аксиом бесконечности и относительно которых, по-видимому, нет ни малейших интуитивно убедительных свидетельств в пользу принятия или отвержения. Недавние результаты о независимости также бросают вызов реалистической позиции. Хотя некоторые чувствуют, что какая-то интуитивно приемлемая аксиома сможет в конце концов разрешить проблему континуума и подобные ей вопросы, нет ни малейшей надежды на такой исход для аксиомы об измеримом кардинале, которую ревностные теоретико-множественники, вероятно, вынуждены будут признать в качестве аксиомы, ни к чему не сводимой. Однако даже в этом отношении позиция реалистов завиднее, чем формалистов, потому что для последних существуют даже неразрешимые теоретико-числовые предложения, скажем, *Consis* (*ZF*). Оптимистическая точка зрения реалиста может состоять в том, что утверждение *Consis* (*ZF* + измеримый кардинал) как-нибудь сведется к вопросу о непротиворечивости достаточно сильных предложений того же типа, что аксиомы бесконечности. Самая оптимистическая точка зрения заключается в надежде, что любой вопрос теории чисел решается с помощью подходящей аксиомы бесконечности.

Исторически математика как будто не склонна терпеть неразрешимые предложения. Такое предложение может быть возведено в ранг аксиомы и стать широко принятым после многократного употребления. Такова в об-

щих чертах судьба аксиомы выбора. Я склонен оценить эту тенденцию просто как форму оппортунизма. Разумеется, это безличный и весьма конструктивный оппортунизм. Тем не менее, вера в ценность и важность математики не должна полностью изглаживать из нашего сознания честную оценку беспокоящих проблем. В случае с гипотезой континуума (КГ) эта тенденция может, хотя и с малым вероятием, привести теорию множеств к расщеплению на несколько ветвей в зависимости от принятой мощности континуума. Несколько цинично можно сказать, что оппортунизм решает философские проблемы так, чтобы развитие математики давало заработок возможно большему числу математиков. В последнее время много занимались вопросами независимости в теории множеств. Удивительный эффект состоит в том, что большая легкость в обращении с этими вопросами привела к бóльшей вере в «реальность» математических объектов теории множеств. Было бы поистине печально, если бы эта волна успеха закончилась полным пренебрежением к философским проблемам гипотезы континуума и смежных вопросов как непоследовательным. Разумеется, хорошая математика красива, тогда как философские дискуссии по большей части бесплодны и уж, конечно, не красивы.

С реалистической позиции можно гадать о судьбе КГ. Казалось бы, только аксиомы типа аксиомы конструктивности, ограничивающие природу рассматриваемых множеств, могут разрешить ее. С другой стороны, мало надежды, что такая аксиома будет принята в качестве интуитивно очевидной. Более правдоподобно, что в качестве аксиомы будет принято ее отрицание. Оправдание этого может состоять в том, что континуум, данный как множество всех подмножеств, не может быть достигнут любыми средствами, строящими кардиналы, исходя из меньших, на основе аксиомы подстановки. Таким образом, континуум следует считать большим, чем $\aleph_1$, $\aleph_n$, $\aleph_\omega$ и т. д. Разумеется, все это — чистая спекуляция. Технические последствия принятия различных аксиом, связанных с КГ, уже в какой-то мере привлекли внимание. Хотя эта работа может представлять большую эстетическую ценность, в высшей степени неправдоподобно, что она способна привести к прояснению фундаментальных философских проблем.

К этому моменту должно быть ясно, что я выбираю формализм. Едва ли можно назвать этот выбор мужественным, — вероятно, большинство известных математиков, высказывавшихся на этот счет, в той или иной форме отвергали позиции реализма. Сформулировать свою точку зрения совершенно явно меня побудила речь Абрахама Робинсона в Иерусалиме в 1964 г. Она вынуждает принять на себя тяжелую ношу. Едва ли не тяжелей остального необходимость допустить, что КГ, — возможно, первый приходящий в голову важный вопрос о бесконечных множествах — не имеет внутреннего смысла. Жизнь была бы гораздо приятнее, не будь гильбертовская программа потрясена открытиями Гёделя. Я твердо верю, что программа Гильберта ни в каком смысле не может быть восстановлена. Доказательства

непротиворечивости всегда вызывают острую неудовлетворенность и явно сохраняют черты порочного круга.

Как уже говорилось, величайшая слабость формализма состоит в необходимости объяснить успешность чисто формальных аксиом, составляющих теорию множеств. Моя точка зрения, неоднократно выражавшаяся и прежде, состоит в том, что эти аксиомы экстраполируют язык более финитистской математики. Тенденции к такому расширению очень сильны. Для пояснения позвольте мне сначала напомнить ситуацию, в которую рано или поздно попадает каждый логик. Беседуя с квалифицированным математиком, не знающим логики, обнаруживаешь трудность общения, едва лишь речь заходит о формальных системах и анализе структуры формул. Математик гораздо охотнее будет говорить о моделях какой-нибудь системы аксиом, нежели о множестве всех формул, доказуемых исходя из них. Разумеется, согласно теореме о полноте обе точки зрения эквивалентны. Однако имеется естественная тенденция заменить обсуждение методов и предложений обсуждением подходящих абстракций, рассматриваемых как «объекты» теории. Например, развитие вещественного анализа в XIX в. было отмечено изменением отношения к понятию функции. Сначала функция рассматривалась как явное правило, сопоставляющее числа числам. В конечном счете функция стала представляться целостным объектом безотносительно к явному заданию способа ее вычислять. Непрерывная нигде не дифференцируемая функция Вейерштрасса приобрела те же права на существование, что и $\sin x$. Когда Кантор впервые обсуждал теорию множеств, возможно, значительная часть сопротивления была вызвана просто мнением, что говорить можно лишь о тех множествах, которые уже были явно определены. Всем нам известно, что точка зрения Кантора восторжествовала полностью. В конечном счете главной причиной этого было, возможно, удобство. Гораздо проще говорить об абстрактных множествах, чем постоянно заботиться об их построении. Более свежий пример той же тенденции — теория категорий. Здесь говорят, скажем, о категории групп. Можно спросить, в чем преимущество выражения « G есть объект категории групп» перед выражением « G — группа». Простой ответ состоит в том, что перенос методов из одной категории в другую и даже доказательство общих теорем о категориях может подсказать очень полезные идеи. И все же, если я не ошибаюсь по недостатку сведений о современных течениях, теоретико-множественные трудности работы с категориями не вдохновили многих специалистов по теории множеств и не оказали серьезного влияния на логику в целом. Таким образом, полностью приняв весьма непредикативную теорию множеств, внутреннюю убедительность которой мы понимаем, мы как логики менее склонны принимать теорию категорий, корни которой лежат в алгебраической топологии и алгебраической геометрии. Хотя, возможно, существующих аксиом бесконечности было бы достаточно для формализации теории категорий, настойчивый специалист по ним мог бы возразить, что сами категории

следует считать примитивными объектами. В определенном смысле они подобны классам в теории множеств Гёделя—Бернайса. И в этом случае классы, предназначенные всего лишь для замены бесконечной схемы аксиом Цермело—Френкеля, стали широко приняты как самостоятельные объекты. Другой пример того, как привычка притупляет критические способности, доставляет аксиома о недостижимом кардинале. Ее принятие обычно оправдывают чисто отрицательными аргументами; дескать, неразумно считать, что любое множество достижимо. Здесь усматривается аналогия с переходом от конечных множеств к бесконечным. Совершив по индукции трансфинитную последовательность тех или иных операций замыкания, мы якобы все еще способны двинуться дальше и найти за этими пределами недостижимый кардинал. Мне кажется, однако, что это неубедительное рассуждение, поскольку оно скорее предназначено оправдать существование стандартной модели теории множеств, а эта гипотеза несравненно слабее. Честнее было бы признать, что недостижимые кардиналы можно принять, ибо, как показал опыт, это не ведет к противоречиям, и мы развили некоторую интуицию, позволяющую надеяться, что противоречие не появится никогда.

Став на позиции формализма, я чувствую себя обязанным объяснить, почему я не призываю отменить всю инфинитистскую математику. Я хотел бы высказать следующее мнение: мы занимаемся теорией множеств по той причине, что ощущаем наличие неформального доказательства ее непротиворечивости. Вот на чем основано это чувство: в каждом конкретном случае мы говорим лишь о специфических множествах, определенных свойствами и, проследивая противоречие в обратном порядке, мы можем в конце концов свести его к теоретико-числовому. Использование непредикативных определений усложняет задачу интуиции, потому что неограниченная непредикативность определенно ведет к хорошо известным парадоксам. Все же обычная аксиома подстановки дает нам возможность начать с какого-то множества упомянутую выше редукцию, ибо во вновь определяемом множестве каждый элемент должен быть занумерован подходящим элементом множества, построенного раньше. Уже высказав мнение, что техническое развитие не приводит к прояснению основ, я не намерен пытаться дать строгое доказательство непротиворечивости, основанное на каком-нибудь мощном высшем принципе, эквивалентном теории Цермело—Френкеля. Я ограничусь лишь наброском общей схемы, внутри которой развиваются эти интуитивные соображения.

Вот один из способов размышлять о доказательствах непротиворечивости. Начнем с конечного числа аксиом, скажем, S_1 . Для каждого множества, существование которого постулируется, выберем по символу и подставим его в соответствующее утверждение. Получится новая система утверждений S_2 . Чтобы перейти к S_k , мы выбираем новые символы для всех множеств, существование которых утверждалось ранее; кроме того, для каждого утверждения вида $\exists x A(x)$ и каждого уже введенного символа

с мы добавляем $A(c)$. Предположим, что на некотором шаге появится противоречие между суждениями без кванторов. Для удобства мы можем на некоторых стадиях расщепить вывод на две ветви, добавляя в одной из них A , а в другой $\sim A$. Предположим, что к противоречию приводит и то и другое. Положение дел еще можно упростить, не добавляя всех суждений, а лишь необходимые. Наша цель — набросать способ уменьшения сложности противоречия. Начнем с символов $\emptyset$ и ω . Допустим, что на некотором шаге мы встретились с множеством x_1 , которое определяется частным случаем аксиомы подстановки, отвечающим некоторому свойству. Если другое множество x_2 в конца концов появляется в формуле $x_2 \in x_1$, мы можем попытаться исключить x_1 , заменив его соответствующим свойством x_2 , и расщепить вывод на две ветви, предположив, что x_2 им обладает или нет. Если само множество x_1 появляется позже, мы попытаемся заменить его конечным множеством тех его элементов, которые появляются в ходе вывода. Разумеется, чтобы уточнить все это, необходим анализ неперекативных определений и упорядочение степеней неперекативности. Зная, что теорема о неполноте делает эту задачу по существу безнадежной, мы не станем ею заниматься. Ключевой пункт состоит в том, что всякий элемент нового множества должен быть связан с некоторым элементом множества, построенного раньше, так что редукцию можно продолжать. В парадоксе Рассела этому мешает круг. Общеизвестно, что Гентцен провел такое доказательство для теории чисел в пределах ординала ε_0 . В случае Цермело—Френкеля неясно, можно ли определить аналогичный ординал. Если ответ положителен, было бы интересно изучить его связь с другими известными инвариантами, например, счетным ординалом минимальной модели. Это такой наименьший ординал α , что M_α , множество Гёделя на α -м шаге, является моделью для аксиом Цермело—Френкеля. Ординал из теории вывода должен быть меньше, ибо он «строит» наименьшую нестандартную модель аксиом.

Даже в самом оптимальном случае схема, которую я набросал, позволила бы справиться лишь с проблемами, связанными с аксиомой подстановки. Наша интуиция о недостижимых или измеримых кардиналах еще недостаточно развита или по крайней мере не поддается передаче в общении. Мне кажется, тем не менее, что полезно развивать наше таинственное чувство, позволяющее судить о приемлемости тех или иных аксиом. Здесь, разумеется, мы должны полностью отказаться от научно обоснованных программ и вернуться к почти инстинктивному уровню, сродни тому, на котором человек впервые начинал думать о математике. Лично я, например, не в состоянии отказаться от этих проблем теории множеств просто потому, что они отражаются в теории чисел. Я сознаю, что моя позиция в прагматическом плане мало чем отличается от позиции реализма. Все же я чувствую себя обязанным сопротивляться великому эстетическому соблазну без оков личностей принять множества как существующую реальность.

Читатель безусловно ощутит горечь пессимизма в моих заметках. Математика подобна прометееву труду, который полон жизни, силы и привлекательности, но содержит в самом себе зерно разрушающего сомнения. К счастью, мы редко останавливаемся, чтобы обозреть положение дел и подумать об этих глубочайших вопросах. Всю остальную жизнь в математике мы наблюдаем блестящую процессию и, возможно, сами участвуем в ней. Великие задачи теории множеств, казавшиеся неодолимыми, падают. Изучаются новые аксиомы, все большие и большие кардиналы становятся доступнее интуиции. Маяк теории чисел сияет над этой зыбью. Когда сомнения начинают одолевать нас (что, я надеюсь, происходит нечасто), мы отступаем под безопасные своды теории чисел, откуда, собравшись с духом, снова бросаемся в неверные воды теории множеств. Такова наша судьба — жить, сомневаясь; преследовать цель, в абсолютности которой мы не уверены; короче, понимать, что наша единственная «истинная» наука имеет все ту же смертную, возможно, опытную природу, что и все прочие человеческие предприятия.



Фоменко А. Т.
Гауссовы распределения, I

Бог и вселенная¹⁾

*Герман Вейль*²⁾

Математик вышагивает перед вами, рассуждает о метафизике и не стесняется произносить имя Бога. Это необычное явление сегодня. По нынешним представлениям, математик занят решением отвлеченных, сухих задач, он проводит все более и более сложные вычисления, выстраивает замысловатые геометрические конструкции и не имеет ничего общего с проблематикой духовных материй, столь важной для обычных людей. В былые времена дела обстояли иначе. Пифагор, чей образ едва просматривается в мифической мгле, утверждавший в своем фундаментальном учении, что суть вещей пребывает в числах, являлся и главой математической школы, и — одновременно — основателем некой религии. Глубочайшая по содержанию метафизическая доктрина Платона, доктрина мира идей, в наиболее строгом ее изложении была вынуждена «обрядиться в математические одежды» и стала учением об идеальных числах, посредством которых разум познает структурные компоненты окружающего мира. Пространственные конфигурации и геометрические соотношения — наполовину понятийные категории, наполовину чувственные восприятия, — суть посредники между явлением и идеей в доктрине Платона. И он отказывался принимать в свою академию тех, кто не знал математики. Для Платона всеобъемлющая строгость ма-

¹⁾Глава (лекция) из КНИГИ: Н. Weyl. The Open World. Three lectures on the metaphysical implications of science. New Haven. Yale University Press, Oxford University Press, 1932. Перевод с английского А. П. Ефремова публикуется впервые в данном альманахе.

²⁾Герман Клаус Гуго Вейль (1885–1955) — выдающийся немецкий математик. Окончил Геттингенский университет (1908), ученик Д. Гильберта. В 1913–1930 гг. профессор Высшей технической школы Цюриха, в 1930–1933 гг. профессор Геттингенского университета, в 1933 г. после прихода к власти фашистов эмигрировал в США, где работал в Принстоне в Институте перспективных исследований. Широко известны труды Г. Вейля по ортогональным функциям, теории функций комплексных переменных, дифференциальным и интегральным уравнениям, основаниям математики. Труды Г. Вейля по прикладной линейной алгебре имели важное значение для развития математического программирования. После создания А. Эйнштейном общей теории относительности Вейль предложил вариант единой теории гравитации и электромагнетизма на базе открытой им первой неримановой геометрии (геометрии Вейля с неметричностью).

тематических законов и гармония природы представлялись божественным сочетанием разума и духа. Вот его слова из 12-й книги *Larcs*:¹⁾

Есть два обстоятельства, которые привели людей к вере в богов: первое — наше знание о душе как о самой древней и божественной из всех вещей; второе же — наше знание о регулярном движении звезд и всех остальных тел.

Сегодняшнее мнение прямо противоположно тому, что когда-то утверждалось людьми, а именно, будто солнце и звезды лишены души. Но даже в те времена были люди, которые сомневались, и то, что сейчас определенно установлено, тогда могло только предполагаться теми, кто знал об этом больше, — что если эти вещи не имели души и не имели разума (*vovç*), то они никогда не могли бы двигаться со столь замечательной численной точностью; и даже в те времена некоторые имели смелость предположить, что вселенной управляет разум. Но те же самые ошибались насчет природы духа, который они считали моложе, но не старше тела, тем самым снова повергая в заблуждение мир, и я бы сказал, самих себя; небесные тела, как им казалось, состоят из камней, праха и других безжизненных субстанций, и они приписывали им свойства всех иных вещей. Подобные учения порождали в умах недоумение и безбожие, а поэты не упускали случая посмеяться над всем этим. . . Но теперь, как я сказал, ситуация обратная.

Никто не может быть истинным почитателем богов, если он не знает этих двух законов: что дух — самая первая из всех когда-либо созданных вещей, что он бессмертен и господствует над всеми вещами. Более того, как я уже неоднократно говорил, тот не в состоянии объяснить причины чего-либо, истинно имеющего причину, кто не созерцает в мире разума, присущего звездам, не прошел надлежащего обучения, кто не понимает ни связи музыки и вещей, ни их гармонии с людскими законами и учреждениями.

Космология Аристотеля с ее четким разделением на земной, подлунный мир и небесные сферы, приводимые в обращение «неподвижным первичным движителем», в комбинации с Птолемеевой системой мира, имеющей Землю в своем центре, явила собой устойчивую основу, на которой средневековая церковь выстроила догматы Бога, Спасителя, ангелов, человека и Дьявола. Дантова «Божественная комедия» — не только великая поэтическая фантазия, но также — внятное теологическое и геометрическое описание такого устройства космоса, с помощью которого христианская философия приспособила космологию Аристотеля для своих нужд. Если мир Аристотеля заключен в хрустальной сфере, за пределами которой нет более никакого пространства, то во вселенной Данте, лучи, исходящие из центра Земли, обиталища Дьявола, вновь сходятся в противоположном полюсе, источнике божественной силы, подобно тому, как дуги долготы, выходящие из южного полюса сферы, воссоединяются в точке северного полюса. При этом божественная сила, излучаясь из центра, не может обтекать мировую сферу и находится в покое подобно «неподвижному первичному движителю» Аристотеля. Но в определенном смысле описание Аристотеля остается приемлемым. Внутренние круги, наиболее близкие к божественному источнику света, как наиболее

¹⁾ Законы.

щедро наделенные божественной силой включают в себя все отдаленные круги, превосходя их в пространственных размерах. На современном нам математическом языке мы бы сказали, что Дантовы представления сегодня возрождены Эйнштейном на совершенно иных основаниях. Суть новой доктрины в том, что трехмерное пространство является замкнутым подобно тому, как замкнута двумерная сферическая поверхность; но при этом из полюса божественной силы исходит эманация такого метрического поля, что пространственное измерение приводит к условиям, описанным Аристотелем.

В свою очередь Аристотелева концепция устройства мира была потрясена работами Коперника, который осознал факт относительности движения. И как это знание, — эпистемологичное¹⁾, и в то же время математическое, столь сложное, что его формулировка и ныне ставит в тупик человека со средними способностями к абстрактному мышлению, хотя того и учили, конечно, поверхностно и догматично, в обычае нашей школы, — как такое знание вдруг открыло новую эру в естественной философии? Ответу: только в совокупности с неким религиозным чувством людей по отношению к вселенной, ибо это знание лишило Землю, дом человечества, его абсолютного преимущества. Искушение грехов человечества Сыном Божиим, его распятие и воскрешение вдруг оказались не уникальным событием вселенского масштаба, а малозаметным эпизодом, произошедшим в одном из рядовых уголков вселенной — вот каким мерзким для религии богохульным плодом оказалась чревата теория, сместившая Землю из центра мира. На этой основе Джордано Бруно создавал свое учение, восторженно и страстно. Аристотель, Птолемей и клерикальная догма — вот «трехглавый схоластический зверь», с которым он сражался в течение всей своей беспокойной жизни.

В концепции освобождения от замкнутого мира Аристотеля с его кристальной сферой и строго выстроенной иерархией форм бытия и замены его свободным и бесконечным евклидовым пространством, всюду одинаковым и заполненным звездами, он видел основу новой натурфилософии. Дильтей в своей книге «Воззрение на мир и исследование человека со времен Возрождения и Реформации» писал: «Базисом позднего европейского пантеизма явилось признание однородности и непрерывности связей всех частей вселенной». Николай Кузанский и Джордано Бруно были первыми глашатаями новой системы взглядов, и как Пифагор до него, Бруно считал себя провозвестником «Святой Религии», базирующейся на новом математическом знании. Для него замена антропоцентрических взглядов «космоцентрическим» мировоззрением, поддержанным астрономическими наблюдениями, являла собой лишь часть порожденной эпохой Коперника великой революции человеческого разума. За ней должны были последовать не менее глубокие и значимые перемены в области религии и морали. Чувственное самосознание концентрируется на необходимости сохранения физического существования, заключенного между рождением

¹⁾Epistemology — гносеология, теория познания.

и смертью. Освобождение сознания — результат астрономических открытий и их философского осмысления — должно быть связано с возвышением чувства любви к Богу и ко всем его космическим проявлениям. Без этого невозможно постижение истинного совершенства мира, возрастающего от частей к целому, и таким образом, отказаться от чрезмерных требований к этому божественному порядку, требований, источник которых — желание человека быть бессмертным.

Идеи Бруно, нашедшие продолжение в философии Спинозы и Шефтсбери, имели своим результатом оправданно бескомпромиссное, необходимое и дающее надежду преобразование религиозных отношений в западном христианстве. С тех пор религиозная вера всегда будет зиждиться на двух основах: первая — космическая, определяющая зависимость человека от вселенной и его связь с ней; вторая — личностная, включающая моральные устои, самостоятельность и персональную ответственность. Однако каждая из этих основ может изменяться и совершенствоваться согласно требованиями развития человеческой культуры. Подобные взгляды и убеждения ранее разделял и автор данных лекций. Но последние достижения современной науки, особенно физики и математики, заставляют считать, что природа, вселенная есть «вещь в себе» или что она дана Богом тем более, чем более ее описание вынуждено отдаляется от всех «слишком человеческих» идей — нашей естественной реакции на окружающую действительность и борьбу за существование. И тем более странной и непредставимой она должна быть для тех, кто не в состоянии посвятить все свое время и энергию для переформатирования и развития собственного теоретического мышления. И в этом — реальная и неизбежная трагедия нашей культуры. Поскольку философское и метафизическое восприятие науки, хотя и не прервалось, но проходит испытание отчуждением наивных представлений о мире.

До сих пор я говорил об астрономических исследованиях и космологических представлениях, имея в виду показать, что наше понимание Бога и божественного присутствия формируется и трансформируется вместе с этими представлениями. Я вернусь к этой теме позже, чтобы подойти к ней более системно. А сейчас о математике, которая, безусловно, является важнейшим инструментом естественных наук. Но сверх того, и это убежденность многих великих мыслителей, глубокое чисто математическое исследование в силу своей специфики, точности и строгости так высоко возносит человеческий разум, что он оказывается в непосредственной близости к божественной сути, чего невозможно достичь никакими иными средствами медитации. *Математика — наука бесконечного*, ее восприятие человечеством как бесконечного в символах — конечно, и это — средство. Великое достижение древних греков в том, что они отличили конечное от бесконечного, сделав важнейший шаг в познании действительности. Восточному мышлению свойственно интуитивное ощущение, нерушимоспокойное восприятие бесконечного. Но при этом оно остается сугубо

абстрактным представлением, несоотносимым с многообразием реальности, бесформенным и непознаваемым. Заимствованное на Востоке религиозно-интуитивное понимание бесконечного, апейрон (*απειρον*), распространяется в греческой среде в период, предшествующий началу греко-персидских войн. Кстати, именно период Персидских войн знаменует разделение Запада и Востока. Отныне движущей силой древнегреческой науки становится противостояние конечного и бесконечного и поиск путей их согласования. Но каждое предложенное решение тут же — и с неизбежностью — приводит к прежнему противоречию, быть может, на более глубоком смысловом уровне. И таким образом история теоретического познания мира продолжается до наших дней.

Проблемой взаимосвязи между математикой бесконечного и восприятием Бога последовательно занимался Николай Кузанский, мыслитель, который еще в середине XV в. то импульсивно, то в пророческом просветлении настойчиво и страстно созидал «новую мелодию» мышления, зазвучавшую с влившимися в нее голосами Леонардо, Бруно, Кеплера и Декарта как триумфальная симфония. Николай Кузанский понимает, что схоластическая форма мышления, логика Аристотеля, базирующаяся на законе исключенного третьего, будучи логикой конечного, не в силах предоставить того, что лежит вне пределов схоластики: возможности мыслить об абсолюте, о бесконечном. Она всегда и обязательно рушится, когда речь заходит об осознании бесконечного. Таким образом, любая «рациональная» теология оказывается несостоятельной и отвергается, и ее место занимает теология «мистическая». Однако Кузанский не только перешагивает барьеры традиционной логики, но также оказывается выше и традиционных понятий мистицизма: с той же твердостью, с которой он отрицает логику конечного для познания бесконечного, он отрицает и возможность сугубо чувственного восприятия последнего. Истинная любовь Бога — это *amor Dei intellectualis*¹⁾. И для описания природы и цели интеллектуального акта, посредством которого божественная суть раскрывается нам, Кузанский говорит не о мистических формах пассивного созерцания, а о математике и ее символическом методе. «*Nihil veri habemus in nostra scientia nisi nostram mathematicam*»²⁾. С одной стороны — Бог, бесконечность в своем совершенстве, с другой — человек в конечном воплощении; но стремление Фауста к бесконечному, его нежелание смириться с фатальностью однажды полученного и уже пройденного — это не ошибка и не «*hybris*»³⁾, но свидетельство его божественного предназначения. Это стремление находит свое простейшее выражение в последовательности чисел, которая может быть вынесена за пределы любого пространства всего лишь повторяющимся прибавлением единицы. Здесь мы наблюдаем интереснейший случай, уникальный в истории философии: математическая точность рассматривается не сама по себе, не как инструментальный изучения

¹⁾ Любовь Бога разумного.

²⁾ Ничто не верно в нашей науке, кроме нашей математики.

³⁾ «Вызов богам».

природы, но как основа наиболее глубокого представления о Боге. Николай Кузанский — один из тех мыслителей, создателей своей эпохи, кто внес вклад и в теологию, и в математику. Кузанский — один из мудрейших людей, обладающих пророческим даром, праведных учителей. Его книга «*De Docta Ignorantia*»¹⁾ преподносит идею о том, что любая видимая вещь есть лишь образ ее невидимой сущности, что можно представить как отражение в зеркале чего-то загадочного. Но даже если идеальное по своей сущности остается непостижимым, и мы никогда не сможем представить себе его в формах или символах, то мы, по крайней мере, обязаны постулировать, что символы сами по себе не содержат ничего сомнительного и неясного. Эти символы должны быть четко определены и системно взаимосвязаны, что возможно сделать только на основе математики. И отсюда путь лежит к Леонардо, Кеплеру и — к Галилею, который после двух тысячелетий словесного описания природы положил начало современному научному анализу, теоретическим построениям, использующим средства символической математики. Сущность же собственно математического знания, *mathesis universalis*²⁾, Николай Кузанский представил столь передовыми идеями, что они обрели формальную определенность только во времена Лейбница. А на самом деле, суть этих предсказаний мы, кажется, начинаем постигать только сегодня, пытаюсь описывать антиномии бесконечного на языке математических символов. Этой теме будет посвящена третья лекция.

Согласно Галилеевой «*Saggiatore*»³⁾, для занятых умозрительными рассуждениями метафизиков философия, подобно книге, есть продукт чистого воображения, вроде *Iliad* или *Orlando Furioso*⁴⁾, где сказанное не обязано быть правдой.

«Но это не так, поскольку философия содержится в постоянно открытой перед нами великой книге природы, однако прочесть ее способны только те, кто знает язык, на котором она записана, язык математических объектов и отношений».

Постижение идеальной сущности математики возносит человеческий разум на вершину его очищения и совершенства, перед ней рушатся воздвигнутые средневековым мышлением барьеры между природой и разумом, а в некотором смысле, и барьеры между человеческим и божественным разумом. Я еще раз цитирую Галилея.

«Божественный разум, несомненно, познает математические истины в бесконечно большей полноте (они известны ему все!), чем это делает наш собственный ум. Но поскольку точность объективна, я уверен, что те немногие истины, которые человек способен постичь, суть те же самые, что известны божественному интеллекту, так как человек осознает их предельную неизбежность, и более высокой степени точности быть не может».

¹⁾ О научном неведении.

²⁾ Универсальная наука.

³⁾ «Пробирных дел мастер».

⁴⁾ «Илиада», «Неистовый Роланд».

И слова Кеплера: «Наука о пространстве единственна и вечна, она есть отражение божественного духа. Человека называют подобием Бога, в частности, потому, что он способен воспринять часть этой науки».

Завершим историческое введение и обратимся к главному вопросу данной лекции: каким образом в природе проявляется божественное начало? Как я понимаю, история человеческого мышления, в основном, предлагает два варианта ответа на этот вопрос. Оба ответа убедительны, но суть их различна. Первый ответ проще и, так сказать, более объективистский: повсеместность присутствия Бога в вещах реализуется посредством эфира. Второй — более «продвинутый», но и более формальный: божественный разум проявляется как свод математических законов, которым подчинена природа.

Значимость представлений об эфире становится понятной в связи с фундаментальными идеями теории относительности. Пространство, многообразие пространственных точек, есть трехмерный континуум. Начнем с того, что это многообразие аморфно, не имеет структуры; тогда в нем ничего не изменится, если его непрерывно деформировать, как, например, кусок глины. При этом можно говорить только о различии и совпадении точек и о непрерывности связей точечных конфигураций. Но помимо этого, пространство наделено и структурой; это, в частности, следует из того факта, что мы можем отличать прямые линии от кривых. Точка и заданное в ней направление, однозначно определяют проходящую через эту точку линию, которую мы характеризуем как автопараллельную или геодезическую. В прежние времена считалось, что из всех прямых линий следует выделять класс вертикалей, ибо исходным направлением в пространстве является направление «сверху — вниз». Сегодня мы знаем, что это — случай гравитационного поля, где направление выделяется линиями свободного падения тел, но это направление определяется физически и изменяется вместе с физическими условиями. Направление «сверху — вниз» в Калькутте отличается от такого же в городе Нью-Хейвен¹⁾, и угол между этими направлениями изменился бы, если бы на Земном шаре изменилось распределение масс, например, если бы горный хребет в окрестностях Калькутты вдруг стал равниной. Этот пример довольно наглядно поясняет различие между не подвластной материальным силам жесткой геометрической структурой (вроде так называемой проективной структуры, позволяющей распознавать «прямое» и «кривое») и структурой, которая зависит от влияния материальных факторов и изменяется вместе с ними, как, например, направление сил поля тяготения.

При изучении естественных явлений нельзя рассматривать пространство как таковое в отдельности, но необходимо связать его с понятием времени. Говоря «здесь и сейчас», мы фиксируем и определенно задаем пространственно-временную точку, или мировую точку. Мы можем обозначить ее

¹⁾Штат Коннектикут, США.

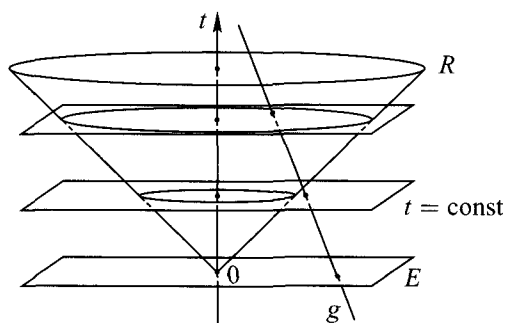


Рис. 1

вспышкой или искрой света. Все возможные мировые точки или области локализации пространства-времени формируют четырехмерный континуум.

Малое тело описывает мировую линию — одномерный континуум мировых точек, изображающий последовательное прохождение телом этапов своей истории. Смысл этого представления вполне соответствует нашей интуиции, достаточно представить два события, происходящие в одной точке или малой окрестности пространства-времени. Если считать, что мир делится на абсолютное пространство и абсолютное время, и имеет смысл говорить о двух событиях в пространственно-временной окрестности, что они происходят в одно и то же время, но в разных местах или в одном и том же месте, но в разное время, то тем самым внешний мир наделяется «четырехмерной средой» с определенной структурой. Все мировые точки, соответствующие одновременности, образуют трехмерный слой, все эквипозиционные мировые точки (точки с одинаковыми координатами) образуют расслоение («пучки» линий времени). Согласно этим определениям, структура мира может быть представлена как множество пространственных слоев, пронизанных и связанных линиями времени. И только не принимая во внимание такую структуру, допустимо говорить о покое или движении тела K по отношению к среде, непрерывно заполняющей пространство, или по отношению к некоторому телу отсчета, на котором тело K может находиться. В обычной жизни таким телом отсчета естественно считать «неподвижную Землю». Но кто сказал, что Земля неподвижна, и вообще, что мы под этим понимаем? Вера в существование «мировой одновременности» зиждется на индивидуальной практике человека размещать в пространстве наблюдаемые события в момент их наблюдения. Но сравнительно давнее уже открытие конечности скорости распространения света выбило почву из-под этой наивной веры.

Теория относительности не считает геометрическую структуру мира состоящей из пространственных слоев и временных пучков, отображающих понятия одновременности и тождественности позиций. Она гласит: (1) Не покой, но однородный сдвиг (равномерное прямолинейное движение) есть

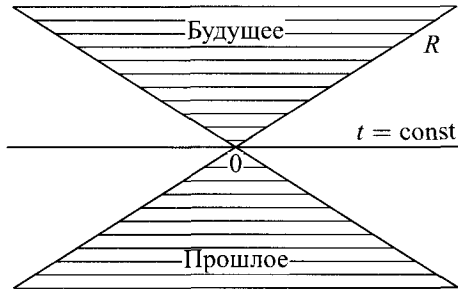


Рис. 2

существенным образом выделенный класс движения тела, предоставленного самому себе и не подверженного влиянию внешних сил. Мировая линия такого тела однозначно определяется исходной точкой и изначально заданным направлением движения; «проективную» (геометрическую) структуру, которая выявляется при этом, физики называют инертностью («направленным инерционным полем»). Так называемый закон инерции, согласно которому свободное тело движется в пространстве по прямой линии с постоянной скоростью (о чем мы сейчас дискутировать не будем), имеет своим геометрическим образом неподвижную «структуру инертности». (2) Слои одновременности заменяются причинной структурой: из каждой мировой точки O исходит трехмерная конусообразная поверхность, которая, как видно на рисунке, определяет для точки O области прошедшего и будущего.

Если сейчас я нахожусь в точке O , то события, на которые могут влиять мои действия в точке O , т. е. те мировые точки, которые достижимы воздействиям из точки O , принадлежат области будущего, тогда как события, способные влиять на событие в точке O , находятся в области прошлого. События прошлого, таким образом, являют собой то, что я в точке O могу осознать в результате непосредственного восприятия и привычек или воспоминаний, сложившихся на базе этого восприятия, поскольку каждое восприятие, получение любого вида информации есть акт передачи физического воздействия. Но между прошлым и будущим наличествует промежуточная область, с которой я в данный момент не могу быть связан причинно — ни активно, ни пассивно. В старой теории прошлое и будущее «соприкасались» друг с другом безо всяких промежуточных слоев между ними, и множество мировых точек в слое настоящего было одновременным точке O . Теперь прежние абстрактные временные отношения должны быть повсюду заменены конкретными причинными связями. При этом реальное движение тела может рассматриваться как результат противодействия инерционности и отклоняющих сил. Часто приводимый пример крушения поезда — удачная иллюстрация того, как конфликт между «силами инерции» и упругими силами межмолекулярного взаимодействия, приводит к разрыву состава на части. Таким образом, мы видим, что данная структура — не

важно, до какого уровня детализации она описана, — самым решительным образом влияет на ход событий.

После этих общих замечаний, касающихся проблем относительного движения, я кратко изложу историю понятия эфира. В философии стоиков (*Stoa*) эфир возникает как пронизывающий все пространство божественный огонь, как первооснова божественных сил творения. Можно прочесть о теории эфира стоиков, например, во второй и третьей книгах трактата Цицерона «*De natura deorum*» («О природе богов»). В переходный период — период Джордано Бруно — эта идея связывается с концепцией мирового атомизма, в свое время сформулированной Демокритом и развитой в философии эпикурейцев. Для Бруно эфир — всепроникающая не имеющая пределов материальная сущность. Естественная наука подхватывает это понятие и использует его для обозначения гипотетической среды, обеспечивающей распространение физических взаимодействий, в первую очередь, света, — чего не могут обеспечить обычные тела, чувственно воспринимаемые нами как некое противодействие. Согласно Гюйгенсу, а также Эйлеру, мы понимаем световой эфир как непрерывно распределенное вещество, обладающее определенной плотностью и скоростью. Как целое такой эфир покоится, и возбуждается лишь местами, образуя мельчайшие колебания и вибрации, в силу этого он может служить физическим воплощением (гипотетическим, конечно) метафизического представления Ньютона об абсолютном пространстве. Но вскоре история сделала крутой поворот. Когда открытые в XIX в. оптические явления оказываются частным случаем явлений электромагнитных, и выясняется, что понятие электромагнитного поля, введенное Фарадеем и Максвеллом, вовсе не требует наличия никакой вещественной субстанции, понятие эфира теряет свой физический смысл. Структурным элементом мира остается лишь абсолютное пространство, не подверженное, в отличие от эфира, воздействию материи. Такой ход развития событий предвосхитила натурфилософия Ньютона. В самом начале своей знаменитой «*Principia*»¹⁾ Ньютон с предельной ясностью вводит понятия абсолютного пространства и абсолютного времени как сущностей *априори* лежащих в основе всех законов природы. Если озадачиться вопросом, как Ньютон, приверженец эмпирических методов вывода закономерностей в пространственных слоях и временных пучках по фактам влияния их на наблюдаемые события, мог прийти к подобной идеалистической догме, то ответ, по-моему, нужно искать в его теологических воззрениях. А также в теологии Генри Мора. Согласно этим взглядам пространство есть *Sensorium Dei*²⁾, божественное проникновение во все тела. Следовательно, пространство находится в таком отношении к телам, в каком, естественно предположить, Бог находится по отношению к материальному миру: мир подвластен его действиям, но сам Бог превышает любого влияния со стороны мира. Конечно, взгляд Ньютона на структуру

¹⁾ «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*», «Математические начала натуральной философии».

²⁾ Ощущение Бога.

мира можно характеризовать как статичный и схоластический. В его учении о центре мира или, например, о положении Солнца среди неподвижных звезд гораздо больше от Аристотеля и меньше от более передовых взглядов Джордано Бруно, жившего на столетие раньше. Тем не менее, следует признать, что переход от эфира стоиков, божественной потенции, проявляющейся в виде природных сил, к геометрически неподвижному абсолютному пространству — это прогресс взглядов, безусловно следующий за переходом от религиозной мифологии к трансцендентному Богу христианства.

На третьей стадии развития представлений о структуре пространства-времени выясняется, что понятие абсолютного пространства некорректно, поскольку существенно выделенным является не состояние покоя, а состояние инерциального движения. При этом пропадает необходимость в вещественном эфире. Ньютон смог перейти в своих рассуждениях от равномерного движения к базовому понятию покоя с помощью схоластического приема, вообще-то весьма нехарактерного для строгого изложения *«Principia»*. Наконец, на последней стадии, общая теория относительности позволяет этой мировой структуре («эфиру») и в инерциальном, и в причинном аспекте вновь оказаться физической сущностью, порождающей материальные силы. Таким образом, в определенном смысле круг замкнулся, хотя теперь условия, характеризующие состояние этого эфира, кардинально отличаются от тех, что были в самом начале, когда он считался вещественной средой. На самом деле, в основе общей теории относительности Эйнштейна лежит фундаментальная идея о том, что базовая мировая структура, проявляющая себя в мощных силовых взаимодействиях, не может быть неподвижной составляющей вселенной, установленной раз и навсегда. Это должно быть нечто реальное, но такое, что может не только воздействовать на материальные объекты, но и реагировать на воздействия с их стороны. В известном дуализме инерциальности и физических сил, как позже признавал Эйнштейн, гравитация принадлежит классу «сил инерции»; так что явление гравитации есть не что иное как, вообще говоря, переменное «инерциальное поле», зависящее от распределения вещества. При этом из ньютоновской философии с неизбежностью следует, что общая теория относительности лишает пространство его божественного характера. Здесь подчеркнем различие между аморфным и структурированным континуумом: первый всегда носит априорный характер и является отражением чистого сознания, тогда как структурированное поле представляет собой составную часть реального мира и медиатор сил. Этой вполне реальной сущности Эйнштейн по доброй традиции дал прежнее название «эфир».

Причина, по которой факт зависимости эфира от вещества так сложно установить, состоит в огромном превосходстве влияния эфира на материю — и теория Эйнштейна не отрицает его гигантской мощи. Образно говоря, если это не бог, то уж точно — сверхчеловек. Если, основываясь на известных законах природы, оценивать степень этого превосходства с математической точностью, то оно выразится соотношением $10^{20} : 1$.

Если бы этот эфир был распространен в пространстве вне зависимости от распределения вещества, то он оставался бы в состоянии покоя, или, говоря математически — и более точно, — был бы однородным. В противовес «непоседливому духу», свойственному материи, или по Гёльдерлину, «груди Земли и человека», образ эфира — гордый, почти непоколебимый мировой покой. Эфир не имеет божественной природы, поскольку, в принципе, он является сущностью того же плана, что и материя, и порожденные им силы. Тем не менее, мы видим в нем такое могущество, которое нам, людям, воздействующим на мир лишь посредством материальных агентов, представляется необыкновенным, неодолимым и нерушимым, могущество, перед которым вполне оправданным является чувство глубокого почтения. Неспроста великий немецкий поэт-романтик Гёльдерлин еще в начале XIX в. посвятил «Отцу Эфиру» прекрасные «космические» песни. И для сегодняшней натурфилософии он остается великой загадкой; и для моего понимания, в том числе, грандиозное превосходство эфира над материей остается *глубочайшей* тайной. Этими рассуждениями я, прежде всего, хотел показать, как тесно вековые религиозные и метафизические идеи связаны с насущными проблемами современной науки.

Но как бы мы здесь не превозносили могущество природных сил, которые современная физика называет гравитацией и эфиром («инерциальным полем»), для нас — не язычников, но христиан — эти понятия отнюдь не раскрывают конечной божественной сущности вещей. А что раскрывает? И вот здесь, следуя передовым идеям человечества о природе, как указаниям Божьего перста, я даю другой ответ на этот вопрос: наш мир — это не хаос, но *космос, гармонически упорядоченный нерушимыми законами математики*. Эта идея практически не имеет истории развития. Она вдруг появляется — и сразу в готовом виде — у пифагорейцев, а от них переходит в философию Платона. Но я бы хотел указать на два ее источника, хотя и весьма далеких друг от друга. Первый — наследие доисторических времен человечества — древняя мистика и магия чисел, которым, согласно философии Пифагора, основателя учения, подчинен общий порядок окружающего мира. Закон музыкальной гармонии, согласно которому гармонические тоны возникают при делении струны в целой пропорции, считается первичным законом. По этому образцу к правилу целых пропорций сводились наблюдаемые закономерности звездных порядков, последовательности орбит планет и периодов их обращения, что в сумме получило название гармонии небесных сфер. Самоотверженный труд Кеплера по изучению «небесных порядков» имел своим результатом открытие трех знаменитых законов планетарного движения; это событие ознаменовало переход к более глубоким представлениям о значимости математической гармонии в законах природы. Второй источник антропоморфной идеи о детерминированности космических законов лежит в русле идеи судьбы. Деятельное эго в борьбе за существование встречает не только тебя, человек-брат, и тебя, брат-животное, но противодействие иных форм бытия, стихии, чуждые ему и беспредельно доминирующие над

ним: землю и океан, пламя, бурю и звезды. Вначале они воспринимались как сущности деятельные, и это утвердилось в нашем языке, например, мы говорим: «Солнце светит». Но как только этот примитивный анимизм уступил место отчетливому пониманию существенного различия между внешними событиями и действиями эго, порожденными неясной смесью желаний и интуиции, возникло представление о судьбе, *моира*, («Ananke, вынужденное принуждение» — так оно описано в эпосе Шпиттелера «Олимпийская весна»), как понятие о слепой, неизбежной необходимости, самодостаточной и бессмысленной. Но сверкнувшая в мышлении древних греков блестящая идея о том, что математические законы правят миром, одолела мрачные силы рока и темную магию чисел. И окружающий мир, в отличие от человеческого эго, вроде бы бездушный, вдруг оказался пронизан светом духовности и разума. И мы знаем, как великолепно, с какой точностью эта идея об устройстве мира выдержала проверку, сначала на примере движения звезд, затем — по отношению к сложным физическим процессам на поверхности Земли. Так со времен Галилея и Кеплера понимание мирового порядка свелось к нынешнему аналитическому способу постижения законов природы, основанному на численных измерениях. Этим великим людям, по сути, удался прорыв в самой сложной области человеческого сознания — подчинение умозрительных представлений и *априорных* математических конструкций реальной действительности и ее конкретике, проверяемой системно организованным опытом.

В законах природы, как мы точнее установим позже, существенна простота. Читаем у Кеплера: *«Природа любит простоту и единство»*. Тесно связанная с этим категория совершенства играет огромную роль в философии Аристотеля, и не только как методическое понятие, но как принцип объяснения сути. Так, согласно Аристотелю, вечность и неизменность небесных тел суть следствие их совершенной сферической формы. В полемике, которую Галилей направляет против этой концепции в диалоге о двух системах мира, мы чувствуем категорическое несогласие самого Галилея с этой интерпретацией. Да, он допускает идею совершенства, но уже не в виде мертвых, устоявшихся форм; наоборот, восхищаясь цветущим растением, которое для него несравнимо прекраснее кристального совершенства застывшего мира Аристотеля, он возносит хвалу изменчивости природы. Галилей ищет совершенство в закономерности динамических связей и приходит к пониманию того, что, по сути, оно — отнюдь не объективная физическая данность, а, скорее, эвристический принцип, «символ веры», направляющий пути познания. Похожую эволюцию претерпели и взгляды Кеплера. Вначале он остается приверженцем принципов статичности и пытается найти планетарную гармонию в жесткой схеме регулярно движущихся тел. Но постепенно, преодолевая сомнения, он приходит к более гибкой, динамичной концепции устройства мира. «Кеплер, Галилео и Бруно», — говорит Дильтей, — «как и древние пифагорейцы, верят в то, что вселенский порядок всецело подчинен высшему совершенству математических законов,

и в то, что в мире есть начало всего рационального — божественный разум, частью которого является разум человеческий». В последующие столетия на долгом пути испытаний эта идея неизменно находила новые удивительные подтверждения в физике, и чем дальше, тем больше, из них едва ли не самое прекрасное — теория электромагнитного поля Максвелла. Никакое иное представление о сущности устройства мира не может сравниться с этой идеей по глубине и надежности, хотя следует признать, что природа снова и снова демонстрирует свое превосходство над человеческим разумом, заставляя пересматривать прежние взгляды, даже «универсальные законы мироздания», ради еще более высокой гармонии.

Можно понять желание человека считать мировые закономерности результатом волеизъявления разумных сил. Вспомните слова Платона, которые я процитировал в начале этой лекции. Так, факт существования второго закона Кеплера, согласно которому скорость орбитального движения планет есть функция их расстояния от Солнца, сам Кеплер считал возможным понять, только допустив наличие у каждой из планет своей «души», воспринимающей непрерывно меняющийся для нее образ Солнца. Гораздо более стойкой, чем эта «физическая интерпретация», оказалась механистическая трактовка естественных законов, надолго утвердившаяся в физике. Вспомним механизм птолемеевых кругов и бесчисленные попытки представить гравитацию и другие физические явления как результат соударения упругих частиц. Но физика вынужденно все больше и больше освобождается от таких «физических» и механических интерпретаций; сохраняются они, пожалуй, только в новейших версиях квантовой теории атомных взаимодействий. В своей недавней речи, посвященной памяти Кеплера у памятника на его родине в Вайль-дер-Штатде, Эддингтон говорил о том, что кеплерова концепция мироустройства понимает музыку небесных сфер отнюдь не как механический рев и скрежет; в этом новом понимании прослеживается глубокая связь между космическим мышлением ученого и развитием современной физики. Причины мировой гармонии не механические и не физические, она имеет математическую и божественную природу. Пифагорейцы, а следом за ними и Платон, рассматривали регулярность космоса исключительно как некий порядок, присущий природе или божественной сущности в таком же смысле, в каком, например, рассудку как средству осознания истины, присущи законы формальной логики. Но позже *стоики*, а за ними христианство с их подчеркнутой значимостью индивидуальности души вновь воссоединили идеи космоса и судьбы, и в упорядоченности мира менее видели собственно порядок, но более — необходимость и определенность, неумолимо правящие ходом всех событий, включая и действия человека. Дополненные взглядами Гоббса эти представления явились базой современной концепции позитивистского детерминизма, о которой я должен буду сказать подробнее во второй лекции, посвященной вопросам причинности.

А эту лекцию я хочу завершить следующим эпистемологическим рассуждением.

Исходной позицией любой философии является понимание того факта, что мир, данный нам в ощущениях, есть лишь образ, видение, явление нашего сознания. Наше сознание воспринимает мир таким, каким он нам кажется, но не схватывает напрямую его трансцендентальную суть. Противоречие между субъектом и объектом, без сомнения, отражается в действиях нашего сознания, например, в чувственном восприятии. Тем не менее, с чисто гносеологической точки зрения, трудно возражать сторонникам феноменологической концепции, определяющим сферу деятельности науки описанием «непосредственно полученного сознанием». Постулирование истинности эго, «тебя»¹⁾ и окружающего мира есть действие метафизическое, не рассуждение, а акт признания и веры. Но эта вера, в конечном счете, является сущностью, душой любого знания. Идеалисты ошибались, полагая, что истинность эго гарантируется явлением сознания существенно иным образом и, так сказать, более надежно, чем истинность окружающего мира; в трансляции от сознания к действительности и эго, и «ты», и весь мир вдруг возникают все вместе и сразу, как по мановению волшебной палочки.

Но односторонняя метафизика материализма также ошибочна. С точки зрения материализма, эго — серьезная проблема. Лейбниц считал, что противоречие между свободой человека и божественным предначертанием можно разрешить, если считать, что Бог (по весомым соображениям) предписывает осуществление лишь части возможностей из бесконечного их числа; так, например, материальная природа двух существ, Иуды и Петра, должна всецело определять их судьбу. Такой вариант разрешения проблемы может казаться приемлемым, но он не выдерживает отчаянного вопля Иуды: «Почему именно я?!» Очевидна невозможность объективной формулировки этого вопроса, значит, невозможен и формально объективный ответ. Только искупление души может быть ответом. Знание бессильно внести гармонию в возмущенное эго (высший и, по сути, единственный суд истины и ответственности), в это несчастное «я», вопиющее голосом заблудшего человеческого существа, брошенного в колея его частной судьбы. Более того, постулирование окружающего мира отнюдь не гарантирует, что в процессе познания этот мир окажется для нас состоящим из тех самых явлений, совокупностью которых он является. Это может случиться, если только в основе мироздания лежат достаточно простые, если не элементарные, законы. Таким образом, простое постулирование внешнего мира не дает объяснения того, что предполагалось объяснить, а именно, того факта, что я, чувствующее и действующее существо, обнаруживаю себя в этом мире; вопрос о реальности мира неразрывно связан с вопросом о причине его математической гармонии. Но первопричину управляющего миром радио мы можем найти только в понятии Бога, она являет собой одну из граней Божественной Сути. Итак, окончательное решение превосходит область знания, и оно — в Боге едином; сознание, истекающее из него и не ведающее собственного начала, замыкается на себе самом в попытках логического

¹⁾Иной личности.

самопроникновения, в невнятности понятий субъекта и объекта, смысла и сущности. Реальный мир — не та «вещь в себе», которая в значительной степени может быть устроена как независимая данность. Познание мира таким, каким он является к нам из «рук Бога», невозможно посредством метода, многократно опробованного метафизиками и теологами, когда представления о сущности выкристаллизовываются в разрозненных суждениях, не связанных в смысловом отношении и объясняющих отдельные факты. Суть мира постигается только посредством символических построений. Что это означает, я постараюсь прояснить в двух следующих лекциях.

Многие считают, что современная естественная наука далека от Бога. Мое мнение противоположно. Я считаю, что сегодня мыслящему человеку гораздо сложнее прийти к Богу, руководствуясь гуманитарными резонами истории, духовной жизни и морали; ибо царящие в мире страдания и зло не исправляются ни всепрощением, ни божественным могуществом. В этой области мы даже еще не приподняли завесу, за которой наше человеческое естество скрывает суть вещей. Но в области знаний о физических свойствах природы мы поднялись настолько высоко, что пред нами как идеальное воплощение высшего смысла предстал образ безупречной гармонии. В нем нет ни лишений, ни страданий, ни зла; в нем — единственное: совершенство. И ничто не может удержать нас, ученых, от преклонения пред этими космическими силами, величие которых столь мощно и ярко описано, наверное, в лучших стихах, когда-либо звучавших на немецком языке, в песне архангелов из «Пролога на небе», *Фауста* Гёте:

В пространстве, хором сфер объятom,
Свой голос солнце подает,
Свершая с громовым раскатом
Предписанный круговорот.
Дивятся ангелы господни,
Окинув взором весь предел.
Как в первый день, так и сегодня
Безмерна слава божьих дел.

Перевод Б. Пастернака

(близкий к тексту, но не очень точный по смыслу.— *Ред.*).

В мелодии предвечной неба,
В чудном хорале бледных сфер
Смещение огненного Феба
Звучит органом вышних мер.
И черпают небесной силы
Из неизбывности его
В сём мире ангелы унылы
Не понимая ничего.

Перевод А. Ефремова

(точнее отражает идею автора.— *Ред.*).

The sun makes music as of old
Amid the rival spheres of heaven
On its predestined circle rolled
With thunder speed; the angels even
Draw strength from gazing at its glance
Though none its meaning fathom may: —
The world's unwithered countenance
Is bright as on the earliest day.

Ссылки нет, но предположительно, *перевод Г. Вейля* (.— *Ред.*).

Die Sonne tönt nach alter Weise
In Brudersphären Wettgesang,
Und ihre vorgeschriebne Reise
Vollendet sie mit Donnergang.
Ihr Anblick gibt der Engeln Stärke
Wenn keiner sie ergründen mag
Die unbegreiflich hohen Werke
Sind herrlich wie am ersten Tag.

Göthe.

Часть III

**ФИЗИКИ О СООТНОШЕНИИ
МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ**

Но есть и противоположная точка зрения, заключающаяся в том, что для физика-теоретика математика является лишь инструментом для решения конкретных проблем, причем именно физическая проблема диктует выбор того или иного математического аппарата. В связи с этим уместно привести высказывание известного физика-теоретика Я. И. Френкеля: «Математика может дать нам, в переработанном виде, лишь то, что мы сами в нее вложили. Для того чтобы получить новые физические результаты, необходимо — сознательно или бессознательно — вложить в „математическую мясорубку“ новые физические идеи, хотя бы в необработанном виде. (...) Физические проблемы могут быть решены только физическими же средствами. Среди младшего, а подчас и старшего поколения физиков-теоретиков, занимающихся вопросами квантовой теории, возникла целая армия „аппаратчиков“ — людей, утративших способность или склонность думать о сущности физических явлений. Нездоровое увлечение формально-математическим аппаратом, формалистический подход к вопросам физической теории приносят ей больше вреда, чем пользы, приучают физиков довольствоваться дешевыми математическими трофеями и забывать о подлинной сущности рассматриваемых проблем» [1, с. 19].

Между представителями этих двух крайних точек зрения возникли дискуссии, суть которых достаточно точно отражена в названии статьи академика В. И. Арнольда «Математика и физика: родитель и дитя или сестры?» [2], написанной по поводу разногласий с представителями школы французских математиков, выступающих под именем Никола́ Бурбаки. Как следует из этой статьи, Арнольд считает физику родителем математики, тогда как школа Бурбаки придерживается иной точки зрения.

§ 2. Метафизический анализ соотношения физики и математики

Как нам представляется, данная дискуссия имеет явно метафизический характер и решить ее можно лишь на основе метафизических принципов. При этом под метафизикой следует понимать не нечто неопределенное и мистическое, как иногда это делается, а теоретическое ядро философии [3], характеризующееся рядом метафизических принципов, которые пронизывают все сферы мировой культуры. Здесь, прежде всего, следует иметь в виду, что в метафизике всегда присутствовали два крайних подхода к реальности: холизм и редукционизм. Холизм основан на таком понимании мира, когда целое доминирует, предшествует своим частям. Холизму противостоит редукционизм, в котором целое расщепляется на части, понимаемые более первичными, предшествующими целому. Оба эти подхода имели важное значение и дополняли друг друга в процессе познания мироздания. В связи с этим следует отметить, что уже сам факт выделения математики

и физики из массива естествознания является проявлением редукционизма, а в наличии сторонников двух названных точек зрения просматривается попытка перейти к холизму на основе одной из выделенных частей: физики или математики. Можно ли это осуществить?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к трудам русских философов «серебряного века», выступавших за систему единого знания, базирующегося на холистском подходе к мирозданию. При этом было вскрыто и продемонстрировано несколько ключевых метафизических принципов. Как писал В. С. Соловьев: «Свободная теософия (цельное знание, — Ю. В.) есть органический синтез теологии, философии и опытной науки, и только такой синтез может заключать в себе цельную истину знания: вне его и наука, и философия, и теология суть только отдельные части или стороны, оторванные органы знания и не могут быть, таким образом, ни в какой степени адекватны самой цельной истине» [4, с. 266]. Здесь, кроме призыва к холизму, сформулирован принцип триединства: единое целое представляет собой синтез трех сторон: теологии, философии и науки.

В этой же работе Соловьев фактически ввел еще один метафизический принцип — принцип фрактальности. Выделяя из названной триады философию, он фактически пишет о триединстве философии, которое проявляется «во внутреннем синтезе трех ее главных направлений — мистицизма, рационализма и эмпиризма», а также в «более общей и широкой связи с теологией и положительной наукой» [4, с. 279]. В современном понимании рационализм трактуется как идеализм, а эмпиризм — как материализм. Напомним, что принцип фрактальности состоит в том, что в каждой выделенной части целого проявляются свойства всех других частей (сторон) целого.

Точно так же можно говорить о триединстве и в других двух сторонах свободной теософии, в том числе и в науке, причем эти три стороны также соответствуют трем сторонам единого целого, а также трем типам философии. Легко понять, что таковыми должны выступать математика, физика и метафизика. При этом математика соответствует идеализму как раздел науки, оперирующий с идеальными объектами, физика — материализму, а метафизика в какой-то степени может быть сопоставлена с мистицизмом.

Применение принципа фрактальности можно продолжить и далее. Возьмем математику. Так, например, Бурбаки показали, что в основаниях математики (в «архитектуре математики») опять проявляется принцип троичности. Здесь мы имеем в виду три типа математических структур (три вида отношений), названных порождающими структурами (*les structures-meres*):

1) «То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют „законом композиции“; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются „законами композиции“, соответствующая структура называется *алгебраической структурой*» [5, с. 252].

2) «Другой важный тип представляют собой структуры, определенные *отношением порядка*; на этот раз это — отношение между двумя элементами x, y , которое чаще всего мы выражаем словами x меньше или равно y . (...) Здесь больше не предполагается, что это отношение однозначно определяет один из элементов x, y как функцию другого» [5, с. 252].

3) К третьему типу структур отнесены *топологические структуры* (или топология). «В них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия окрестности, предела и непрерывности, к которым нас приводит наше представление о пространстве» [5, с. 253].

Математический мир в целом предлагается строить на основе концепции иерархии названных структур, идя от простого ядра из порождающих структур к сложному. «За пределами этого первоначального ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать *сложными* (multiples) и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом (что не дало бы ничего нового), а органически *скомбинированные* при помощи одной или нескольких связывающих их аксиом» [5, с. 255]. Называются отдельные разделы математики с указанием порождающих их структур. Например, топологическая алгебра и алгебраическая топология возникают из соединения топологической и алгебраической структур. «Соединение структуры порядка и алгебраической структуры точно так же изобилует результатами, приводя, с одной стороны, к теории делимости идеалов, а с другой стороны — к теории интегрирования и к спектральной теории операторов, где точно так же топология играет свою роль. (...) Именно таким образом получают теории классической математики: анализ функций действительной и комплексной переменной, дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию чисел. Но они теряют свою былую автономность и являются теперь перекрестками, на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие более общий характер» [5, с. 256].

Иной подход к основаниям математики и формальных логических систем представлен в книге С. К. Клини «Введение в метаматематику» [6], где математика «отрывается» от физики и какого-либо материального носителя. Как пишет автор, «Матаматематика должна изучать формальную систему как систему символов и т. п., которые рассматриваются совершенно объективно. Это означает попросту, что символы и т. п. не должны использоваться для обозначения чего-либо отличного от них самих. Метаматематика смотрит на них, а не через них и не на то, что за ними; таким образом, они являются предметами без интерпретации или значения» [6, с. 62]. Характерно, что метаматематика Клини также опирается на систему из трех категорий. Первую категорию образуют *формальные символы*, вторую категорию составляют *формальные выражения* (конечные последовательности формальных символов), а третью — *конечные последовательности формальных выражений*.

§ 3. Принципы тринитарности и фрактальности в физике

Иногда можно услышать утверждение, что физика — наука экспериментальная. Это правда, но далеко не вся. В физике также можно выделить три составные части: эксперимент, математический аппарат и философское осмысление. Если учесть, что непосредственно математический аппарат используется именно в теоретической физике, то и ее в настоящее время целесообразно представить в виде трех составных частей: *фундаментальной теоретической физики*, имеющей дело с основаниями физики (анализом и возможным изменением ключевых понятий, принципов и закономерностей), *собственно теоретической физики*, развивающей уже прочно установленные принципы и закономерности, и *прикладной теоретической физики*, занимающейся расчетами конкретных явлений и процессов на базе достижений собственно теоретической физики.

В классической физике, излагаемой в школе и в вузах в курсах общей физики, рассматриваются тела (частицы), которые находятся не иначе как в пространстве-времени и взаимодействуют друг с другом через поля: гравитационное, электромагнитное и иные. Это, казалось бы, очевидное утверждение означает выделение из представлений о цельной физической реальности именно *трех* физических (метафизических) категорий: *пространства-времени, частиц (тел) и полей переносчиков взаимодействий*. Эти три категории так или иначе лежат в основаниях всех развивающихся в физике теорий и программ. В этом проявился весьма плодотворный для соответствующего этапа развития физики метафизический редукционизм.

Троичность ярко выражена и в главном уравнении классической механики — во втором законе Ньютона: $ma = F$. В его трехчленной формуле масса m является характеристикой категории частиц (тел), ускорение a соответствует категории пространства-времени, а стоящая справа сила — категории полей переносчиков взаимодействий.

В учебниках и в большинстве книг по физике названные категории в значительной степени имеют самостоятельный характер. Допускается изучение свойств пространства-времени без частиц и полей. Можно рассматривать также свободные электромагнитное или гравитационное поля без частиц или свободные частицы (тела) без полей.

Отнесем физические теории такого рода к теориям *триалистической* метафизической парадигмы, что подчеркивает троичный характер метафизических оснований данного подхода к реальности.

В классической физике, кроме метафизического принципа тринитарности, имеющего в редукционистском подходе характер троичности, а в холистическом подходе — триединства, легко усмотреть и другой метафизический принцип — принцип фрактальности, означающий, что в представлениях

о каждой из трех ключевых категорий (пространства-времени, частиц и полей) проявляются и две другие категории. Поясним это утверждение.

1. *Категория пространства-времени.* Занятия аксиоматикой геометрии с целью изучения используемых в физике представлений о классическом пространстве-времени приводят к заключению, что аксиоматика теснейшим образом связана с метафизикой, поскольку всегда опирается на задание некой системы исходных понятий — примитивов, о которых можно сказать лишь то, что они удовлетворяют некой системе аксиом. Анализ представленных в литературе аксиоматик геометрии (пространства-времени) показывает, что в них минимальное и устойчиво повторяющееся число примитивов равно трем, что одновременно соответствует метафизическому принципу троичности и фрактальности. Как правило, в качестве примитивов геометрии выбираются: *точки, метрика (расстояния) и окрестности* (области непрерывных множеств). В теории относительности геометрические точки трактуются как физические точки-события, а вместо расстояний выступают интервалы (метрика).

Названные примитивы геометрии (аксиоматики пространства-времени) могут быть соотнесены с тремя физическими категориями: 1) точка (точка-событие) — с категорией частиц; 2) интервал (метрика) — с категории полей переносчиков взаимодействий; 3) окрестности (области непрерывного множества) — с категорией самого пространства-времени.

Первое из названных соответствий не вызывает сомнений, поскольку теория относительности имеет дело именно с событиями, в которых обязательно участвует какая-либо частица. Второе, — менее очевидное в рамках специальной теории относительности, — становится понятным, если иметь в виду общую теорию относительности, где через компоненты метрического тензора (метрики) описывается гравитационное взаимодействие. В многомерных теориях Т. Калуцы и О. Клейна метрика ответственна и за появление электромагнитного и других физических полей. Соответствие областей и самой категории пространства-времени также выглядит достаточно естественно.

Совокупность аксиом геометрии (пространства-времени) разбивается на три основные группы: аксиомы порядка, метрические и топологические аксиомы, которые фактически определяют три названные категории: 1) аксиомы порядка характеризуют упорядоченность точек в геометрии и соответствуют свойству причинности в физике; 2) метрические аксиомы определяют свойства интервалов (длин), задаваемых глобально или инфинитезимально; 3) топологические аксиомы формируют понятие непрерывности (свойства окрестностей).

2. *Категория полей.* Принцип фрактальности явно проявляется уже в самой дефиниции поля. Во-первых, в него входит область определения функции, — она задана на непрерывном пространственно-временном многообразии (или в некоторой его области), — в чем можно усмотреть присут-

ствие категории пространства-времени. Во-вторых, это числовая функция, которую, как и метрику, будем относить к категории переносчиков взаимодействий. В-третьих, аргументом функции является точка, олицетворяющая собой категорию частиц.

3. *Категория частиц* в физике предстает в виде трех составляющих: 1) рассматриваемые частицы или тела, которые непосредственно соответствуют категории частиц; 2) тело отсчета, относительно которого определяются все понятия, в том числе и компоненты полей; 3) все прочие частицы (тела) окружающего мира (Вселенной). В ньютоновой классической механике множество прочих частиц формально не учитывается, однако оно всегда неявно присутствует через используемые нами понятия типа значений масс или фундаментальных физических констант. Это раскрывается через принцип Маха в реляционном подходе к физике.

При анализе развития фундаментальной теоретической физики XX в. становится очевидным, что осознанно или неосознанно *физики-теоретики постепенно смещались от редукционизма к холизму*, фактически пытаясь опереться не на три, а на меньшее число из названных или обобщенных категорий. Естественно, что главным образом изучались возможности построения физической картины мира на основе не трех, а двух метафизических категорий: обобщенной, объединяющей в себе две категории, и оставшейся (или даже двух обобщенных категорий). Такие теории можно назвать *дуалистическими*. К их числу, в частности, относятся как общая теория относительности, так и квантовая теория.

Имея три варианта объединения двух категорий из трех, получаем *три типа физических теорий (дуалистических парадигм)*, или *три миропонимания* одной и той же физической реальности, рассматриваемой под разными углами зрения [7].

К *теоретико-полевому миропониманию* относятся теории, основанные на объединении категорий частиц и полей. В этом подходе вместо этих двух категорий выступает новая *обобщенная категория поля амплитуды вероятности*, описываемая волновыми функциями в классическом пространстве-времени. Этот подход определял главное, можно сказать, магистральное направление развития физики в XX в. К теориям этой парадигмы относятся квантовая механика и квантовая теория поля, в которых симметричным образом рассматриваются (бозонные) поля переносчиков взаимодействий и (фермионные) поля частиц. Апогей этого подхода проявился в открытых во второй половине XX в. суперсимметричных преобразованиях между фермионными и бозонными волновыми функциями. Эта же линия продолжается в столь модных в самом конце XX в. исследованиях суперструн и супербран.

Под *геометрическим миропониманием* следует понимать описание физической реальности на основе обобщенной категории, включающей в себя прежние категории пространства-времени и полей переносчиков взаимодействий. Таковой является новая *категория искривленного пространства-*

времени, деформируемого содержащимися в нем частицами (телами). Центральное место здесь занимает эйнштейновская общая теория относительности, в которой нет отдельно плоского пространства-времени и отдельно гравитационного поля, а есть обобщенная категория искривленного пространства-времени, куда вложена категория частиц. К этому же классу теорий относятся многомерные геометрические модели физических взаимодействий, называемые ныне теориями Калуцы и Клейна, где, кроме гравитации, геометризируются и другие виды физических взаимодействий, в первую очередь, — электромагнитное.

Два названных дуалистических миропонимания соответствовали главным направлениям развития фундаментальной теоретической физики в XX в.: квантовой теории и общей теории относительности. Однако имеется еще третье дуалистическое миропонимание, которое также развивалось и даже было доминирующим в середине XIX в., а затем оказалось в тени. Речь идет об исследованиях в рамках концепции *дальнего действия*, альтернативной общепринятой концепции *близкого действия*, воплощенной в теории поля. Назовем этот подход к физической реальности *реляционным миропониманием* [8]. В XX в. это направление исследований было представлено теорией прямого межчастичного взаимодействия Фоккера—Фейнмана.

В дуалистическом реляционном подходе физическая теория строится на базе двух обобщенных категорий: пространственно-временных и токовых отношений. Первая из них заменяет априорно заданное пространство-время системой отношений между событиями с участием частиц (тел). Это означает переход от субстанциальной к реляционной трактовке сущности пространства-времени. Вторая обобщенная категория — токовые отношения — означает введение парных отношений между заряженными токами взаимодействующих частиц на основе концепции *дальнего действия*. Взаимодействие между частицами описывается посредством принципа Фоккера, содержащего лишь характеристики частиц. В теориях такого рода среди первичных понятий отсутствуют поля переносчиков взаимодействий. При желании их можно ввести, однако как некие вторичные вспомогательные понятия.

В теориях трех названных дуалистических парадигм используется различный математический аппарат, по-разному представляется сущность многих привычных понятий и суть главных проблем. В частности, по-разному выглядит соотношение электромагнитных и гравитационных взаимодействий. Если в теоретико-полевой парадигме они выступают на равной ноге, то в геометрической парадигме электромагнетизм возникает как некое обобщение теории гравитации (в виде смешанных компонент 5-мерного метрического тензора в теории Калуцы), а в реляционной парадигме гравитацию можно рассматривать как своеобразную «квадратичность электромагнетизма». Само пространство-время в теоретико-полевом подходе играет роль фона для физических явлений, в геометрическом подходе пытаются

через него описывать всю физику, а в реляционной парадигме оно выступает как система отношений между физическими событиями. Три названные дуалистические парадигмы следует трактовать как три видения одной и той же реальности под взаимно ортогональными углами зрения.

§ 4. Ключевая проблема физики ХХI в.

Главной целью физиков-теоретиков во второй половине ХХ в. было и остается сейчас построение единой теории физических взаимодействий, включающей в себя и общую теорию относительности. Поскольку три вида взаимодействий (электромагнитное, слабое и сильное) описывались в рамках теоретико-полевого миропонимания, а гравитационное — в рамках геометрического подхода, то объединяемые теории оказались представленными посредством разных метафизических парадигм. Это явилось главной (метафизической) причиной неудач, постигнувших физиков-теоретиков. Решить данную проблему можно лишь на пути создания новой физической картины мира на основе *единой обобщенной категории*. Она пока по-разному «видится» с каждой из трех названных парадигм: единый вакуум в теоретико-полевого подходе, единая геометрия в геометрическом миропонимании или единая система отношений (структура) в реляционном миропонимании. На наш взгляд, это разные названия одного и того же физического (метафизического) первоначала — того, что лежит «за», «над» или «под» физикой и составляет ядро (холон) монистической парадигмы, причем различие обусловлено предварительным, пока еще неполным его знанием в отдельных миропониманиях.

Другими словами можно сказать, что названные три вида физических теорий, определявших лицо физики ХХ в., свидетельствуют о том, что доминирующей была тенденция перехода от триалистической парадигмы, сформулированной еще Ньютоном, через *дуалистические к монистической парадигме*, опирающейся на единую обобщенную категорию, т. е. наблюдалось стремление от категорийного редукционизма к холизму. Этот вывод позволяет вспомнить пророческие слова Эрнста Маха, сказанные сто лет тому назад в период перехода к теориям дуалистического типа. Согласно его пониманию, используемые ныне, как классические, так и обобщенные новые категории являются лишь временными, вспомогательными понятиями, удобными для восприятия мироздания на соответствующем этапе развития физики. Рано или поздно они будут заменены на новую обобщенную триединую категорию, из которой можно будет перейти к привычным, ныне используемым категориям.

Исходя из анализа современного состояния физики, можно утверждать, что в настоящий момент мы стоим на пороге существенных изменений наших представлений о физическом мироздании. Об этом свидетельствуют, во-первых, новые экспериментальные данные и открытия в астрофизике и фи-

зике микромира, во-вторых, ряд приобретших особую актуальность фундаментальных проблем, таких как объединение физических взаимодействий, совмещение принципов квантовой теории и общей теории относительности, раскрытие тайн сознания и жизни и т. д., в-третьих, увязка этих и ряда других проблем современной науки с принципами метафизики. Для решения всех этих проблем ключевую роль играет поиск адекватной математики. Только после того, как физические идеи в совокупности с их метафизическим осмыслением получают должную математическую обработку, можно будет сказать о переходе на новый уровень миропонимания.

О важности поиска (подбора) адекватного математического аппарата при решении подобных задач свидетельствует история становления новых физических теорий в прошлом. Следует напомнить, что для создания Эйнштейном общей теории относительности чрезвычайно важной оказалась помощь математика Марселя Гроссмана в применении аппарата римановой дифференциальной геометрии (см. [9]). Для построения квантовой теории на первых этапах оказался необходимым аппарат теории собственных значений и собственных функций дифференциальных уравнений, а на последующих этапах — методы гильбертовых пространств и обобщенных функций. В настоящий момент физики-теоретики настойчиво ищут подходящий математический аппарат для решения назревших физических проблем.

В этом деле чрезвычайно важно выделить из всего спектра проблем ключевую задачу, на решение которой следует обратить особое внимание. Таковой, на наш взгляд, является *задача построения макроскопической (статистической) теории классического пространства-времени*. Общеизвестно, что до сих пор все физические теории строились на фоне априорно заданного классического пространства-времени, которое могло быть плоским, искривленным, закрученным, обладающим разной топологией и т. д., но всегда присутствующего. В то же время сложилась убежденность в том, что пространство-время является физической категорией, существенно зависящей от содержащихся в ней полей и иных физических объектов. В связи с этим уже давно ставится вопрос: доколе в физике классическое пространство-время будет рассматриваться самостоятельной категорией?

Известно, что даже для введения чрезвычайно модных ныне суперструн и бран необходимо предположить наличие, по крайней мере, двух пространственно-временных измерений [10]. Иначе теряет смысл понятие струны и ее колебание. С другой стороны, идя от обсуждения оснований классической геометрии, ряд геометров, в том числе П. К. Рашевский [11], пришли к выводу, что геометрию следует рассматривать как статистический итог наложения огромного числа неких физических факторов из физики микромира. Эта точка зрения пересекается с основополагающими идеями, послужившими стимулом для разработки теории твисторов Р. Пенроуза [12]. Близкие идеи обсуждались в свое время А. Эйнштейном, А. Эддингтоном, Е. Циммерманом, Ван Данцигом и рядом других авторов; однако эти идеи

не нашли своего воплощения в должной математической форме и остались на качественном уровне.

Возникает вопрос, что препятствовало более активному поиску решения этой проблемы? Ответ на него носит метафизический характер. Дело в том, что в XX в. в физике была доминирующей теоретико-полевая (метафизическая) парадигма, которая самым существенным образом опиралась на готовое пространство-время, без которого становится бессмысленным само понятие поля. Не представляется возможным приступить к решению этой проблемы и в рамках геометрической парадигмы, ибо в ее рамках можно говорить лишь о свойствах уже имеющегося пространственно-временного многообразия.

Исходя из этого, следует констатировать, что приступить к решению указанной проблемы можно лишь в рамках третьей (*дуалистической*) *метафизической парадигмы, представленной в физике — реляционной, опирающейся на концепцию дальнего действия*. В рамках этой концепции, если нет событий и физических объектов — нет и понятия пространства-времени. Эта концепция берет начало от работ И. Ньютона и дискутирующего с ним Г. Лейбница, затем она развивалась в работах Э. Маха [13], А. Д. Фоккера, Я. И. Френкеля, Р. Фейнмана [14], Ф. Хойла, Дж. Нарликара [15] и ряда других авторов.

Но и это направление исследований, известное в литературе как теория прямого межчастичного взаимодействия, не получило должного развития. Возникает вопрос: почему? Ответ кроется в том обстоятельстве, что реляционная парадигма в физике, как уже отмечалось, является дуалистической, т. е. опирается на две (реляционные) категории: пространственно-временные и токовые отношения, играющие ключевую роль в выражении принципа Фоккера (в концепции дальнего действия). Оказалось, что в работах Р. Фейнмана и других авторов фактически использовался реляционный характер лишь одной из двух категорий — взаимодействий, тогда как теория по-прежнему строилась на фоне готового классического пространства-времени. Это проявилось в фейнмановской (путезависимой) формулировке квантовой механики, трактуемой ее автором как «пространственно-временной подход к квантовой механике». Для развития концепции дальнего действия не хватало неких новых математических идей.

§ 5. Бинарные системы комплексных отношений

В последнее время были найдены необходимые новые математические методы для развития реляционной парадигмы. Их начала были заложены в работах Ю. И. Кулакова [16] и Г. Г. Михайличенко [17] в рамках так называемой теории физических структур, фактически представляющей собой универсальную теорию отношений, пригодную для применения на дискретном множестве абстрактных элементов произвольной природы. В работах

названных авторов были разработаны, во-первых, теории унарных систем отношений (на одном множестве элементов), соответствующие классическим геометриям с симметриями, и, во-вторых, теории бинарных систем отношений (на двух множествах элементов), которые можно трактовать как открытие своеобразных бинарных геометрий. Эти работы не привлекли к себе должного внимания, во-первых, из-за того, что сами авторы не связали свои результаты с реляционной парадигмой в физике, делая упор на выводе законов систем отношений, диктующем дополнение теории свойствами непрерывности. Во-вторых, авторы ограничились применением своей теории лишь к задачам общей физики, таким как переформулировка второго закона Ньютона, законов Ома и т. д., что лежит далеко от актуальных проблем современной физики. В-третьих, физиков отталкивала идеологическая интерпретация данного направления исследований — в духе платоновской философии и рассуждений о двух мирах: высшей и низшей реальности.

Однако обобщение математической части теории бинарных физических структур с вещественными парными отношениями на случай комплексных парных отношений в рамках минимального невырожденного ранга (3, 3) приводит к *теории 2-компонентных спиноров*, а системы более высоких рангов — к теории обобщенных финслеровых спиноров, что указывает на применимость (и важность) теории систем отношений в физике микромира.

Другое важное следствие *теории бинарных систем комплексных отношений (БСКО)* более высокого ранга основано на том факте, что от бинарных систем отношений можно перейти к унарным, т. е. к геометриям. Известно, что в современных геометрических моделях типа теорий Калуцы и Клейна стремятся геометризовать физику на базе обычных (т. е. унарных) геометрий. Однако, если показано, что унарную геометрию можно получить из более фундаментальной бинарной, то сразу же встает более глубокая *задача геометризации физики на основе бинарной геометрии*. Первые же шаги в этом направлении показали возможность объединения сильных и электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (6, 6). Развиваемая на данной основе теория названа *бинарной геометрофизикой* [7, 8].

Третьим важным обстоятельством данного подхода является то, что *теория БСКО (бинарная геометрия) представляет собой адекватный математический аппарат для описания квантовых закономерностей в физике микромира*. Это легко заметить, если одно множество элементов бинарной системы отношений интерпретировать как возможные начальные состояния системы, второе множество — как конечные состояния, а парные отношения между элементами двух множеств трактовать как прообраз амплитуды вероятности перехода системы из начального состояния в конечное. Более того, этот математический аппарат можно считать адекватно отображающим понимание Аристотелем сути движения как двух положений объектов, связанных чем-то третьим, переводящим возможность в действительность.

Отметим, что на связь сути квантовой механики со взглядами Аристотеля неоднократно обращал внимание В. Гейзенберг.

Но самым важным, на наш взгляд, является то, что *теория БСКО может быть положена в основание искомой макроскопической теории классического пространства-времени*. Для этой цели нужно, во-первых, учесть, что классические пространственно-временные отношения обусловлены главным образом электромагнитными взаимодействиями, которые в бинарной геометрофизике описываются упрощенной теорией БСКО ранга $(4, 4)$. Во-вторых, следует обратить особое внимание на БСКО ранга $(2, 2)$, являющейся подсистемой всякой теории БСКО более высокого ранга. Именно эта система отношений ответственна за появление в физике фазовых вкладов в амплитуде вероятностей переходов. В-третьих, следует положить, что реальный мир представляет собой множество элементарных частиц, на которые наложена огромная совокупность БСКО ранга $(4, 4)$, соответствующая в общепринятом полевом подходе «морю» испущенных, но еще не поглощенных фотонов. В итоге оказывается, что между любыми двумя частицами оказывается определенной гигантская совокупность парных отношений, из наложения которых предлагается получать сначала прообраз, а в классическом случае (для макротел) и сами классические пространственно-временные отношения.

При реализации данной программы построения макроскопической теории классических пространственных отношений встает ряд конкретных задач математического характера. В частности, были бы полезны математические разработки по решению обратной задачи разложения Фурье, т. е. получения образов из совокупности отдельных гармоник. Как известно, в общепринятом подходе производится разложение функций в ряды (интегралы) Фурье на готовом фоне (на непрерывном множестве значений координат). Теперь же ставится обратная задача получения фона из гармоник. Эту задачу также можно трактовать как обратную физическую задачу в фейнмановской формулировке квантовой механики, где вместо суммирования вкладов в амплитуду вероятности от всех возможных путей в готовом пространстве-времени рассматриваются фазовые вклады от всех возможных реальных «переизлучателей» излучения (или самих частиц).

Осуществление сформулированной программы неизбежно приведет к значительному числу принципиальных и практических следствий. Среди них следует назвать решение проблемы интерпретации квантовой механики, построение объединенной теории физических и гравитационных взаимодействий, новый взгляд на ряд проблем в биологии (природы сознания, происхождения и сущности жизни), на объяснение ряда таинственных явлений человеческой психики и т. д.

§ 6. Соотношение фундаментальных проблем физики и математики

Есть все основания полагать, что принципы метафизики и процессы, происходящие в фундаментальной теоретической физике, проявляются и в других разделах науки, в том числе и в математике. Об этом свидетельствует ряд фактов из истории физики и математики.

Так, в математике весьма условно принято разделять алгебру и геометрию. Это приводило к выделению двух подходов: алгебраического и геометрического. Как неоднократно заявлял Кантор, основной целью своих работ он считал синтез арифметических (алгебраических) и геометрических представлений. Эта задача им решалась на основе теории множеств. В связи с этим напомним, в свое время аналогичная задача решалась Декартом в механике, когда геометрические построения в физике были представлены в аналитическом виде. В итоге была построена аналитическая механика и оформлена теория классического пространства и времени.

Другим примером могут послужить попытки использования аксиоматических методов для решения ряда фундаментальных проблем физики и математики. Известно, что в XX в. физики возлагали большие надежды на аксиоматику при попытках решения ряда фундаментальных проблем квантовой теории поля и общей теории относительности. Однако этот путь не привел к желаемым результатам. Аналогичная ситуация наблюдалась и в математике. Как пишет В. И. Арнольд: «Продолжающаяся, как утверждают, 50 лет аксиоматизация и алгебраизация математики привела к неудобочитаемости столь большого числа математических текстов, что стала реальностью всегда угрожающая математике угроза полной утраты контакта с физикой и естественными науками (...) Характерным признаком аксиоматически-дедуктивного стиля являются немотивированные определения, скрывающие фундаментальные идеи и методы; подобно притчам, их разъясняют лишь ученикам наедине» [18, с. 7].

Как метко заметил один из физиков-теоретиков, «аксиоматика — это не шевелюра, а лишь только прическа». С ее помощью можно лишь уточнить уже используемые основания и структуру теории, но не более. Это относилось к физике, строившейся на основе теоретико-полевой парадигмы. То же можно сказать и об аксиоматизации сложившейся в математике парадигмы, опирающейся на теорию множеств. Тем не менее, сопоставление аксиоматики физики и математики (геометрии) позволяет обратить внимание на ряд общих моментов, свидетельствующих о том, что в основе этих дисциплин лежат одни и те же метафизические принципы. Аналогичную мысль можно найти в работах Бурбаки: «Аксиоматический метод показал, что истины, из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают свое применение этим частным случаем. В конце концов, это интимное

взаимопроникновение, гармонической необходимостью которого мы только что восхищались, представляется не более чем случайным контактом наук, связи между которыми являются гораздо более скрытыми, чем это казалось а priori» [5, с. 258].

Упомянутый выше метафизический принцип фрактальности позволяет установить соответствие математических порождающих структур с физическими категориями: структуру отношений следует соотнести с категорией частиц, алгебраическую структуру — с категорией полей переносчиков взаимодействий, а топологическую структуру — с категорией пространства-времени. В связи с этим следует обратить особое внимание на тот факт, что до самого последнего времени физические теории в рамках теоретико-полевой парадигмы строились на базе классического пространства-времени аналогично тому, как в основу математических теорий клалась теория множеств. Как пишет П. Вопенка, внесший значительный вклад в развитие аксиоматической теории множеств: «Все математические объекты, созданные в дотеоретико-множественной математике, могут быть заново построены как структуры в теории множеств. Точнее, эти объекты можно задать в теории множеств их каноническими моделями, так, что изучение оригинальных объектов заменялось изучением соответствующих моделей. В некоторых случаях эта замена влияет и на исходные понятия и влечет за собой их модификацию в согласии с рассматриваемой моделью. В качестве примеров можно привести действительные числа, исчисление бесконечно-малых и т. д. (...) Теория множеств открыла путь к изучению необъятного количества различных структур и беспрецедентному росту знаний относительно них. Это привело к распылению математики. Кроме того, большинство результатов такого рода приобретают смысл только за счет существования соответствующей структуры в канторовской теории множеств» [19, с. 12–13].

Исходя из данной аналогии, следует обратить внимание на ряд следующих обстоятельств:

1. Аналогично тому, как в физике использование классического пространства-времени неизбежно приводит к ряду проблем с расходимостями и с описанием закономерностей в микромире, так и в математике опора на теорию множеств вызывает ряд проблем. На это обращали внимание многие математики. Так, П. Вопенка пишет: «Канторовская теория множеств ответственна за это ущербное развитие математики; с другой стороны, она накладывает на математику ограничения, которые не так легко преодолеть. Все структуры, изученные в математике, априори жестко связаны, и роль математика есть просто роль наблюдателя, их описывающего (...) Это ставит под вопрос роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть низведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики» [19, с. 14].

В настоящее время среди математиков идет активная, но внешне мало заметная деятельность по созданию новой универсальной, нетеоретико-множественной концепции. Эту деятельность можно сопоставить с попытками построения макроскопической теории пространства-времени в физике, т. е. с поиском путей вывода классических пространственно-временных отношений, исходя из наложения огромного числа неких физических факторов.

2. По современным представлениям, канторовская теория множеств является основой понятия вещественного числа. При определениях пределов, признаков сходимости и в ряде других мест используется понятие больше-меньше, что заложено в определении вещественных чисел и может быть определено в теории множеств. Однако квантовая теория и физика микромира показывают, что основания физики описываются комплексными числами — амплитудами вероятности, для которых понятие больше-меньше в принципе отсутствует. При решении ряда принципиальных задач физики микромира осуществляется переход от компактифицированных понятий, описываемых фазами единичных по модулю комплексных чисел, к понятиям, характеризваемым вещественными числами. Это заставляет усомниться в сохранении канторовской теории множеств в качестве основы математики будущего.

3. В согласии с метафизическими принципами фрактальности и тринитарности, в свойствах вещественных чисел можно выделить три стороны: непрерывность, порядковую и количественную. Относительно первой из названных сторон А. Н. Колмогоров писал: «В случае континуума действительных чисел уже рассмотрение одного его элемента — действительного числа — приводит к изучению процесса образования его последовательных приближений, а рассмотрение всего множества действительных чисел приводит к изучению общих свойств такого рода процессов образования его элементов. В этом смысле сама бесконечность натурального ряда, или системы всех действительных чисел (континуума), может характеризоваться как бесконечность лишь потенциальная (...) Выяснение вопроса о том, в какой мере и при каких условиях при изучении бесконечных множеств законно абстрагироваться от процесса его образования, еще нельзя считать законченным» [20]. Здесь речь идет о процессе в определении континуума, что можно сопоставить с процессом изменения отношений между элементами в бинарной геометрофизике.

4. Относительно количественных и порядковых свойств вещественного числа в приложении ко времени Г. Вейль в своей книге «Das Kontinuum» отмечал следующее: «Если моменты времени с их отношением „раньше“ и „позже“ могут действительно служить фундаментом чистой теории времени, то в созерцании времени должен быть заложен ответ на вопрос: имеется ли такого рода соответствие между моментами времени и действительными числами или нет? Если оно отсутствует, то следует попытаться так расширить или изменить наши дефиниционные принципы, чтобы

достигнуть желаемого согласия. Если же это окажется недостижимым, то чисто арифметический анализ лишается реальной ценности, и учение о континууме придется рассматривать как нечто самостоятельное и стоящее на одной ступени с учением о числе (...) Для объективного представления времени получается вот что: 1) отдельная временная точка не является самостоятельной; 2) каждый момент времени непредсказуем, возможна лишь приближенная фиксация (...) Не от нашей воли зависит то, что мы не можем связать непрерывность с системой целых чисел. И все же, кто знает, что еще дремлет в лоне физики будущего — квантовой теории!» [21]. Отметим, что книга Вейля была написана в 1917 г.

5. По старой философской традиции, «количество» замкнуто на пространство, а «порядок» — на время (на процесс). Поскольку в теории множеств акцент делается на количественную природу числа, то понятие процесса не включено во внутреннее ее свойство. Таким образом, существенным моментом всей теории множеств является ее статичность, родственная представлениям Платона о неизменных свойствах мира высшей реальности.

Аналогом статичности в теории множеств является статичность пространственно-временного многообразия. Оно в физике полагается заданным, а эволюция систем описывается дополнительным приемом последовательного рассмотрения пространственных сечений, ортогональных линиям времени. Как в свое время заметил Э. Шрёдингер, публичный успех теории относительности связан со своеобразным способом «приручения» времени, сведением его свойств к пространственным.

Этот дополнительный прием в ньютоновой физике (или в теоретико-полевым подходе) заменяется в классической реляционной теории использованием двух ключевых категорий: пространственно-временных отношений (статических) и категорией токовых отношений. В бинарной геометрофизике в самое основание теории положено элементарное звено процесса перехода системы из одного в иное состояние.

6. Представления, связанные с опорой лишь на статичность, приводят к ряду парадоксов, которые отображены, например, в апориях Зенона. В книге Д. Гильберта и П. Бернайса «Основания математики» по поводу парадокса Зенона сказано: «Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждениями о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенный парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже и представить (не только фактически, но хотя бы даже в принципе), на самом деле все-таки должно завершиться» [22, с. 40].

Эти авторы указывают на принципиально важный ход разрешения данного парадокса, фактически соответствующий принципам построения

бинарной геометрофизики: «В действительности, конечно, существует более радикальное решение этого парадокса. Ведь на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математические пространственно-временные представления о движении являются также физически осмысленными и в случае произвольно малых пространственных и временных интервалов. Более того, у нас имеются все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области в пределах того порядка величин, которые еще доступны нашему наблюдению, подобно тому как совершает определенную экстраполяцию механика сплошной среды, которая кладет в основу своих рассматриваний представление о непрерывном заполнении пространства материей. Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение. Если мы встанем на эту точку зрения, то этот парадокс исчезает» [22, с. 41]. Это следует понимать так, что в основу математики не может быть положен континуум в виде непрерывной совокупности точек.

7. В теории множеств Кантора имеется существенный дефект, связанный с так называемым диагональным процессом. Суть его состоит в том, что в ряде случаев невозможно говорить о полном множестве, содержащем все свои элементы. Действительно, как только будет объявлено о полном множестве, можно будет определить новый элемент, отличный от всех имеющихся элементов. Как пишет С. А. Вékшенев: «Диагональный процесс — фатальное открытие теоретико-множественной математики, бросающее тень на основополагающую идею — возможность собрать элементы в одно целое. Это, по-видимому, осознал и сам Кантор, который пытался придать диагональному процессу статус доказательства того, что множество $P(V_a)$ имеет большую мощность, чем множество V_a . Однако в строгом смысле метаморфозы не получилось. За весь период существования теории множеств с критикой диагонального метода доказательства выступили десятки авторов, начиная с Б. Рассела. Последним по времени был, по-видимому А. А. Зенкин, который отметил в коротком на полстраницы доказательстве Кантора семь (!) ошибок. При условии того, что диагональный метод является несущей конструкцией канторовской теории, остается загадочным длительное молчание математики о столь фундаментальном дефекте в ее идейных основах» (см. [23, с. 120]).

Перечисление дефектов теории множеств Кантора, их следствий в современной математике и параллелей с аналогичными проблемами в физике можно существенно продолжить. Затронутый здесь пласт серьезных метафизических проблем подлежит более глубокому обсуждению профессиональных (философствующих) математиков. Здесь же изложен взгляд физика-теоретика, при этом опирающегося на высказывания самих математиков.

§ 7. Заключение

Анализ развития фундаментальной теоретической физики XX в. убедительно показывает главную тенденцию — переход от трюичной редукционистской физической картины мира начала XX в. (в рамках триалистической парадигмы) через три вида дуалистических метафизических парадигм (теоретико-полевой, геометрической и реляционной) к искомой монистической парадигме [24, 25, 26]. Приведенные выше доводы показывают, что наиболее перспективной для решения данной задачи представляется реляционная парадигма, опирающаяся на бинарные системы комплексных отношений. Кроме отмеченных выше доводов, в пользу данного утверждения говорит тот факт, что искомая единая обобщенная категория, согласно метафизическому принципу тринитарности, должна быть триединой, что автоматически заложено с теории бинарных систем комплексных отношений. Она опирается на два множества элементов, которые связаны между собой отношениями. Легко видеть, что из трех сторон (составляющих) бинарной системы отношений невозможно исключить ни одну из них, поскольку в любом из этих случаев система теряет смысл.

Не исключено, что осуществление данной программы в физике может помочь в решении принципиальных проблем и в математике.

В связи с этим следует еще раз подчеркнуть, что русские философы «серебряного века» (В. С. Соловьев, С. Н. Булгаков, А. Ф. Лосев и другие) также стремились к холизму, т. е. к построению теософии как системы единого знания, которое им виделось в виде единения теологии, философии и положительной науки. При этом Соловьев полагал, «что достигнуть искомого синтеза можно, отправляясь от любого из его членов. Ибо как истинная наука невозможна без философии и теологии так же, как истинная философия без теологии и положительной науки и истинная теология без философии и науки, то необходимо, чтобы каждый из этих элементов, доведенный до истинной своей полноты, приобретал синтетический характер и становился цельным знанием» [4, с. 266]. Далее Соловьев делал упор на достижение полноты со стороны философии, выделяя в ней также три стороны в виде мистики, рационализма (идеализма) и эмпиризма (материализма).

Осмелимся выразить сомнение в возможности достижения системы единого знания со стороны теологии или философии. Есть все основания полагать, что эта задача может быть решена «положительной наукой», в которой, как уже отмечалось выше, также выделяются три стороны, среди которых назывались физика, метафизика и математика. Изложенное выше можно понимать, как путь к единой теории со стороны фундаментальной теоретической физики с использованием адекватного математического аппарата.

Литература

1. Френкель Я. И. Право на метафору //Химия и жизнь (электронное издание). Вып. 2, 1995, с. 16–19.
2. Арнольд В. И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры // Успехи физических наук, т. 169, № 12, 1999. (См. с. 85–89 настоящего Альманаха.)
3. Миронов В. В. Становление и смысл философии как метафизики // Альманах «Метафизика. Век XXI». Вып. 2. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 18–40.
4. Соловьев В. С. О трех типах философии // Альманах «Метафизика. Век XXI». Вып. 3. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010, с. 266–280.
5. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. — М.: ИЛ, 1963.
6. Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.
7. Владимиров Ю. С. Метафизика. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
8. Владимиров Ю. С. Основания физики. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
9. Эйнштейн А. Автобиографические наброски //Собрание научных трудов. Т. 4. — М.: Наука, 1967, с. 350–356.
10. Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. — М.: Эдиториал УРСС, 2004.
11. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
12. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. — М.: Мир, 1972.
13. Мах Э. Познание и заблуждение. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
14. Фейнман Р. Нобелевская лекция «Разработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте». // Р. Фейнман. Характер физических законов. — М.: Мир, 1968, с. 193–231.
15. Hoyle F., Narlikar J. V. Action at a distance in physics and cosmology. — San Francisco: W. N. Freeman and Comp., 1974.
16. Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур (Дополнение Г. Г. Михайличенко). — Новосибирск: Изд-во Новосиб. Гос. Ун-та, 1968.
17. Михайличенко Г. Г. Математический аппарат теории физических структур. — Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайского ун-та, 1997.
18. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
19. Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств. — М.: Мир, 1983.
20. Колмогоров А. Н. Бесконечность //Математическая энциклопедия. — М.: 1977.
21. Вейль Г. Континуум. Математическое мышление. — М.: Наука, 1989.

22. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. — М.: Наука, Т. 1, 1979.
23. Вёкшенев С. А. Математика и физика пространственно-временного континуума //Сб. «Основания физики и геометрии». Вып. 1.— М.: Изд-во РУДН, 2008.
24. Владимиров Ю. С. Между физикой и метафизикой. Книга 1: Диамату вопреки.— М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
25. Владимиров Ю. С. Между физикой и метафизикой. Книга 2: По пути Клиффорда—Эйнштейна.— М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
26. Владимиров Ю. С. Между физикой и метафизикой. Книга 3: Геометрическая парадигма: испытание временем.— М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.



Фоменко А. Т.
Пуп Земли

Концепция двух миров

Ю. И. Кулаков¹⁾

Философия, методология и основания науки подобны кустам роз: они способны доставлять наслаждение, когда за ними ухаживают, и становятся неприятными и колючими, когда ими не занимаются [1].

Марио Бунге

1. Материалистическая модель Вселенной

Я вынужден обратиться к поставленным еще в античности проблемам строения материи и сущности физических законов, так как развитие современной физики существенно изменило наши представления о природе и структуре материи. Особенно остро встал вопрос о модели Вселенной²⁾ в связи с созданием теории физических структур [2, 3], главная задача которой — подвести надежный фундамент под всю современную физику.

Мы знаем — нашим чувствам открывается многообразный постоянно изменяющийся мир явлений. Тем не менее мы уверены, что существует возможность свести его к какому-то одному общему принципу.

Характерной особенностью античного мышления было то, что первые философы искали «материальную причину» всех вещей (ср. лат. *materia* — вещь), материал (первоматерию), из которого «вылеплены» все предметы. На первый взгляд, это представляется совершенно естественной отправной точкой для объединения окружающего нас мира. Другими словами, кажется вполне естественным связать нашу надежду на простоту, лежащую в основе явлений, с некоторой «первосубстанцией». При этом возникает вопрос — в чем же состоит простота первосубстанции?

Простота и несомненное достоинство идеи первосубстанции состояли в атомистической гипотезе, выдвинутой Левкиппом (500–440 до н. э.) и Демокритом (460–370 до н. э.), согласно которой все вещи существуют лишь постольку, поскольку они состоят из мельчайших, далее неделимых частиц — атомов. Существенно, что атом признавался вечным и неразрушимым, т. е. подлинно сущей «первосубстанцией».

Открытие атомистического строения вещества явилось величайшим событием в истории естествознания. Триумфом этой материалистической модели вещества стало создание в конце XIX — самом начале XX в. статистической физики, когда вообще даже и не возникало вопросов о том, что такое атом и что значит «состоять из ...».

¹⁾Юрий Иванович Кулаков (1927 г. р.) — кандидат физико-математических наук, профессор Новосибирского и Горно-Алтайского государственных университетов.

²⁾Здесь под Вселенной мы будем понимать весь вещественный мир, бесконечный или конечный в пространстве и во времени, и бесконечно разнообразный по тем формам, которые принимает материя в процессе своего развития.

Это был апофеоз материализма, и Ричард Фейнман в своих лекциях по физике говорил по этому поводу: — «Если бы в результате какой-то мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение, составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это — атомная гипотеза (можете назвать ее не гипотезой, а фактом, но это ничего не меняет): все тела состоят из атомов — маленьких телец, которые находятся в непрерывном движении, притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотно прижать к другому. В одной этой фразе, как вы убедитесь, содержится невероятное количество информации о мире, стоит только лишь приложить к ней немного воображения и чувств соображения» [4].

И тем не менее факт атомистического строения вещества не разрешил проблему первосубстанции. Оказалось в конце концов, что атом в свою очередь имеет сложное строение, а его свойство «неделимости» оказалось лишь физическим, а не фундаментальным.

«В таком случае, — пишет Вернер Гейзенберг, — можно вновь поставить вопрос о структуре атома, рискуя при этом утратить ту самую простоту, которую мы надеялись обрести с помощью понятия мельчайших частиц материи. Создается впечатление, что атомистическая гипотеза в ее первоначальной форме — еще недостаточно тонка, чтобы объяснить то, что в действительности стремились понять философы: простое начало в явлениях и в материальных структурах [5]».

Заметим, что необходимо отличать материальные объекты (предметы, вещи), которые уникальны и неповторимы, от абстрактной категории материи, понятие которой еще нужно определить. Именно конкретные *материальные объекты*, а не абстрактная категория материи, действуют на наши органы чувств, даны нам в ощущениях, существуя независимо от нашего сознания.

2. Что же такое материя?

Итак, что же такое материя?

В домарксовском материализме материя часто понималась как некая первосубстанция, из которой «вылеплены» все вещи. Например, многие материалисты XVIII–XIX вв. — философы и естествоиспытатели, определяли материю как совокупность неделимых корпускул (атомов), из которых построен мир. Но с открытием радиоактивности (1896 г.) и электрона (1897 г.) стало ясно, что атом не является вечным и неизменным и поэтому не может играть роль субстрата (носителя) фундаментальных свойств первосубстанции.

Все это потребовало переосмысления понятия материи. Материализму угрожал серьезный кризис. Стремясь вывести материализм из этого кризиса, Ленин решил дать новое определение материи, не связанное с призна-

нием существования достаточно наглядной первосубстанции. Он понял, что бессмысленно определять материю через перечисление ее известных видов и форм или рассматривать некоторые ее виды в качестве последних «кирпичиков» мироздания. Ведь для этого нужно предположить, что такие «первокирпичики» вечны, неизменны и не составлены из других более мелких объектов. Но где гарантия того, что наука не пойдет дальше и не докажет, что и электрон в свою очередь не состоит из частей?

В ответ на подобные сомнения и возник известный ленинский афоризм: — «Электрон так же неисчерпаем, как и атом», — который явился ни чем иным как отказом от субстанциальной модели материи. А что же предлагается взамен?

Остается только один способ определить материю — сформулировать такой предельно общий признак, который годился бы для описания любых форм материи, независимо от того, открыты и познаны они уже или еще не открыты. Другими словами, необходимо сформулировать такой признак материи, который не зависел бы от будущих научных открытий, т. е. представлял бы собой утверждение, которое нельзя было бы ни подтвердить, ни опровергнуть ни с помощью опыта, ни с помощью логического анализа.

Такой общий признак был найден:

«Материей называется все то, что является объективной реальностью и существует независимо от нашего сознания» [6].

Но под такое всеядное определение материи с успехом может подойти и закон Ньютона, и понятия пространства и времени, и даже абсолютная идея Гегеля, — все они в рамках соответствующих парадигм объективно существуют и не зависят от нашего сознания. Очевидно, что такое бессодержательное определение материи говорит лишь о ее бесплодности. Что же касается другого ленинского определения материи:

«Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от нашего сознания» [12],

то здесь уместно поставить вопрос: о чем идет речь?

Если речь идет об абстрактной категории материи, то она, естественно, не может действовать на наши органы чувств; если же речь идет о конкретных материальных объектах, то причем здесь абстрактное понятие материи. (На наши органы чувств действует конкретный стол, а не абстрактная идея стола.)

Таким образом, закрывая глаза на некоторые несуразности определения материи, можно сделать материалистическую модель Вселенной неопровержимой, заранее объявляя любое естественно-научное открытие новым «доказательством» существования материи. Но нужно ли это?

3. Позиция физиков-материалистов

До сих пор речь шла о философском материализме. Но существует материализм другого рода — стихийный материализм физиков, не склонных углубляться в «дебри философии».

Физиков, в отличие от философов и таких политиков как Ленин, мало интересует вопрос об отношениях материи и сознания. Для них вообще не существует этой проблемы. Ну, конечно, говорят они, материя первична, а сознание, как свойство высокоорганизованной материи — мозга, вторично.

Другое дело — вопрос о существовании элементарных частиц и полей, пространства-времени, с одной стороны, и математических понятий — с другой.

Каждый физик, и вообще любой естествоиспытатель, ни на минуту не сомневается в том, что материальный мир, т. е. мир окружающих нас предметов и мы сами, безусловно существует независимо от нашего сознания и наших ощущений. Что же касается «материи», то физик-материалист понимает материю не как абстрактную категорию, «являющуюся объективной реальностью и существующую независимо от нашего сознания», а как некоторую первосубстанцию в духе конца XIX в., как некий универсальный материал, из которого сделаны элементарные частицы. Согласно укоренившемуся мнению эта субстанция может находиться в двух формах: в форме *частиц* и в форме *полей* [7].

Однако замена понятия материи на понятия частицы и поля не снимает вопроса о первосубстанции, лежащей в основании мира.

Можно ли утверждать, что таким субстратом по-прежнему является материя в виде элементарных частиц и полей? Не являются ли они в свою очередь следствием чего-то еще более фундаментального, составляющего подлинную первооснову мира?

Если это так, если сами элементарные частицы и поля, представляющие собой последние наглядные образы неопределенной «материи», являются проявлением некоторой высшей Реальности, то можно сказать, что от содержательного ранее понятия материи осталась лишь пустая и высохшая оболочка, а родившаяся при этом из неподвижной куколки великолепная бабочка — *Физическая структура* благополучно приобретает новую форму существования, но уже совсем в ином качестве.

Нужно признать, что физика XX в. уже давно требует радикального пересмотра понятия материи. И если речь заходит о первоосновах Бытия, то такой пересмотр становится совершенно неизбежным.

И нам остается лишь удивляться прозорливости слов Владимира Соловьёва (1853–1900), высказанных им свыше ста лет тому назад в 1899 г. в предисловии к книге Ф. Ланге «История материализма и критика его значения в настоящем»:

«Материализм как низшая элементарная ступень философии имеет всегдашнее прочное значение, но как самообман ума, принимающего эту низшую ступень за всю лестницу. Материализм, естественно исчезает при повышении философских требований, — хотя, конечно, до конца истории будут находиться умы элементарные, для которых догматическая

метафизика материализма останется самой собственной философией. По природе для ума человеческого привлекательна только истина. От древности и до наших дней начинающие философствовать умы пленяются заключенной в материализме истиной — единой основой всякого бытия, связывающей все вещи и явления, так сказать, снизу — в темной, бессознательной, „стихийной“ области. Но материализм не останавливается на признании этой истины, а также не ставит ее логическое развитие как свою дальнейшую задачу; вместо этого он сразу, априори, признает материальную основу бытия саму по себе за всецелое и безусловно достаточное начало мирового единства, т. е. допускает как самоочевидную истину, что все существующее не только связано общей материальной основой (в чем, он прав), но еще и то, что все в мире только ею, только снизу и может объединяться, а все прочие начала и стороны всемирного единства суть только произвольные фикции. А затем, упростив таким образом общую задачу миропонимания, материализм естественно обнаруживает тенденцию упростить до крайности и самое содержание в представлении о единой основе бытия. С теоретической стороны все сводится окончательно к совокупности простейших телец — атомов, с практической — к действию простейших материальных инстинктов и побуждений. Ясно, что этим могут удовлетвориться лишь простейшие умы» [8].

Итак, понятие материи, в конце концов, оказалось малоэффективным. Оно сыграло свою положительную роль при построении классической физики, но наступил момент, когда представление о материи становится тормозом на пути познания природы. Но «всякое дерево, не приносящее доброго плода срубают и бросают в огонь» (Мат. 3, 10).

4. На подступах к миру высшей Реальности

Итак, имеется хорошо известный нам еще с самого раннего детства мир материальных объектов — вещей, явлений, событий, состояний с его быстро текущим временем, с движением и беспрестанной сменой состояний, с рождением, эволюцией и смертью, с множеством ничем не связанных вещей, где нет ничего ни постоянного, ни вечного, про что мы могли бы сказать нечто определенное. Это тот самый мир эмпирической действительности, о котором говорил Гераклит, в котором все находится в непрерывном движении и изменении, когда не за что ухватиться, где все ускользает из рук, переходя из одного состояния в другое, где, словом, нет *бытия*, а есть лишь *становление*.

Считать все это реальностью так же бессмысленно, как принимать изображение на экране телевизора за подлинно существующие объекты. Подлинная реальность, если существует где-нибудь, то не здесь, в этом калейдоскопе вечно мелькающих и куда-то несущихся явлений и фактов, где все становится, но не есть.

Но подлинная Реальность существует, ибо нельзя принимать только за иллюзию весь этот калейдоскоп, субъективно воспринимаемый нашими органами чувств.

Что же стоит за субъективно воспринимаемым миром материальных объектов?

Найти эту объективно существующую невидимую и неосязаемую Реальность — и составляет высшую задачу Науки.

Прежде всего попробуем хотя бы поставить вопрос: *что такое физика? что является предметом ее изучения?*

В качестве первой попытки ответить на этот непростой вопрос дадим следующий ответ:

Предметом изучения физики являются, вообще говоря, не отдельные материальные объекты, а общие свойства множеств, объединяющих в себе различные физические объекты одной и той же природы.

Имеются в виду множества реальных проводников и источников тока, множество событий, множество различных состояний реальных термодинамических тел и т. п.

В самом деле, представим себе совокупности вещей, событий, состояний, которые, несмотря на все свое внешнее разнообразие, содержат в себе некоторые общие свойства, присущие всем входящим в данную группу материальным объектам.

Это общее «нечто», которое характеризует не отдельный материальный объект, а все множество, элементом которого он является, называется *структурой* данного множества.

Чтобы определить структуру на некотором множестве M , необходимо задать одно или несколько *отношений*, в которых находятся элементы этого множества, а затем наложить на эти отношения некоторые условия, играющие роль исходных аксиом.

Эти абстрактные понятия, в отличие от самих материальных объектов, нельзя ни пощупать, ни увидеть. И тем не менее именно они, как мы увидим в дальнейшем, являются предметом изучения физики.

Итак, в качестве второй попытки ответить на вопрос, что является предметом изучения теоретической физики, является следующий ответ:

предметом изучения теоретической физики являются структуры, определенные на множестве реальных физических объектов.

Первоначально, на самом первом этапе создания теории физических структур, предполагалось, что речь идет о реальных физических объектах окружающего нас материального мира.

Так, например, говоря о законе Ома, мы говорили, — рассмотрим множество проводников $M = \{i, \kappa, \dots\}$ и множество источников тока $N = \{\alpha, \beta, \dots\}$, понимая под i — реальный проводник, а под α — реальный источник тока.

Однако впоследствии, после введения фундаментального для всей физики понятия «метаморфии», выяснилось, что так называемые «холотропные» отношения между объектами материального мира описываются не непосредственно, а *опосредовано*, через «холотропные» отношения между

идеальными, более первичными и фундаментальными, *субэйдосами*¹⁾ i и α — прообразами материальных объектов $[i]$ и $[\alpha]$.

Чтобы подвести надежный фундамент под всю современную теоретическую физику, необходимо отделить фундаментальное для всей физики понятие *структуры* от всего внешнего и случайного. Для этого введем еще одно важное понятие — *метаморфию*.

5. Структура и метаморфия — фундаментальные естественно-научные категории

Вопрос об абстрактной структуре, — реально существующей, наиболее устойчивой характеристике мира, является чрезвычайно важным для понимания строения физики в целом и тенденций ее развития. Поэтому следует остановиться на нем более подробно.

Мир как единый Универсум предстает перед нами как нечто объективное, независимое от нашего сознания. Утверждение, что его первооснову составляет материя, является неконструктивным и ничего не дает для понимания его строения как единого целого.

Иное дело, если рассмотреть две сущности — *структуру* и *метаморфию*, находящиеся по отношению друг к другу в глубоком противостоянии.

Итак, что такое структура и метаморфия?

Мы считаем, что каждый предмет, каждое явление, весь мир в целом есть единство двух дополнительных друг к другу, противоположных начал. Первое начало мы будем называть *структурой*, а второе — *метаморфией*.

Развивая приведенные выше определения структуры и метаморфии, подчеркнем, что под структурой мы в общем случае понимаем то, что выражая идею необходимости, регулярности и общезначимости, составляет универсальную сущность любого закона.

Что же касается метаморфии (от греч. «мета» за, после; «морфо» — форма), то буквально это слово означает «за формой», т. е. то, что лежит за пределами формального, регулярного, упорядоченного или, другими словами, все неформальное, нерегулярное, неупорядоченное. Таким образом, метаморфия, в противоположность структуре, выражает идею всего случайного, неповторимого, индивидуального, т. е. всего того, что в принципе не подчиняется никакому закону и не может быть втиснуто в его жесткие рамки.

Но и эти определения не являются полными — они отражают лишь наиболее существенные свойства структуры и метаморфии. Для того чтобы более полно выразить то, что следует понимать под структурой и метаморфией, мы выпишем в два параллельных столбца различные частные формы их проявления, лишь всей своей совокупностью достаточно точно отражающие наиболее глубокий смысл и содержание рассматриваемых категорий.

¹⁾ Чтобы подчеркнуть отличие идеальных объектов, являющихся прообразами неощущенных физических объектов материального мира, от самых общих платоновских «эйдосов», мы будем называть эти идеальные сущности *субэйдосами*.

*Частные формы проявления структуры и метаморфии*СТРУКТУРА

Необходимость
 Закономерность
 Порядок
 Регулярность
 Симметрия
 Однообразие
 Повторяемость,
 воспроизводимость
 Стабильность, устойчивость
 Универсальность,
 общезначимость,
 всеобщность
 Общие принципы
 Равноправие, равенство
 Однородность
 Детерминизм, причинность
 Жесткая связь
 Статичность
 Неизменность, инвариантность
 Непротиворечивость
 Рационализм
 Возможность логического
 вывода и доказательств
 Логика
 Рациональное, бесстрастное
 познание мира
 Возможность унификации
 Точность, четкость,
 ясность,
 Однозначность,
 определенность
 Предсказуемость
 Формальный математический
 язык
 Элементаризм
 (расщепление целого
 на элементы)
 Автомат
 Отчужденные отношения
 между людьми

МЕТАМОРФИЯ

Случайность, спонтанность
 Отсутствие закономерности
 Беспорядок, хаос
 Нерегулярность
 Асимметрия
 Разнообразие
 Неповторимость,
 невоспроизводимость
 Нестабильность, неустойчивость
 Уникальность,
 индивидуальность,
 исключительность
 Частные модели
 Неравноправие, неравенство
 Неоднородность
 Индетерминизм
 Отсутствие жестких связей
 Динамичность
 Изменчивость
 Внутренняя противоречивость
 Иррационализм
 Невозможность строгих
 доказательств
 Интуиция
 Эмоциональное восприятие
 и художественное видение мира
 Невозможность унификации
 Неточность, расплывчатость,
 туманность
 Неоднозначность,
 неопределенность
 Непредсказуемость
 Естественный язык, язык искусства,
 язык поэзии, язык притч
 Холизм (рассмотрение предмета
 или явления как единого
 неделимого целого)
 Личность
 Личностные отношения между
 людьми

Такой способ введения категорий *структуры* и *метаморфии* гораздо ближе древнеиндийской традиции с ее резко выраженным полиморфизмом языка, когда одно и то же слово часто употребляется в различных смыслах, нежели европейской традиции, требующей чтобы слова обладали точным смыслом. Но оказывается, что некоторая неясность тоже может быть полезной. Слово, содержащее некоторую неточность, неопределенность, многозначность, подобно сосуду, заполненному не до самого верха: в зависимости от контекста это слово может приобретать различные смысловые оттенки.

Основной смысл слов структура и метаморфия — это соответственно порядок и хаос. Однако помимо этих главных значений категории структура и метаморфия имеют целый спектр дополнительных значений и оттенков. Как видно из приведенного, далеко не полного, списка их частных проявлений, категории структура и метаморфия проявляют себя в самых различных сферах бытия, начиная с абстрактных (случайность и необходимость) и кончая конкретными (симметрия и асимметрия).

Чтобы лучше понять, какое значение имеют структура и метаморфия при построении единой картины мира, попытаемся представить себе некоторый гипотетический мир лишенный структур.

Вот как выглядел бы мир, в котором отсутствует структура. В этом мире все находится в непрерывном движении, изменении и развитии. В нем всегда что-то возникает и уничтожается; каждый его объект индивидуален, единственен в своем роде, каждое его состояние неповторимо, отлично от любого предыдущего и от любого последующего. Именно к такому миру относятся известные слова Гераклита: «Нельзя дважды войти в одну и ту же реку». Здесь нет ни постоянства, ни повторяемости, здесь нет ничего инвариантного и сохраняющегося. Лишите универсум структуры и перед вами предстанет мир случайных фактов, не обладающих ни внутренним смыслом, ни онтологическим единством; вы увидите лишь хаотическое многообразие форм, их непостижимую сложность, удручающую бессмысленность и непрерывное изменение, развитие, движение без какой-либо тенденции к повторяемости.

Таким видит мир человек, стоящий на позициях крайнего эмпиризма, сводящего процесс познания действительности к чисто эмпирическому описанию. Отсутствие структуры сделало бы невозможным описание такого мира в точно определенных терминах. Понятия, возникающие при его описании, носили бы, по существу, неэксплицитный, расплывчатый характер и не допускали какой бы то ни было формализации. Образно говоря, мир без структуры — это мир без формы.

Но так же, как не может вырасти лес из одних только вяющих растений, так и наука не смогла бы подняться над уровнем чистого эмпиризма, если бы в мире отсутствовала структура.

Но к счастью, мир наделен не только метаморфией, но и структурой. Это значит, что в разнообразии многих вещей, фактов и явлений содержится нечто единое, общее, целое, что за самыми сложными явлениями стоят удивительно простые и совершенные законы. Наличие структуры позволяет

увидеть в непрерывно изменяющемся мире нечто устойчивое, постоянное, сохраняющееся, инвариантное относительно способа наблюдения. Структура наполняет мир в целом и каждое явление в отдельности неким высоким смыслом, проявляющим себя в существовании определенной организации, четких законов, точной симметрии. Именно структура вносит в наш мир красоту и совершенство, гармонию, единство и мудрый порядок.

Но когда речь идет о существующей физической картине мира, необходимо пойти на некоторое умышленное огрубление действительности путем сознательного преувеличения роли структуры по сравнению с метаморфией. В этой идеализированной физической картине мира нет места неповторимой индивидуальности; здесь даже человеческая личность — это лишь «винтик» функционирующего сложного общественного механизма.

Поэтому нельзя забывать о том, что пренебрегая метаморфией, мы исключаем из рассмотрения нечто весьма существенное и чрезвычайно нам важное. Вот что писал по этому поводу Герман Вейль, один из крупнейших математиков XX в.: *«Если бы все в природе было закономерно, то в каждом явлении находила бы отражение полная симметрия всеобщих законов природы. Уже сам факт, что дело обстоит совсем не так, доказывает, что случайность является существенной особенностью нашего мира»* [9].

Томас Манн в романе «Волшебная гора», описывая снежную метель, высказывает близкую мысль: *«Каждое из этих студеной творений было в себе безусловно пропорционально, холодно симметрично, и в этом, заключалось нечто злое, антиорганическое, враждебное жизни; слишком они были симметричны, такую не могла быть предназначенная для жизни субстанция, ибо жизнь содрогается перед лицом этой точности, этой абсолютной правильности, воспринимает ее как смертоносное начало, как тайну самой смерти. И Гансу Кастропу показалось, что он понял, отчего древние зодчие, воздвигая храмы, сознательно, хотя и втихомолку, нарушали симметрию в распорядке колонн»* [10].

Мир, лишенный подвижной метаморфии, предстает перед нами как нечто застывшее и статическое, схематическое и идеальное. В этом мире царствуют Закон, Симметрия и Необходимость, не допускающие никаких исключений. Здесь нет места для Случайности, ибо каждое случайное событие рассматривается как проявление еще не познанного закона, открытие которого полностью уничтожает эту «мнимую» случайность, заключая ее, в крайнем случае, в рамки вероятностных законов. Здесь осуществляется абсолютная формализация знаний на основе некоторого формализованного языка, заменяющего наш обычный разговорный язык. При этом каждое понятие, каждый термин допускают строгую экспликацию, и все рассуждения, в конце концов, сводятся к построению определенных комбинаций логических знаков и букв.

Ясно, что этот мир структур, мир, лишенный метаморфии, представляет собой лишь прообраз мира материальной действительности, в котором мы живем. Но разве понимание этого может уменьшить восхищенное преклонение перед естественно-научными дисциплинами, и в первую очередь, перед

теоретической физикой и математикой, почти целиком основанными на понятии структуры и представляющими могущественное средство познания мира.

Итак, с учетом сделанных выше замечаний, вещественный мир — это мир материальных объектов, воспринимаемых через узкую щель наших ощущений. С другой стороны, его прообраз — мир высшей Реальности — это мир реальных структур, воспринимаемых нашим сознанием как глубинный смысл, как первичные принципы и законы, как симметрия, как красота и гармония нашего мира.

Структуры, в отличие от чувственно воспринимаемых предметов не действуют на наши органы чувств. Их, естественно, нельзя ни увидеть, ни потрогать рукой, они не могут быть зарегистрированы приборами, и тем не менее, *они существуют объективно*, независимо от личности исследователя и являются наиболее устойчивыми характеристиками нашего мира. Они существуют объективно — их можно изучать, классифицировать, устанавливать между ними многочисленные связи. Они не являются свободным порождением человеческого разума; их нельзя придумать, их можно только открыть, подобно тому, как мы открываем новые элементарные частицы.

В отличие от туманных, расплывчатых, неэксплицитных мыслей и чувств, постоянно возникающих в человеческом мозгу, структуры находятся в своеобразном соответствии с определенными предметными носителями — математическими символами и приобретают благодаря этому необыкновенную устойчивость, допуская осуществление строгой экспликации.

Таким образом, несмотря на свое происхождение в идеальном мире высшей Реальности, структуры стоят гораздо ближе к «приземленному» миру материальной действительности, нежели к таким, сугубо интеллектуальным сферам проявления человеческого интеллекта, как эстетические и нравственные переживания.

Признание объективного существования структуры и метаморфии позволяет несколько смягчить правила мышления, увидеть те естественные границы, за пределами которых абстрактное мышление и научные методы теряют свою силу. *«Мы должны также заботиться о том, — пишет Макс Борн, — чтобы абстрактное мышление не распространялось на другие области, в которых оно неприменимо. Человеческие и этические ценности не могут целиком основываться на научном мышлении. ... Сколь ни привлекательно для ученого было бы абстрактное мышление, какое бы оно ему ни приносило удовлетворение, какие бы ценные результаты оно ни давало для материальных аспектов нашей цивилизации, чрезвычайно опасно применять эти методы там, где они теряют силу, — в религии, этике, искусстве, литературе и других гуманитарных сферах человеческой деятельности. Таким образом, совершая экскурс в философию, я намеревался не только осветить основы науки, но и выступить с предостережением о разумном ограничении применения научных методов»* [11].

Сфера метаморфии не имеет непосредственного отношения ни к законам, ни к общезначимым истинам; это просто та составляющая действительного

мира, которая в принципе не может быть описана на строгом, двузначном, истинноложностном научном языке, это неизбежная составляющая тех объективно существующих явлений, описание которых возможно только на интуитивно-умозрительном языке, на языке размытых, многозначных и самопротиворечивых понятий. В сфере метаморфии нет ни законов, ни понятий с фиксированным значением, здесь не возникает вопросов об «истинности» или «ложности» тех или иных утверждений. Область метаморфии — это, кроме всего прочего, область человеческих эмоций — нравственных, эстетических, религиозных переживаний, это область самопротиворечивых, неоднозначных, но практически полезных правил ориентировки человека в действительном мире. Здесь главное — не поиски истины, а создание определенной атмосферы, определяющей индивидуальное отношение человека к миру. Жесткое научно-аналитическое мышление, оперирующее со структурами, и более смягченный интуитивно-умозрительный, синтетический способ видения мира, имеющий дело с метаморфией, являются дополнительными друг к другу и лежат в основании двух великих культур — научной и гуманитарной, взаимопроникающих и обогащающих друг друга.

6. Мир высшей Реальности

С самого начала мы исходили из того, что объективно существующий мир не исчерпывается миром эмпирической действительности, физическим миром, воспринимаемым нашими органами чувств.

Необходимо признать существование другого, гораздо более информационно емкого мира — мира высшей реальности, тенью которого (в платоновском смысле) и является вся наша видимая Вселенная.

Необходимо легализовать запрещенный во времена господства диалектического материализма необыкновенно богатый и глубоко содержательный мир высшей Реальности. Его признание расчистило бы многовековые завалы на пути истинного объединения науки, философии и теологии и явилось бы первым шагом к духовному обновлению науки вообще и физики, в частности.

Философия впала в наивный «объективный» рационализм и непомерно сузила границы познания, сведя его к одному из частных его проявлений — научному познанию.

Физика заново открыла то, о чем с самого начала догадывались античные философы две с половиной тысячи лет тому назад, а именно, что **все сущее состоит из двух тесно связанных между собой миров, один из которых ненаблюдаемый мир высшей Реальности является прообразом другого мира — видимого и осязаемого мира материальных объектов.**

Итак, физический мир, в котором мы живем и который воспринимается нашими органами чувств, является чем-то вторичным, производным от более фундаментального мира высшей Реальности, объективно существующего независимо от нашего сознания.

7. О возрождении «линии Платона»

На рубеже нового XXI в. мы становимся невольными свидетелями того, что все современное естествознание и, прежде всего теоретическая физика, биология и психология, не желая открыто признаться в этом, однозначно свидетельствуют о завершении «линии Демокрита» и возрождении живой и плодоносящей «линии Платона», приводящей к созданию взаимосогласованной научно-теологической картине мира.

Настало время и для физиков-теоретиков честно признать, что «линия Демокрита» с ее наглядной линейной последовательностью: тела — молекулы — атомы — нуклиды — адроны (барионы и мезоны) — кварки и лептоны — лептокварки (?) — как глобальная идея по большому счету исчерпала себя. Необходимо вернуться к гораздо более информационно емкой, хотя и более абстрактной и потому менее наглядной линии Платона.

Согласно гениальному предвидению Платона подлинную основу мироздания составляют не поля и элементарные частицы, а более первичные, более фундаментальные и более абстрактные сущности — *структуры*, объективно существующие в *мире высшей Реальности*.

Литература

1. Бунге Марио. Философия физики. — М.: Прогресс, 1975, с. 15.
2. Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968, 226 с.
3. Михайличенко Г. Г. Математический аппарат теории физических структур. — Горно-Алтайск: Изд-во ГАГУ, 1997, 144 с.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. I, — М.: Мир, 1965, С. 23.
5. Гейзенберг В. Понятие материи в античной философии // Мир философии. Часть I. — М.: 1991, с. 274.
6. То же Гейзенберг В. Шаги за горизонт. — М.: Прогресс, 1987, с. 110–111. То же Heisenberg W. Schritte über Grenzen. Munchen, 1977.
7. Введение в философию. Часть 2. — М.: Политиздат, 1989, С. 52.
8. Владимиров Ю. С. Фундаментальная физика и религия. — М.: Изд-во Архимед, 1993, с. 55.
9. Соловьёв В. Предисловие. // Ф. Ланге. История материализма и критика его значения в настоящем. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
10. Вейль Герман. Симметрия. — М.: Наука, 1968, с. 56.
11. Манн Томас. Собрание сочинений, Т. IV. — М.: Гослитиздат, 1959, с. 193–194.
12. Борн Макс. Моя жизнь и взгляды. — М.: Прогресс, 1973, с. 128–129.
13. Ленин В. И. Собрание сочинений, 4-е издание, 1952. Т. 14, с. 117.



Фоменко А. Т.
Критические невырожденные многообразия гладких функций

Метафизика времени и реальности

А. К. Гуц¹⁾

Разбежавшись в мыслях,
не наткнись на реальный мир.

Борис Андреев,
киноактер.

Мир сделан из элементарных частиц, они образуют атомы, атомы складываются в молекулы, из молекул состоят вещи, а вещи бывают жесткими и твердыми, как бетонная стена. И нельзя пробиться сквозь эту стену, если сильно разбежаться и налететь на нее, потому что она *реальная*, а не во сне, не на экране кино или не порождена с помощью компьютерных технологий.

Сказанное есть *истина*. Ею овладевает каждый человек, и не знает разве маленький ребенок. Внешнему Миру нет дела до нашего Я, он существует сам по себе, независимо от наших желаний, он самодостаточен и в силу этого *реален*.

Думать так — значит быть реалистом, стоять на реальной почве и отдавать себе отчет в тщетности наших фантазий и умонастроений. Попытки подвергнуть нарисованную картину Мира, подобные, скажем, антропному принципу, наивны и идеалистичны.

Тем не менее, всегда есть смысл «разбежаться в мыслях» и воспарить над нарисованной классической картиной реального мира и вновь задаться вопросами об устройстве Мира.

§ 1. Реальный мир (реальность)

Объективность окружающего мое Я Мира понимается как *то*, что вне меня, вне моего осознания факта присутствия моего Я в *Мире*, во Вселенной, независимо от того, что это Я воспринимаю Мир, существуют вещи в Мире, отличные от меня, моего сознания, моего тела, моих мыслей и желаний.

И то, что я должен считаться с тем, что есть вещи вне меня, независимые от меня и могущие принести мне вред или пользу подчас вопреки моим мыслям и желаниям²⁾, есть то, что называется *реальностью* вещей вне меня, есть *реальный мир*.

¹⁾Александр Константинович Гуц, (1947 г. р.) — доктор физико-математических наук, профессор факультета компьютерных наук Омского государственного университета, 644077 Омск, Россия guts@omsu.ru

²⁾С Миром во сне мы не считаемся, его вызовы нам не страшны. И это часто мы осознаем прямо во время сна, когда сталкиваемся с опасностью или с нежелательным в ходе сна.

Считается, что реальный мир появился задолго до появления человека, эволюционирует по определенным естественным законам и никоим образом не может быть существенно подвергнутым изменениям по воле людей. Люди могут, конечно, воздействовать на мир через материальную деятельность и только через нее. Мысли людей способны разбегаться до любых фантазий, но далеко не все из них способны к воплощению в форме материальных, реальных вещей в реальном мире.

Человек познающий *отражает* в своем сознании реальный мир, описывает его в формальных терминах, и если эти описания научны, то могут материализоваться. Научны те описания, которые: 1) следуют определенной логике, 2) опираются на опытные данные и проверяются в опыте.

Если следовать только логике, то такие описания не всегда будут подтверждены в опыте, даже если опираются на опытные данные. (Поскольку опытные данные имеют свой уровень достоверности, связанный с недостаточной точностью измерения.)

При этом реальный мир существует в формах пространства и времени. Реальность состоит из *вещей*, и вещи находятся в *пространстве*. Пространство дает место вещам!

И так было до появления человека, и так будет после его исчезновения.

Таковы в кратком изложении постулаты классической метафизики.

К ним следует добавить следующее:

1. Мысль, осознаваемая и рожденная разумом, не может быть воплощена в неживом реальном мире, называемом Природа, материализоваться, иначе как через материальную деятельность.

2. Мысль, осознаваемая и рожденная разумом, может быть воплощена в социальном реальном мире, материализоваться, через слова, которые способны привести к активности людей, называемой материальной деятельностью.

3. Формальные (математические) теории не применимы, как правило, к описанию социальной активности. (Физические поля реальны, а социальные поля, ментальные (психические) поля — это безграмотное перенесение понятий науки физики из сферы Природы в сферу Общества, и поэтому они *нереальны*.)

1.1. О реальности пространства-времени

Теория относительности в изложении Минковского связала пространство и время в единое целое. И хотя классическая метафизика считает реальными и пространство, и время, она не спешит объявлять столь же реальным объединенное пространство-время, которое сам Минковский называл миром событий.

Дело в том, что наше *обыденное* восприятие Мира событий Минковского реальным считает лишь то, что лежит в окружающем нас *пространстве*.

Более того, это обыденное восприятие находит опору в знаниях, во всех институтах системы образования, основанной на стереотипах аристотелево-ньютоновской физики¹⁾. Поэтому нашему сознанию претит мысль о реальности абсолютного Мира событий, об объективности, реальности пространства-времени.

Этому способствует скудность доводов, имеющихся в распоряжении исследователей и преподавателей, в пользу реальности Мира событий Минковского.

Существует, по сути дела, четыре аргумента в пользу утверждения об объективности, реальности пространства-времени, т. е. о таком же существовании пространства-времени как вещи, подобному тому, как существует вещь, называемая столом и на котором пишутся эти строки.

Перечислим эти аргументы:

- реальность Мира событий как следствие относительности одновременности (Пуанкаре, Минковский);
- реальность Мира событий как следствие асимметрии во времени и в пространстве (Флоренский, [1]);
- реальность Мира событий как проявление инерции тел (Petkov, [2]);
- реальность Мира событий как проявление гравитации;
- реальность Мира событий как экспериментальный факт (Козырев, [3]).

Как видим, немного. Причем не все из них убедительны для каждого физика.

Среди перечисленных аргументов, самым весомым считается первый — относительность одновременности.

§ 2. Время

Одновременность — это то, что находится в *пространстве* в тот же *миг*, что и Я. Одновременность неотъемлема от осознания мира событий сознанием, т. е. осознания присутствия моего Я в пространстве-времени. Собственно сознание — это инструмент осознания (самоосознания).

Осознается прежде всего *присутствие* моего Я в данный *миг* в окружающем *реальном мире*. Реальный мир ощущается миг за мигом, т. е. *во времени*. Последовательность мигов осознания своего присутствия в реальности и есть время.

«Время и реальность нерасторжимо связаны между собой. Отрицание времени может быть актом отчаяния или казаться триумфом человеческой мысли, но это всегда отрицание реальности» [4, с. 222].

¹⁾Исключением не являются физические факультеты университетов, где теория относительности преподносится всего лишь как набор систем отсчета со своими индивидуальными временной и пространственными координатами.

Мое Я знает, что есть миги осознания, которые не повторяются. Их Я называет мигами *Прошлого*. Прошрое, уверено мое Я, находится не в реальности, а в моей *памяти*.

2.1. Повреждения мозга делают реальность вневременной

Я есть вещь в форме тела. Частью моего тела является мозг. В мозгу есть гиппокамп. Выясняется, что «повреждение гиппокампа приводит к нарушению декларативной памяти. Такие больные могут достаточно хорошо усваивать новые сведения, в том числе язык, приобретать сложные двигательные навыки, успешно учиться в школе и иметь высокий интеллектуальный коэффициент. В то же время *они беспомощны в повседневной жизни, так как не помнят последовательности событий, не ориентируются во времени, не могут составить плана на будущее*. Англоязычные авторы говорят при этом о нарушении двух свойств: belongings (принадлежности) и appointments (приурочения события ко времени). Интересно, что данное заболевание проявляется только с 5–6-летнего возраста, т. е. с того момента, когда здоровый человек начинает себя помнить.

В сохранении в памяти последовательности событий важную роль наряду с гиппокампом играет лобная кора. В ней можно выделить три группы нейронов: одни реагируют на действующий сигнал, другие сохраняют его след до того момента, когда необходимо дать поведенческий ответ, и, наконец, третьи включают ответную реакцию. Нейроны разряжаются последовательно и как бы передают эстафету от одной группы к другой. Можно заключить, что «память души», та самая, которую писатель Д. Гранин сравнил с прочитанной книгой, которую можно листать, останавливаясь на нужной странице, обеспечивается взаимодействием лобной коры и гиппокампа»¹⁾.

§ 3. Сознание

Форма сознания, известная нам, — это наше человеческое сознание ℓA . Оно сопряжено с классическим объектом — нашим телом. Следовательно, наш Мир является классическим, поэтому выход за классические пределы невозможен. Поэтому вопреки мнению Уилера пространство-время — это объективная реальность. Но порождается она, как мы попытаемся показать в этой статье, сознанием, точнее, *всем набором индивидуальных сознаний*, сознанием же и воспринимается.

Таким образом, сознание [5, с. 34]:

- 1) созидает миры (пространства-времени) M_α ;
- 2) наблюдает, воспринимает эти миры M_α .

В первом случае созданный мир — это совокупность событий, которые «взаимодействуют», т. е. это мир, наполненный субстанцией. Последнее

¹⁾Иваницкий А. М. Сознание и мозг. URL: <http://www.galactic.org.ua/Prostranstv/nf3.htm>

проявляется в форме искривления пространства-времени. Получаются миры, кривизна которых определяет присущий им причинный порядок. «Созидание миров» — это неизбежное их *ветвление*, т. е. создается сразу множество параллельных миров $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ [6].

В квантовой механике существование множества вариантов параллельных и одинаково реальных миров обнаружил Хью Эверетт [7, 8].

Во втором случае мир наблюдается (воспринимается), т. е. имеет место морфизм вида

$$x : \ell A \rightarrow M_\alpha. \quad (1)$$

Это означает наличие процедуры просмотра событий, принадлежащих миру, т. е. наличие временного порядка. Восприятие мира также ведет к наличию многовариантности [9]:

$$x : \ell A \rightarrow M_\alpha, \quad x : \ell B \rightarrow M_\alpha, \quad x : \ell C \rightarrow M_\alpha, \dots$$

Заявляемое в статье созидание реальности сознанием, для людей, знакомых с историей философии, воспринимается как проявление идеализма. Еще недавно высказывание идеалистических идей в нашей стране считалось идеологически вредным, враждебным для устоев пролетарского государства. Думается, что в науке важен поиск знаний, как тех, которые принесут практические результаты, так и тех, что способствуют пониманию окружающего нас мира. Деление воззрений на идеализм и материализм есть не что иное, как проявление умонастроений XIX в. и отчасти начала XX-го. Мир не белый и не черный, он сложный, и мы сами его постоянно усложняем. Философия Канта, например, ценна именно сложными построениями в понимании мира, поэтому она и притягивает к себе уже двести лет. И нам мало дела до того, являются ли мысли Канта идеалистическими, материалистическими или дуалистическими.

§ 4. О реальности социального и ментального полей

4.1. Что такое поле?

Современная физика не может обходиться без своего фундаментального понятия — *поле*.

«Если бы физики решили написать свою библию, они начали бы ее словами: «Сначала было поле» [10, с. 51].

Для физика поле настолько является «своим», что он с трудом подчас воспринимает употребление этого термина с прилагательным, имеющим нефизическое происхождение. Например, сколь естественны для него понятия «электромагнитное поле», «гравитационное поле», «слабые поля», «ядерное поле», столь же противоестественны для него сочетания слов «социальное поле», «этническое поле», «ментальное поле», употребляемые

в гуманитарных науках. Для физика такие понятия — это всего лишь безграмотные словосочетания, за которыми в реальности ничего не стоит.

Что такое поле? Воспользуемся следующим определением поля, принадлежащим Эйнштейну [11, с. 265]:

Совокупность сосуществующих фактов¹⁾, которые понимаются как взаимозависимые, называется *полем*.

Прокомментируем абстрактное определение поля, данное Эйнштейном, перефразируя другое его утверждение: все факты, взятые вместе, создают в окружающем *жизненном пространстве группы* определенное состояние, которое, в свою очередь, производит характерное воздействие на определенные объекты, появляющиеся в данном жизненном пространстве. Это состояние пространства и есть *социальное поле*.

4.2. О реальности социального поля

Каковы упомянутые объекты, на которые воздействует социальное поле? Это зависит от типа соответствующей социальной системы, для описания свойств которой и привлекается теория поля или полевые модели. К примеру, этническое поле обнаруживается по поведению определенного типа индивидов, называемых в теории этнических систем Л. Н. Гумилёва *пассионариями*. В случае гендерной системы, описывающей процесс образования семьи [12], поле, названное «запахом денег», сказывается на поведении женщин. Другими словами, женщины являются теми «пробными зарядами», которые обнаруживают данное поле.

«Полевая теория, как правило, считает полезным начинать с характеристики ситуации в целом. . . Такой метод предполагает, что существует нечто вроде свойств поля в целом. . . Некоторые из этих общих свойств — например, величина «пространства свободного движения» или «атмосфера дружелюбия» — характеризуются терминами, которые, возможно звучат очень ненаучно для уха человека, привыкшего думать на языке физики. Однако, если этот человек на мгновение задумается о фундаментальном значении, которое имеет поле силы тяжести, электрическое поле или величина давления для физических событий, он будет меньше удивлен, обнаружив похожую значимость проблем атмосферы в психологии. К тому же можно вполне точно определить и измерить психологические атмосферы. . . Каждый ребенок чувствителен даже к небольшим изменениям в социальной атмосфере, как, например, степени дружелюбия или безопасности. Учитель знает, что успех преподавания французского языка или любого предмета в значительной мере зависит от атмосферы, которую он может создать» [11, с. 84].

¹⁾ *Факт* — 1) действительное, невымышленное происшествие, событие, явление; 2) действительность, реальность, то, что объективно существует.

Поле в социологии (и психологии) — это то, что обеспечивает взаимосвязь различных частей *жизненного пространства* изучаемой группы (соответственно: индивида). Жизненное пространство определяется так, чтобы в любой данный момент оно включало все факты, которые обладают существованием, и исключало те, которые не обладают существованием для данной группы индивидов. При этом существование приписывается всему, что оказывает демонстрируемое воздействие [11, с. 12–13].

Социальные поля реальны, они действуют на людей, являющихся своеобразными «пробными зарядами». Люди считаются с величиной напряженности социального поля, поскольку, к примеру, ощущают (или не замечают, или игнорируют) атмосферу недружелюбия (или дружелюбия), появляясь в определенных общественных местах, и именно это указывает на реальность социального поля.

Величина «заряда», его «знак», от которых зависит реакция на наличие социального поля, — это проявление «силы воли», или напротив «безволие», «неспособность постоять за себя» и т. д.

4.3. О реальности ментального поля

Проявления социальных полей в реальном мире, как мы неявно предполагаем, происходят через *силовые* коллективные действия массы людей (возбужденная и подталкиваемая экстремистами (пассионариями) толпа сметает на своем пути стены, крепости и т. д.). Понятие «силовое» восходит к понятию «сила», являющимся фундаментальным понятием классической физики (все действия осуществляются через силу). В классической физике вещь (тело) изменяет движение лишь постольку, поскольку на него воздействует какая-то *сила*. Сила — причина изменения состояния вещи. Реальность, по воззрениям классической науки, является причинным миром.

В обществе, не охваченном умонастроениями классической физики, требующей указания (материальной) силы как причины факта изменения, а таковым было средневековое общество, практически любая вещь была способна «повлиять» на что угодно. Злые духи отравляли воздух, и люди заболевали. В частности, сознание, являющееся духовной субстанцией по Декарту, вполне могло «воздействовать» на вещи [13, с. 103]. Иначе говоря, имело место изменение состояния без какой-либо причины, отождествляемой с силой. «Воздействие» было *несиловым*.

В силу сказанного, достаточно распространенное в наше время мнение, что действие ментального поля индивида может быть *несиловым*, казалось бы, есть возврат к средневековому стилю мышления.

Однако во второй половине XX в. стало ясным, что квантовая механика открывает для нас существование квантовых *несиловых* взаимодействий, осуществляемых мгновенно. Их А. Д. Александров назвал квантовой связью [15]. В современной терминологии речь идет о квантовой корреляции. Для

реализации квантовой корреляции необходимо наличие *сцепленного* состояния двух подсистем. В простейшем случае — это сцепленное состояние вида

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2)$$

для двух подсистем 1 и 2, каждая из которых может быть только в одном из двух состояний — $|0\rangle$ или $|1\rangle$. Если первая подсистема в состоянии $|0\rangle_1$, то вторая в состоянии $|1\rangle_2$, и наоборот — если первая подсистема в состоянии $|1\rangle_1$, то вторая в состоянии $|0\rangle_2$.

Применительно к социальному явлению можно рассмотреть две подсистемы «женщина» и «мужчина». Подсистема «женщина» находится в двух состояниях: «замужняя», «вдова», а подсистема «мужчина» в состояниях «живой», «мертвый».

«Женщина» и «мужчина» образуют сцепленное состояние «брак»:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{замужняя}\rangle \otimes |\text{живой}\rangle - |\text{вдова}\rangle \otimes |\text{мертвый}\rangle).$$

Если муж живой, то женщина замужняя; если мужчина уехал в другой город и там погиб, то в тот же самый миг женщина стала вдовой и по всем юридическим нормам, и по человеческому разумению. Смена состояния подсистемы «женщина» произошла без какой-либо силовой связи¹⁾.

Все преобразования Природы, производимые людьми с целью проживания в тех или иных комфортных условиях (к примеру, дома с печным отоплением, дома с электрическим отоплением), рассматриваются в классической науке только как достигаемые через силовые связи, или, как выражаются философы, через материальную деятельность.

Но ведь следует предположить возможность несиловых, квантовых корреляций между набором коллективных «умонастроений» большой группы людей — квантового состояния совокупности r подсистем субъектов $S_1, \dots, S_r$ и соответствующим квантовым состоянием окружающего мира — той или иной реальностью. Смена «умонастроения» (от домов с печами к домам с электрообогревателями) означает в таком случае смену реальности.

Много много мышей взглянули на мир, и мир вдруг заполнился корками хлеба! Поскольку такой мощи мышинного общества мы не наблюдали, то скорее всего, кроме условия *скоррелированности сознания и реальности*, нужна еще, скажем, *согласованность в мыслях мышинных мозгов*.

Ясно, что говорить о таких вещах можно лишь в том случае, если эффекты квантовой механики распространяются не только на микромир, но и на макромир.

¹⁾Этот пример автор услышал от А. Д. Александрова в 1971 г.

§ 5. Макроскопические квантовые эффекты

5.1. Физические макроскопические квантовые эффекты

Макроскопические квантовые эффекты — совокупность явлений, в которых характерные особенности квантовой механики непосредственно проявляются в поведении макроскопических объектов. Как правило, поведение макроскопических (содержащих большое число атомов) тел с высокой точностью описывается уравнениями классической физики, в которые не входит характерная для квантовой механики величина — постоянная Планка $\hbar$.

Но, например, при низких температурах существует важный класс вполне макроскопических явлений, в наблюдаемые данные по которым постоянная Планка входит в явном виде и может быть из них непосредственно измерена.

Спектр физических макроскопических квантовых эффектов в их современном понимании достаточно широк — от традиционных теплового излучения, фотоэффекта, оптического квантового генератора (лазера), радиоактивности и эффектов сверхтекучести жидкого гелия и сверхпроводимости металлов до синхротронного излучения, низкотемпературных туннельных химических реакций, дробного квантового эффекта Холла и квантовых эффектов в полупроводниковых наноструктурах [16, с. 13], макроскопических квантовых когерентных эффектов, индуцированных нестационарным магнитным полем в динамике высокоспиновых магнитных нанокластеров, молекул и ионов.

5.2. Нефизические макроскопические квантовые эффекты

Квантовый компьютер — это особая вычислительная машина, обладающая функциональным свойством: в нее закладывается программа, реализующая квантовый алгоритм. Это свойство является *нефизическим* в том смысле, что оно может быть определено при помощи терминов, не содержащих ссылок на физическое или химическое строение компьютера. Мозг может действовать по определенной программе, компьютер может действовать по определенной программе, и функциональная организация мозга и компьютера может быть полностью одинаковой, несмотря на то, что материал, из которого они состоят, целиком и полностью различен (Патнэм, [13, с. 108]).

Мозг, по современным воззрениям Пенроуза и Хамероффа — это квантовая система [14]. Мысль, идея, фантазия, появляющаяся в мозгу, есть результат макроскопического процесса, описываемого квантовомеханически (и не допускающего точного измерения) и в силу этого представляет собой квантовое состояние в мозгу субъекта. Субъект всего лишь подсистема системы, называемой Миром, Реальностью, Вселенной. С состоянием этой подсистемы соотносятся другие подсистемы-субъекты и особая подсистема, которая носит название Природа.

§ 6. Квантовое созидание миров сознанием

Мы сделаны из вещества того же, что
наши сны.

Шекспир, «Буря».

Покажем, как осуществляется созидание миров совокупностью индивидуальных сознаний.

6.1. Реализация «умонастроений»

Предполагаем, что существует Нечто, обозначаемое как 0 и называемое *материальной Природой*, которая существует объективно, т. е. независимо от того, есть ли люди или их нет вообще (например, все погибли в мировом катаклизме). Природе приписываем ψ -функцию состояния $|\psi^0\rangle$. События $A, B, \dots, C$, происходящие в Природе, оставляют свой «след», и это записываем следующим образом:

$$|\psi^0_{[A,B,\dots,C]}\rangle.$$

Субъект системы S , наделенный индивидуальным сознанием, которое обладает «идеями» (=«фантазией») A с собственной волновой функцией $|\phi_i\rangle$ в системе S , вступает во взаимодействие с Природой, начальное состояние которой $|\psi^0\rangle$. Результатом взаимодействия, проистекающим во времени и занимающим промежуток времени $[0, T]$, является попытка реализации идеи A .¹⁾ Иными словами, начальное состояние ($t = 0$)

$$|\psi^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots]}\rangle \quad (2)$$

преобразуется в новое состояние

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots,a_i]}\rangle,$$

где a_i характеризует состояние $|\phi_i\rangle$, т. е. отражает i -ю форму реализации «идеи» (фантазии) A . Под преобразованием мы понимаем решение $|\psi^{S+0}\rangle(t)$ уравнения Шрёдингера с начальным данным (2) при $t = 0$ и с

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\psi^{S+0}\rangle(T).$$

Мы описали идеальный случай, когда индивидуальное сознание остается в собственном состоянии $|\phi_i\rangle$. В общем случае, если начальное состояние

¹⁾Скорее надо говорить не о *взаимодействии, проистекающем во времени* — это фразеология классической физики, а о квантовой корреляции Природы и сознания индивида. Но сознания разных индивидов не скоррелированы. Реализация «идеи» A разными сознаниями — это две разные квантовые корреляции, касающиеся Природы. Они вынуждены быть *последовательными*, а значит рождается то, что мы называем *физическим объективным временем*. Следовательно, сознания рожают Реальность во времени. Эту мысль подсказал автору проф. А. А. Берс.

индивидуального сознания является несобственным, а общим состоянием $\sum_i a_i |\phi_i\rangle$, конечное состояние системы «субъект-Природа» будет иметь вид

$$|\tilde{\psi}^{S+0}\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle |\psi_{[\dots, a_i]}^0\rangle. \quad (3)$$

Мы видим, что в каждом элементе суперпозиции $|\phi_i\rangle |\psi_{[\dots, a_i]}^0\rangle$ состояние Природы есть особенное собственное состояние *потенциальной реальности* (мира), и, *более того, состояние Природы описывает Природу как определенно состоящую из набора потенциальных миров (реальностей)*. Таким образом, *Природа ветвится!* В каждой потенциальной реальности субъект обнаружит различные наблюдаемые значения a_i идеи A , и его сознание разветвится, оказываясь в состояниях $|\phi_i\rangle$.

Рассмотрим еще более общую ситуацию, когда имеем несколько субъектов $S_1, S_2, \dots, S_n$, находящихся в состояниях $|\psi^{S_2}\rangle, |\psi^{S_1}\rangle, \dots, |\psi^{S_n}\rangle$. Пусть первый субъект S_1 начинает реализовать идею-фантазию A^1 . Тогда начальное состояние

$$|\psi^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = |\psi^{S_1}\rangle |\psi^{S_2}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots]}^0\rangle$$

преобразуется в конечное состояние

$$|\psi_1^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \sum_i a_i^1 |\phi_i^{S_1}\rangle |\psi^{S_2}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots, a_i^1]}^0\rangle, \quad (4)$$

где $|\phi_i^{S_1}\rangle$ — собственные функции сознания субъекта S_1 .

И здесь мы видим ветвление сознания и Природы.

Если теперь во взаимодействие вступает второй субъект S_2 , реализующий свою идею-фантазию A^2 , то состояние (4) даст состояние

$$\begin{aligned} |\psi_2^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \\ = \sum_i \sum_j a_i^1 a_j^2 |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle |\psi^{S_3}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[\dots, a_i^1 a_j^2]}^0\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Действия второго субъекта ведут к новому ветвлению Природы и индивидуального сознания и, естественно, того, что он наблюдает.

Потенциальная реальность (мир) $|\psi_{[\dots, a_i]}^0\rangle$, навязываемая Природе субъектом S_1 , будет поддержана вторым субъектом в форме a_j^2 , если потенциальная реальность (мир) $|\psi_{[\dots, a_i^1 a_j^2]}^0\rangle$ *согласуется* с потенциальной реальностью $|\psi_{[\dots, a_i^1]}^0\rangle$. Под согласованием можно понимать, например, пропорциональность двух указанных потенциальностей реальностей (миров) как векторов гильбертова пространства состояний Природы, т. е. если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} (|\psi_{[\dots, a_i^1 a_j^2]}^0\rangle = \lambda |\psi_{[\dots, a_i^1]}^0\rangle). \quad (6)$$

И вообще, после действия r субъектов по реализации своих идей-фантазий ($r \leq n$) получим состояние

$$\begin{aligned} & |\psi_r^{S_1+S_2+\dots+S_n+0}\rangle = \\ & = \sum_{i,j,\dots,m,k} a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle \dots |\phi_m^{S_{r-1}}\rangle |\phi_k^{S_r}\rangle |\psi^{S_{r+1}}\rangle \dots \\ & \dots |\psi^{S_n}\rangle |\psi_{[...a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Если число субъектов достаточно велико, то реализуемые ими идеи в форме потенциальных реальностей (миров) приведут к рождению¹⁾ актуальной физической реальности (мира)

$$R = |\psi_{[...a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle, \quad (8)$$

если $\exists \lambda \in \mathbb{C} (|\psi_{[...a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle = \lambda |\psi_{[...a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle = \dots$

$$\dots = \lambda |\psi_{[...a_i^1 a_j^2]}^0\rangle = \lambda |\psi_{[...a_i^1]}^0\rangle). \quad (9)$$

Очевидно, таких физических реальностей (миров) может быть много — $R, R', R'', \dots$ — это все эвереттовские параллельные вселенные, но одновременно существует множество потенциальных реальностей, так и не ставших актуальной физической реальностью. Это происходит потому, что действия индивидуальных сознаний не оказались согласованными. Иначе говоря, не все идеи-фантазии реализуются; многие из них остаются снами-миражами.

6.2. Осознание

Осознание — это отдавание себе отчета, что мы есть в данном месте и в данное время, т. е. *присутствуем*. Как это описать математически? Традиционно считается, что мир в нас отражается; отражается в нашем мозгу. Но почему мозг знает, что он отражает реальность?

Физическая реальность (мир) R , данная формулой (8), есть, в частности, нечто, созданное по «матрице» M , состоящей из набора идей-фантазий $A, B, \dots$. Это первый этап на пути к осознанию — рождение физической реальности (мира). На втором этапе рожденная реальность (мир) отражается, т. е. воспринимается мозгом. В мозгу появляется отпечаток $\tilde{M}$. На третьем этапе матрица M сравнивается с отпечатком $\tilde{M}$. При совпадении (почти совпадении) мозг «видит себя в реальности (8)» [6]. Это и есть отдавание себе отчета о присутствии (местонахождении), т. е. акт осознания: «...сущее, которое мы сами всегда суть и которое среди прочего обладает бытийной возможностью спрашивания, мы терминологически схватываем как *присутствие*» (Хайдеггер, [17, с. 22]).

¹⁾Несо согласованные потенциальные реальности (миры) остаются с нами в форме грез субъектов, их породивших.

Осознание, как мы видим, не может быть сведено только к отражению внешней объективной реальности. Отраженный внешний мир должен быть с необходимостью *узнан*. Узнавание происходит посредством того, что Я сообщает самому себе, что оно присутствует в *том*, что отразилось в моем Я, что это *тот мир*, который Я же и порождало, на который мое Я согласилось с другими я.

Но способны ли мы на такие ментальные поля?

6.3. Как разум заменяет реальность

Правильнее было бы говорить не об изменении реальности, а о смене реальности. Формула (7) показывает, что на каждом шаге реальность

$$R = |\psi_{[...a_i^1 a_j^2 ... a_m^{r-1} a_k^r]}^0\rangle \quad (10)$$

находится в квантовой корреляции (связи) с состояниями n субъектов

$$|\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle \dots |\phi_m^{S_{r-1}}\rangle |\phi_k^{S_r}\rangle |\psi^{S_{r+1}}\rangle \dots |\psi^{S_n}\rangle, \quad (11)$$

из которых к данному моменту r субъектов реализовали свои идеи-фантазии $A^1, \dots, A^r$.

Иначе говоря, фантазиям отвечает конкретная реальность, которая *есть*. Реальностей много, и все они *есть*. Реальность R существует, но видится всеми субъектами сразу и устойчиво от поколения к поколению постольку, поскольку идеи-фантазии субъектов сами *согласованы*, как это определено условием (9).

Совокупность идей-фантазий множества субъектов («умонастроение»), которым отвечает состояние (11), — это конкретный культурно-исторический тип в понимании Н. Я. Данилевского (гештальт Шпенглера, цивилизация Тойнби), существующий в рамках соотнесенной материальной реальности вида (10). Смена культурно-исторического типа (гештальта) — это радикальная замена представления о мире, в котором хотелось бы существовать. К примеру, в наши дни мы наблюдаем, как идет «уход» из реальности, состоящей из вещества и излучения, и совершается «размещение» в реальности, на 95% состоящей из темной материи и темной энергии¹⁾. Это *наше* очередное усложнение заселяемой *нами* реальности.

Реальности и совокупности идей-фантазий субъектов, как видно из формулы (7), на каждом шаге «эволюции» представляют собой *сцепленные* квантовые состояния всего Бытия как гигантской квантовой системы.

¹⁾ Другой пример: вот уже почти сто лет мужчин вполне устраивает их основной костюм, состоящий из брюк, пиджака, рубашки и галстука. Незначительно меняются лишь ширина брюк, лацканов, галстука. В XIX в. мужчины были большими «модниками».

6.4. В каком виде создается мир?

Как конкретно создается мир? Какому гильбертову пространству принадлежит вектор

$$|\psi^0_{[...a_1^1 a_2^2 ... a_m^{r-1} a_k^r]}\rangle,$$

который представлял в формуле (8) мир-реальность?

Человек, его мозг так устроен, что он видит мир в форме *пространства*¹⁾. *Пространство дает место вещам!*

Но создается ли мир индивидуальным сознанием как сразу целостное 3-мерное пространство, в котором все размещаемые вещи одновременны? Последнее является важным условием, поскольку для человека то, что мозг воспринимает, является одновременным.

Примем, что это так²⁾. Тогда то, что рождается — это пространство, оснащенное геометрией $G^{(3)}$ с метрикой $g^{(3)}$. Но геометрии бывают разными, поэтому символ $G^{(3)}$ следует понимать как переменную величину. Индивидуальное сознание могло создать множество разных 3-геометрий, и этот факт в обозначениях квантовой механики обозначим как введение в рассмотрение вместо вектора (8) амплитуды вероятностей³⁾

$$\Psi(G^{(3)}_{[...a_1^1 a_2^2 ... a_m^{r-1} a_k^r]}) \quad (12)$$

или просто

$$\Psi(G^{(3)}). \quad (13)$$

Это означает, что мы оказываемся в рамках теории суперпространства Уилера, и, следовательно, волновая функция $\Psi(G^{(3)})$ должна удовлетворять уравнению Уилера — де Витта:

$$\left[G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta g_{ij}^{(3)}} \frac{\delta}{\delta g_{kl}^{(3)}} + \sqrt{g^{(3)}} R^{(3)} \right] \Psi(G^{(3)}) = 0. \quad (14)$$

Мы видим, что в наших рассуждениях присутствует ψ -функция $\Psi(G^{(3)})$, которая представляет состояния 3-пространства. Самому по себе 3-пространству, как и любой другой системе, согласно квантовой механике, вообще говоря, не отвечает никакая ψ -функция. Для того, чтобы 3-пространство находилось в состоянии, представимом ψ -функцией, *необходимы известные условия*. «Но для того, чтобы сами условия могли считаться определенными, они должны быть в достаточной степени выделенными, так что для них «квантовые эффекты» несущественны, т. е. условия должны быть «классическими» [18].

¹⁾Думается, боязнь ограниченного пространства — клаустрофобия — это следствие того, что создается обширное пространство, вмещающее мыслимый мир.

²⁾Создание 3-пространства индивидуальным сознанием не означает создание актуального 3-пространства, единого для всех сознаний.

³⁾Переход от абстрактного гильбертова пространства к пространству L_2 .

В (квази)классическом приближении, к которому мы должны с неизбежностью перейти как к *определенному условию* существования человеческого сознания, каждому индивидуальному сознанию i отвечает волновая функция

$$\Psi_i(G^{(3)}) = \left(\begin{array}{c} \text{медленно меняющаяся} \\ \text{амплитудная функция} \end{array} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} S_i(G^{(3)})},$$

а всем сознаниям соответствует волновой пакет:

$$\Psi(G^{(3)}) = \sum_i c_i \Psi_i(G^{(3)}).$$

Там, где «фазы отдельных сознаний $i, j, \dots, k$ » совпадают, т. е.

$$S_i(G^{(3)}) = S_j(G^{(3)}) = \dots = S_k(G^{(3)}), \quad (15)$$

происходит интерференция, приводящая к *рождению единого* для всех индивидуальных сознаний *пространства-времени* и времени, в частности [19].

«Для разных наблюдателей пространство различно. Время также различно для разных наблюдателей. Но пространство-время одинаково для всех» (Тейлор и Уилер [20, с. 54]).

Заметим, что условие (15), ведущее к рождению актуального пространства-времени, является аналогом условия рождения актуального мира-реальности (9).

§ 7. Паттерны: по какому образцу построена реальность

«Ты спрашиваешь, из чего это сделано — из земли, огня, воды и т. д.?» Или ты спрашиваешь: «По какой модели, по какому *паттерну* это сделано?»

Бейтсон, 1972.

*Паттерн*¹⁾ — это модель, по которой сделаны объекты или явления природы и общества.

Сегодня ответ на вопрос: «По какой модели, по какому *паттерну* все сделано?...» не имеет ответа. Почему-то никто не искал универсального паттерна, по которому сделан мир.

До сей поры наука больше задавалась вопросом: «Из чего все это сделано?» И отвечала: «Из земли, огня, воды, молекул, атомов, протонов и электронов, кварков и т. д.».

¹⁾Паттерн (англ. pattern) — английское слово, значение которого передается по-русски словами «образец», «шаблон», «модель», «форма», «тип», «структура», а также это слово имеет значение «узор».

Как видим, искали и ищут универсальное *вещество*, из которого слеплено, сделано все сущее в Мире. Во всяком случае, все мы уверены сегодня, что все состоит из кварков. Но наши желания сделать мир еще комфортнее (колесницы, тройки, автомобили, самолеты, досветовые звездолеты, «сверхсветовые» звездолеты) и интереснее (театр, кино, телевизор, осмотр вулканов на Марсе, восход двух-трех светил по «утрам») приводят к тому, что «старого» строительного вещества не хватает для реализации наших мечтаний — поэтому мы обнаруживаем все «новое» вещество, из которого строим, достраиваем и перестраиваем нашу Вселенную. Мы все время усложняем свой мир. Мир приобретает свойства параллельно с осознанием Мира¹⁾.

Крис Кельвин, герой романа Лема «Солярис», рассматривая в микроскоп кровь существа с именем Хэри, появившегося из сна, неожиданно обнаруживает, что кровяные тельца еще образованы из молекул, но сами молекулы ни из чего не состоят. Хэри «сделана» по образцу людей, но не «сделана», как люди.

Так может быть *паттерн вещи* позволяет ее *создать (овременить)* в *реальности*, иначе говоря, *реализовать*, не сильно заботясь о том, из какого вещества ее делать.

7.1. Структуры Кулакова как паттерны

В 1960-е годы новосибирский физик Ю. И. Кулаков открыл набор элементарных алгебраических формул, которые присутствуют в геометрии и физике [22, 23]. Его учитель, нобелевский лауреат И. В. Тамм назвал их *первоструктурами*, объясняющими единство мироздания.

Претензии структур Кулакова на роль паттернов, лежащих в основе всего Сущего, подкрепляются тем, что они обнаружены в геометрии и физике [22, 23], социологии и психологии [12], микроэкономике (выручка предприятия, потенциальная потребность в товаре, финансирование предприятия с помощью заемного капитала) [24], макроэкономике (потребительский спрос, валовый внутренний продукт) [25], теории рынка труда (равновесие на рынке труда) [26], в геоботанике (конкретные флоры, коэффициент В. И. Василевича для измерения степени различия флористических списков двух растительных сообществ). Задачей является их обнаружение в ботанике, биологии, космологии.

Реальность не собирается по частям из частиц вещества в ходе эволюции от прошлого к будущему, как считает классическая наука, а является вся сразу целиком от прошлого до будущего по заданным образцам, т. е. по конкретным паттернам, как определяет квантовая теория.

¹⁾ Матурано и Варела считали, что «есть материальный мир, но он не обладает никакими предопределенными свойствами... «ни одна вещь не существует» независимо от процесса познания» (Капра, [21, с. 291]).

7.2. Структуры Кулакова и логика

Структуры отношений Кулакова — это наборы элементарных алгебраических формул, каждая из которых представляет конкретный паттерн.

Но может ли алгебраическая формула, являющаяся основой теории Кулакова и сущностью, принадлежащей элементарной математике, описывать любое явление в природе и обществе? Ведь существуют более сложные формулы — сущности высшей, а не элементарной математики, например, дифференциальные уравнения, с помощью которых успешно описываются многие явления реальности.

Различие между алгеброй и дифференциальным исчислением — это факт классической математики, основанной на классической двузначной (булевой) логике.

Но существуют математики, для которых это не так. Так, в инфинитизмальном анализе Кока—Ловера принята аксиома:

$$\forall (f \in R^D) \exists! (a, b) \in R \times R \forall d \in D (f(d) = a + b \cdot d),$$

где $D = \{x \in R : x^2 = 0\}$, которая показывает, что производная $f'(x)$ функции f в точке x — это число, удовлетворяющее семейству алгебраических уравнений

$$f(x + d) = f(x) + f'(x) \cdot d, \quad d \in D.$$

Формально говоря, производная $f'(x)$ функции f в точке x определяется посредством чисто алгебраического выражения:

$$f'(x) = \frac{f(x + d) - f(x)}{d},$$

тогда как в классическом дифференциальном исчислении имеем формулу вида:

$$f'(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x + d) - f(x)}{d},$$

в которой под $\lim_{d \rightarrow 0}$ понимается сложное, не сводящееся к алгебре, построение.

Остается заметить, что аксиома Кока—Ловера несовместима с двузначной булевой логикой, а сам инфинитизмальный анализ Кока—Ловера развивается в рамках интуиционистской логики.

Мы опять пришли к логике, с необходимостью используемой в научных построениях. Во всех научных текстах — это двузначная логика. Фактически нет учебников, описывающих реальность на языке интуиционистской логики. Почему? Не потому ли, что в таких учебниках были бы совмещены противоречия? Кто мог бы читать такую книгу?

Известен, по крайней мере, такой ответ на этот вопрос: «Бог мог бы создать мир, в котором противоречия были бы совмещены, но «мы не должны пытаться это понять, потому что наша натура не такова, чтобы мы могли это понимать» (Мамардашвили, «Картезианские размышления»).

Литература

1. *Флоренский П. А.* Сочинения в 4 т. Т. 4: Письма с Дальнего Востока и Соловков / сост. и общ. ред. игумена Андроника (А. С. Трубачева), П. В. Флоренского, М. С. Трубачевой. — М.: Мысль, 1998, 795 с.
2. *Petkov V.* Inertia as a Manifestation of the Reality of Spacetime / In: *Relativity and the Nature of Spacetime*. — Berlin-Heidelberg: Springer Publ., 2005, 305 p.
3. *Козырев Н. А.* *Астрономическое доказательство реальности четырехмерной геометрии Минковского* / В кн.: Проявление космических факторов на Земле и звездах. — М.—Л., 1980, с. 85–93.
4. *Пригожин И., Стингерс И.* Время, хаос, квант. — М.: Эдиториал УРСС, 2000, 239 с.
5. *Воробьев О. Ю.* Эвентология. — Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2007, 434 с.
6. *Гуц А. К.* Основы квантовой кибернетики. — Омск: Изд-во КАН, 2008, 204 с.
7. *Everett H.* „Relative state“ formulation of quantum mechanics // *Reviews of Modern Physics*. — 1957, V. 29, P. 454–462.
8. *Everett H.* The theory of the universal wavefunction / In: *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* / Eds. B. DeWitt, R. N. Graham. — Princeton Series in Physics, Princeton University, 1973. — P. 3–140. — URL: <http://www.pbs.org/wgbh/nova/manyworlds/>
9. *Гуц А. К.* Элементы теории времени. — Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2004, 364 с.
10. *Андреева О.* Несколько слов на языке Вселенной // *Русский репортер*, 2010, Апрель 8–15.
11. *Левин К.* Теория поля в социальных науках. — СПб.: Речь, 2000.
12. *Гуц А. К., Лаптев А. А., Коробицын В. В., Паутова Л. А., Фролова Ю. В.* Математические модели социальных систем: Учебное пособие. — Омск: ОмГУ, 2000, 256 с.
13. *Патнэм Х.* Разум, истина и история. — М.: Праксис, 2002, 296 с.
14. *Пенроуз Р.* Тени разума. В поисках науки о сознании. — Москва—Ижевск: Инст. компьютер. исслед., НИЦ «РХД», 2005, 352 с.
15. *Александров А. Д.* О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике // *Доклады АН СССР*. — 1952. — Т. 84, № 2, с. 253–256.
16. *Жуковский В. Ч., Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Тернов А. И.* Квантовые эффекты в мезоскопических системах. Ч.I. Квантовое туннелирование с диссипацией: Учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2002, 108 с.
17. *Хайдеггер М.* Бытие и время. — М.: Фолио, 2003, 510 с.
18. *Александров А. Д.* О смысле волновой функции // *Доклады АН СССР*. — 1952. — Т. 85, № 2, с. 291–294.
19. *Уилер Дж.* Предвидение Эйнштейна. — М.: Мир, 1970, 112 с.
20. *Тейлор Э., Уилер Дж.* Физика пространства-времени. — М.: Мир, 1969.
21. *Капра Ф.* Паутина жизни. — К.: «София»; М.: «Гелиос», 2002, 336 с.
22. *Кулаков Ю. И.* Теория физических структур. — М., 2004, 847 с.
23. *Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Карнаухов А. В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. — М.: Архимед, 1992.

24. Гуц А. К., Добренко М. А. Первичные структуры отношений Кулакова в микроэкономике // Математические структуры и моделирование. — 2003, Вып.11, с. 88–96.
25. Гуц А. К., Добренко М. А. Макроэкономические первичные структуры отношений Кулакова // Математические структуры и моделирование. — 2003, Вып.12, с. 130–133.
26. Гуц А. К., Ёлкина О. С. Описание равновесий на рынке труда с помощью структур Кулакова—Михайличенко // Математические структуры и моделирование. — 2005, вып.15, с. 112–115.



Фоменко А. Т.
Гауссовы распределения, II

Непостижимая эффективность аналитической механики в физике

*Вл. П. Визгин*¹⁾

«...Магический лагранжев формализм... само существование такой математически изящной единой картины позволяет глубже судить о математическом фундаменте нашей физической Вселенной даже на уровне законов ньютоновской механики, открытых в XVII веке»

Р. Пенроуз [1, с. 403].

Введение

Известная с давних пор поразительная математичность физического мира, которую Д. Гильберт и Г. Минковский именовали «предустановленной гармонией между чистой математикой и физикой», а Ю. Вигнер назвал «непостижимой эффективностью математики в естественных науках», составляет существо «эмпирического закона эпистемологии» (также выражение Вигнера) и, фактически, основополагающего символа веры физика-теоретика [2]. И. Ю. Кобзарев и Ю. И. Манин интерпретировали этот феномен таким образом, что теоретическая физика является структурой двойного бытия или, соответственно, что язык теоретической физики обладает двойной семантикой: «Этот язык, будучи математическим по своему существу, ведет двойное бытие, поскольку имеет двойную семантику. Одно его лицо обращено к некоему миру платонических сущностей, который по общему консенсусу математиков послеканторовского периода является вмещителем смысла любых математических конструкций. . . Но коль скоро математический текст является „теорфизическим“ рассуждением, он имеет семантику, обращенную к физической реальности, и интерпретируется по другим правилам» [3, с. 176].

Но существует еще одна структура подобного рода и, соответственно, еще одна «непостижимая эффективность» или «предустановленная гармония»: это «непостижимая эффективность аналитической механики» (точнее, лагранж-гамильтоновых, или вариационных, структур механики) в физике. «В современной фундаментальной физике, — замечает Р. Пенроуз, — при попытке создания новой теории, последняя почти неизменно представляется в виде некоторого лагранжева функционала» [1, с. 418], т. е. действия, стационарность которого порождает уравнения движения физических систем, в том числе уравнения Ньютона, Максвелла, Эйнштейна, Шредингера, Дирака и др. Понятия действия, лагранжиана и гамильтониана и соответствующих

¹⁾Владимир Павлович Визгин (1937 г. р.) — доктор физико-математических наук, профессор Института истории естествознания и техники РАН.

формализмов были первоначально развиты в рамках классической механики, породив тем самым аналитическую механику. Во 2-й половине XIX в. и в XX в. выявилась лагранж-гамильтонова структура основных физических взаимодействий. Оказалось, что фундаментальная физика неразрывно связана с понятием действия («Физика там, где есть Действие» [4, с. 188]). С этой точки зрения, о фундаментальной теоретической физике можно говорить как о структуре не только двойного бытия, но даже как о структуре тройного бытия: математического, теорфизического и классико-механического, или аналитико-механического.

Ниже будет рассмотрено развитие аналитической механики как разработка эквивалентных математических форм классической механики и плодотворное взаимодействие механики и математики в XVIII–XIX вв. Затем мы покажем, как и когда методы аналитической механики, особенно лагранжевы и гамильтоновы конструкции и вариационные принципы действия, стали выходить за пределы механики и применяться в классической, а затем и квантово-релятивистской физике. Далее будет отмечена эвристическая роль этих конструкций в создании теории относительности и квантовой механики. В 1950-е гг. лагранж-гамильтоновы методы в квантовой теории поля испытали некий кризис, но затем возродились с решающим эффектом на базе локально-калибровочного подхода.

В заключение мы обсудим особенности лагранж-гамильтоновой теоретической физики как структуры тройного бытия, проливающей некоторый свет на связку непостижимых эффективности: математики в механике и физике, аналитической механики в физике и математике и даже физики в математике.

Между классической механикой и математикой

Аналитическая механика была подготовлена трудами Л. Эйлера и Ж. Л. Даламбера и возникла примерно 250 лет назад в работах Ж. Л. Лагранжа, получив полное развитие и терминологическое оформление в его же знаменитом трактате «Аналитическая механика» (1788). Она представляла собой своеобразное математическое обобщение классической механики Ньютона или даже совокупность нескольких эквивалентных обобщений такого рода, существенно расширяющих ее вычислительные возможности. Физические основы классической механики оставались при этом неизменными, хотя связи фундаментальных понятий, отвечающих этим обобщениям, отличались от ньютоновских и наделяли ее (механику) новой концептуальной содержательностью. В механику вводились понятия обобщенных координат и импульсов, действия, функций Лагранжа и Гамильтона и т. д.

В определенном смысле аналитическая механика была прообразом математической физики. Предметом изучения и той, и другой являются

математические структуры, соответственно классической механики и физики. В результате аналитическая механика становится структурой двойного бытия. С одной стороны, она является теорией механических систем, набором теоретических схем классической механики. С другой стороны, аналитическая механика, по определению К. Ланцоша, — это «чисто математическая наука» [5, с. 29]. Такая двойственность, двуликость аналитической механики делает ее естественной средой, обеспечивающей взаимопревращения механики и математики. «Внешние», идущие из механики факторы развития математики через посредство аналитической механики становятся «внутренними» факторами этого развития. Аналогичным образом через ее посредство к теоретическому арсеналу механики могут подключаться целые разделы математики, новые математические структуры, порождающие новые содержательные концепции и связанные, например, с вариационным исчислением или многомерной римановой и симплектической геометриями.

Основной математической формой классической механики со времен Эйлера была теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Это неоднократно подчеркивали впоследствии также Лагранж, У. Р. Гамильтон и К. Г. Я. Якоби. Вслед за Эйлером и П. Мопертюи Лагранж и Гамильтон развили представление о механике как вариационном исчислении. Наиболее важным здесь оказался вариационный принцип Гамильтона: $\delta S = 0$, где $S = \int_0^t L dt$ и $L = T - U$ — функция Лагранжа (T — кинетическая, а U — потенциальная энергия системы).

В дальнейшем получили развитие и другие математические формализмы механики, когда она с математической точки зрения была развита как теория уравнений с частными производными первого порядка, как многомерная риманова геометрия и как симплектическая геометрия (т. е. геометрия фазового пространства) [6].

Основой аналитической механики стали органически сплетенные между собой лагранжев и гамильтонов формализмы, а также целая серия вариационных принципов, важнейшим из которых стал принцип Гамильтона [7]. Оба эти формализма вместе с вариационными принципами и примыкающими к ним понятиями действия, канонических преобразований и т. п. не только позволили решить ряд важных задач механики, но и выявили ее новый концептуальный ресурс, выходящий за рамки ньютоновской концепции, хотя и эквивалентный ей. Естественно, что при этом классическая механика через посредство аналитической механики оказала мощное влияние на вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, многомерную геометрию, теорию непрерывных групп и т. д. [6].

Аналитическая механика внедряется в классическую физику

Большинство выдающихся физиков в XIX в. (в том числе Р. Клаузиус, В. Томсон, Дж. К. Максвелл, Г. Гельмгольц, Л. Больцман и др.) полагали, что физика, в конечном счете, сводима к классической механике. Об этом, в частности, свидетельствовало и то, что с середины XIX в. к изучению тепловых, оптических и электродинамических явлений удавалось привлечь методы аналитической механики. Первые попытки на этом пути были предприняты Дж. Грином и Дж. Мак-Куллагом уже в конце 1830-х гг., когда они на основе вариационной «общей формулы динамики» Лагранжа, примененной к эфиру, пытались получить волновые уравнения для распространения света [8].

Новый всплеск привлечения методов аналитической механики к физике относится к 1870–1880-м гг., после того как были заложены основы термодинамики и кинетической теории газов (Клаузиус, В. Томсон, Л. Больцман и др.), с одной стороны, и электродинамики (Дж. К. Максвелл и несколько позже Дж. Фитцджеральд, Дж. Лармор, Дж. Дж. Томсон и др.) — с другой. Особенно значительной здесь была роль Г. Гельмгольца, который не только принял самое активное участие в аналитико-механической разработке обоих этих направлений, но и одним из первых осознал возможность лагранж-гамильтоновой формулировки физических теорий, в общем, не сводящихся к механике [9]. К тому же, он на передний план выдвинул вариационный принцип Гамильтона в качестве наиболее общей и эффективной аналитико-механической формы описания физических явлений.

На этом этапе стоит остановиться несколько подробнее. Уже в 1866 г. Больцман, признав связь и даже тождество первого начала термодинамики с законом сохранения энергии в механике (с «принципом живых сил»), предпринял попытку второе начало термодинамики связать с принципом наименьшего действия или даже вывести из него принцип энтропии. В начале 1870-х гг. этой задачей стали заниматься сам Клаузиус и другие физики. И хотя Больцман «понял, что одной механикой (пусть даже аналитической! — В. В.) объяснить или обосновать второй закон термодинамики не удастся, и стал развивать, следуя Максвеллу, идею связи механики со статистикой» [10, с. 512], именно эти попытки привели его в конечном счете к знаменитой Н-теореме и статистической трактовке 2-го начала термодинамики. Чуть раньше или примерно тогда же принцип наименьшего действия нашел применение в теории упругости (в работах Г. Кирхгофа, Ф. и К. Нейманов, В. Томсона, П. Г. Тэта и др.). В 1867 г. Томсон и Тэт выражали твердую убежденность в том, что принцип наименьшего действия будет иметь «глубокое значение не только в абстрактной динамике, но и в теории многих отделов физики, которые в настоящее время начинают получать динамические объяснения» (цит. по [11, с. 586]). Кстати говоря, несколько ранее Ф. Нейман приме-

нял уравнения Лагранжа к электродинамике дальнего действия [9, с. 433]. А Максвелл в «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873), опираясь на уравнения Лагранжа, получил уравнение «теории электрических контуров» [12, с. 188].

Проблемой вывода уравнений Максвелла из принципа Гамильтона занимались в 1880–1890-е гг. Фитцджеральд, Лармор, который подвел итоги своих исследований в книге «Эфир и материя» (1900 г.), Дж. Дж. Томсон, Гельмгольц и др. [7]. Корректный, наиболее близкий к современному вывод максвелловских уравнений из вариационного принципа дали в 1903 г. Х. А. Лоренц и К. Шварцшильд. Этот вывод (со ссылкой на Лоренца) был затем развит А. Пуанкаре в его работе «О динамике электрона» (1906 г.), по праву считающейся релятивистской классикой. При этом он показал, что соответствующие электродинамические действие и лагранжиан инвариантны относительно преобразований Лоренца, в чем усматривал причину их успеха [13]. Вскоре после этого М. Планк показал, как вывести уравнения движения релятивистской механики из вариационного принципа с лагранжианом $L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ [7].

Вернемся к работе Гельмгольца 1886 г., в которой впервые отчетливо было провозглашено универсальное общезначимое (выходящее за рамки механики) значение принципа наименьшего действия, а значит и всей аналитической механики, хотя еще недавно «казалось спорным, могут ли быть подведены под принцип наименьшего действия другие физические процессы, которые не сводятся непосредственно к движению весо-вых масс, в которых, однако, фигурируют известные количества энергии» [9, с. 430]. При этом Гельмгольц берет за основу принцип Гамильтона; функцию Лагранжа, или лагранжиан, взятый со знаком минус, он называет кинетическим потенциалом и формулирует этот принцип в следующей форме: «Среднее значение кинетического потенциала, подсчитанное для одинаковых элементов времени и взятое со знаком минус, является минимальным на действительном пути системы по сравнению с другими соседними путями, которые приводят за одно и то же время из начального положения в конечное» [Там же, с. 431].

Упомянув об эффективном применении вариационного принципа в электродинамике, оптике, термодинамике и отдав должное проницательности Мопертюи («... Область применимости принципа наименьшего действия расширилась далеко за пределы механики весо-вых тел и... большие надежды Мопертюи на его всеобщность приближаются, как кажется, к осуществлению» [Там же, с. 433]), Гельмгольц заключает: «... Всеобщая значимость принципа наименьшего действия настолько не подлежит сомнению, что он может претендовать на большую роль в качестве эвристического принципа и путеводной нити в исканиях формулировок для законов новых классов явлений. У этого принципа имеется преимущество, которое заключа-

ется в возможности объединить в узких рамках одной формулы все условия, влияющие на изучаемый класс явлений, и таким образом окинуть взглядом все существенное в них» [Там же, с. 434].

В тот самый год, когда Планк нашел лагранжиан релятивистской механики, он среди крупнейших достижений Гельмгольца в теоретической физике отметил его исследования по применению принципа наименьшего действия: «Здесь Гельмгольц добрался до проблемы, захватившей его и уже не отпускавшей его до конца жизни — вопроса о „принципе наименьшего действия“ и его значении для всей физики. Он исследовал различные формулировки этого принципа во всех отношениях... и таким образом доказал, что принцип имеет значение не только для процессов движения, к которым он первоначально только и относился (т. е. механическим — В. В.), но, если ему придать достаточно общую трактовку, для всех известных физических процессов... Этими исследованиями Гельмгольц указал путь к единообразному подходу ко всем силам природы. Осуществление его идей — дело будущего» [14, с. 555].

Развивая эти идеи Гельмгольца, Планк в философско-историческом очерке, посвященном принципу наименьшего действия, писал: «С тех пор как существует научная физика, высшей целью, мерцавшей перед нею, было разрешение задачи — как обобщить все явления природы, наблюдавшиеся в прошлом и могущие быть наблюдаемыми в будущем, в одном простом принципе... Эта цель сегодня не достигнута; она не будет достигнута полностью и в будущем... но все больше и больше приближаться к ней — вполне возможно... Среди более или менее общих законов, которые характеризуют достижения физической науки в ее развитии за последние столетия, принцип наименьшего действия в настоящее время является как раз таким, который по форме и содержанию может претендовать на то, что он ближе всего подошел к упомянутой выше идеальной конечной цели физического исследования» [11, с. 580].

Один из параграфов своих «Лекций о принципах механики» Л. Больцман назвал «Принцип наименьшего действия как основной принцип естествознания» [15, с. 466], полагая, видимо, что со временем, либо все естествознание удастся свести к физике, либо его можно будет сформулировать на языке математики и соответствующая формулировка будет иметь вид вариационного принципа.

Аналитическая механика в общей теории относительности и квантовой теории (первая половина XX в.)

Последующее развитие физики, связанное с завершением квантово-релятивистской революции и созданием неклассической физики, подтвердило идеи Гельмгольца и Планка об универсальности и фундаментальном значении вариационных принципов, а значит и аналитической механики в целом, в физике.

Опираясь на работы Эйнштейна по тензорно-геометрической концепции гравитации (1913–1915 гг.) и Г. Ми по нелинейной электродинамике (1912–1913 гг.), Гильберт в 1915 г. попытался аксиоматизировать фундаментальную физику и построить единую теорию поля и материи [16–18]. Он исходил из общековариантного вариационного принципа действия с лагранжианом («мировой функцией»), представляющей собой сумму гравитационной части этой функции (в виде скалярной кривизны четырехмерного риманова пространства) и электродинамического лагранжиана теории Ми. На этом пути, хотя сама теория Гильберта успеха не имела, ему удалось получить правильные общековариантные уравнения гравитационного поля фактически одновременно с Эйнштейном. «Таким путем, — писал он в заключении своего доклада „Основания физики“, — мы приближаемся к возможности превратить в принципе физику в науку, подобную геометрии, которая составляет, несомненно, прекраснейший образец аксиоматического метода, пользующегося в данном случае услугами мощных инструментов математического анализа, а именно вариационного исчисления и теории инвариантов» [19, с. 598]. Возможность использования этих инструментов определялась не только римановой геометрией, лежащей в основе общей теории относительности, но и тем, что эта теория имела вариационную (лагранж-гамильтонову) структуру.

Через два с половиной года Э. Нётер доказала две теоремы об инвариантных вариационных задачах (1-я и 2-я теоремы Нётер), из которых вытекали как связь законов сохранения с непрерывными симметриями, так и «утверждение Гильберта», использованное им при построении его единой теории, и относящиеся к случаю общей ковариантности действия [20, 21]. Вариационная структура теории, в соответствии с первой теоремой Нётер, гарантировала наличие сохраняющихся величин, соответствующих конечнопараметрическим непрерывным симметриям (типа группы Пуанкаре), и давала простой способ их построения. Вторая же теорема (при наличии вариационной структуры теории) позволяла получить важные тождества, уменьшающие число независимых уравнений теории.

Методы аналитической механики были крайне существенны и при построении как квантовой теории атома Бора—Зоммерфельда, так и квантовой механики [7]. На этом пути использовались и теория Гамильтона—Якоби,

и оптико-механические аналогии Л. де Бройля и Э. Шрёдингера, и гамильтонов, или канонический, формализм (прежде всего, при построении квантовой механики В. Гейзенберга и теории преобразований П. Дирака).

Уже Шрёдингеру было известно, что его уравнения могут быть получены из вариационного принципа. Современный вывод уравнений Шрёдингера для волновой функции ψ и комплексно сопряженной с ней ψ^* из вариационного принципа опирается на действие

$$S = \int d^3r dt \psi^*(v, t) \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right\} \psi(v, t),$$

где $\hat{H}$ — оператор Гамильтона (квантовое, операторное обобщение гамильтониана классической механики), дан, например, в учебнике В. В. Киселева [22].

В 1930-е гг. лагранж-гамильтоновы методы заняли прочное место и в квантовой теории поля. Стандартное построение любой квантово-полевой теории начиналось с классических полевых уравнений, имеющих вариационную структуру, с тем или иным лагранжианом. Теорема Нётер позволяла ввести основные динамические переменные теории и соответствующие законы сохранения, связанные с теми или иными симметриями. Переходя от лагранжева к каноническому формализму и затем от классических скобок Пуассона к квантовым коммутационным соотношениям, естественно вводили квантование соответствующих полей (см., например, [23]). Новые частицы и взаимодействия (мезоны, нейтрино; сильные и слабые взаимодействия) должны были подчиняться определенным уравнениям квантовой теории поля, которые имели вариационную структуру, с соответствующими лагранжианами.

В 1920–1940-е гг. предпринимались напряженнейшие усилия (Г. Вейль, А. С. Эддингтон, Т. Калуца, А. Эйнштейн и др.) по созданию единой теории гравитационного и электромагнитного полей на основе обобщения четырехмерной римановой геометрии, порождающего необходимый лагранжиан (подобно тому, как риманова геометрия порождает лагранжиан гравитации в виде скалярной кривизны). Но этот грандиозный по замыслу проект не привел к успеху, хотя на пути его разработки были развиты некоторые важные теоретико-полевые концепции, прежде всего концепции калибровочных полей [17].

Аналитическая механика в квантовой теории поля: от разочарования к возрождению (вторая половина XX в.)

Успехи квантовой теории поля, имевшей вариационную структуру, отодвигали на задний план некоторые трудности, связанные с наличием в ней бесконечностей (или расходимостей). В 1947 г. был достигнут значительный прогресс в борьбе с этими бесконечностями, прежде всего в квантовой электродинамике: была создана теория перенормировок, позволявшая отбрасывать их и с поразительной точностью вычислять необходимые величины. Значительно хуже обстояло дело в теории сильных и слабых взаимодействий, первые варианты которых оказывались неперенормируемыми. Но даже перенормируемые теории не удовлетворяли многих теоретиков. На Сольвеевском конгрессе 1961 г. Р. Фейнман, один из создателей теории перенормировок, сказал: «я по-прежнему... не могу принять философию перенормировок» (цит. по [24, с. 729]). В 1954 г. выдающиеся отечественные теоретики Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук, а также Е. С. Фрадкин обнаружили внутреннюю противоречивость квантовой электродинамики: вычисление заряда электрона с учетом поляризации вакуума приводило к абсурдному результату — он оказывался равным нулю (так называемый «московский нуль»). Аналогичные результаты получали и в теории сильных взаимодействий. «В Советском Союзе, — писал Д. Дж. Гросс в своей Нобелевской лекции, — это было расценено как непреодолимая причина ошибочности теории поля и ее полной непригодности для сильного взаимодействия, а это было катастрофично. Ландау постановил: Мы пришли к выводу, что гамилтонов метод для сильного взаимодействия мертв и должен быть похоронен, хотя, конечно, и с должными почестями» [24, с. 731]. На Западе также наметился отказ от полевого (и, тем самым, лагранж-гамилтонова) подхода к теории сильных взаимодействий: «В США основной причиной отказа от применения теории поля к сильным взаимодействиям стала невозможность вычислений. Американские физики — закоренелые прагматики» [Там же].

В итоге с середины 1950-х гг. «почти все теоретики, в том числе самые опытные и, по праву, самые знаменитые, пришли к выводу, что теорию надо менять в корне, в самих основах. Начались интенсивные изощренные поиски новой структуры всей теории частиц. Они шли по разным направлениям, но все сводились к отказу от традиционной единой схемы с волновыми функциями, зависящими от координат и времени, от привычной уверенности, что любой процесс взаимодействия частиц можно проследить в пространстве и времени от точки к точке, шаг за шагом» [25, с. 330]. Описывая положение дел в теории элементарных частиц в 1950–1960-е гг., Г. 'т. Хоофт писал: «Все были согласны с тем, что реальный мир нельзя описать с помощью квантовой теории поля, допускающей перенормировку» (курсив 'т. Хоофта — В. В.) [26, с. 6].

Отказавшись от полевого лагранж-гамильтонова подхода, физики вступили на путь феноменологических и аксиоматических построений, связанных с концепцией S-матрицы (матрицы рассеяния) или нелокальными теориями. В начале 1960-х гг. очень большие надежды возлагались на теорию полюсов Редже. Многим казалось, что «соединив реджистику с так называемыми дисперсионными соотношениями (доказанными в некоторых случаях строго в рамках аксиоматической теории S-матрицы), можно построить замкнутую и полную теорию» [25, с. 333] (см. также [27, 28]).

Создание теории электрослабых взаимодействий и квантовой хромодинамики в конце 1960-х — начале 1970-х гг. на основе открытого ранее принципа локальной калибровочной симметрии позволило устранить аргументы против традиционной лагранж-гамильтоновой формы квантовой теории поля. «Таким образом, после полутора десятилетий блужданий и господства разрушительных тенденций пришлось вернуться к прежним основам» [25, с. 336]. Единая теоретическая схема трех фундаментальных взаимодействий, основанная на полевой концепции с калибровочной группой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, имеет вариационную структуру с лагранжианом

$$L = L_{\text{Бозе}} + L_{\text{лепт}} + L_{\text{кварк}},$$

где даже самый простой Бозе-лагранжиан имеет весьма устрашающий вид (мы выпишем его без разъяснения отдельных входящих в него членов):

$$L_{\text{Бозе}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu(1)}^2 - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu(2)}^\alpha)^2 - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu(3)}^\alpha)^2 + D^\mu \phi^\dagger D_\mu \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi - v^2)^2$$

[29, с. 234].

Один из самых кратких курсов лекций по квантовой теории поля для математиков начинается с шутливого описания «жизненного цикла физика-теоретика», отдельные пункты которого я процитирую:

«1) Написать плотность лагранжиана L ... Это полином по полям Ψ и их производным. . .

2) Выписать фейнмановский интеграл по путям. Грубо говоря, это выражение вида $\int e^{i \int L[\Psi] D\Psi} \dots$ ».

Затем провести вычисление этих интегралов, убедиться в их расходимости, произвести их регуляризацию, в получающихся расходящихся асимптотических разложениях взять первые члены ряда и сравнить с экспериментом.

И далее: «10) В зависимости от результатов. . . : получить Нобелевскую премию или вернуться к шагу 1» [30, с. 5–6].

Таким образом, эффективность аналитической механики в квантовой теории поля была восстановлена. Несмотря на некоторые сложности и неоднозначности ее применения, «в современной фундаментальной физике при попытке создания новой теории, последняя почти неизменно представляется в виде некоторого лагранжева функционала» [1, с. 418–419].

Метафизические размышления

До сих пор я опирался на богатый историко-научный материал, касающийся развития аналитической механики и ее поразительно успешного применения в физике от Максвелла до современности. По аналогии с вигнеровской «непостижимой эффективностью математики в естественных науках» это позволяет говорить о непостижимой эффективности аналитической механики в физике. Последующие замечания об этих эффективностях носят эпистемологический (или, если угодно, метафизический) характер.

Отмечу, прежде всего, две важные особенности классической механики, на которые в свое время обращали внимание Р. Фейнман и И. Лакатос. Обе эти особенности ярко демонстрируются через посредство аналитической механики и оказываются связанными с «непостижимой эффективностью математики» в физике. В своих блистательных лекциях «Характер физических законов» Фейнман отметил нетривиальный критерий правильной (или «хорошей») теории — существование множества эквивалентных формулировок: «Одна из поразительных особенностей природы — многообразие возможных схем ее истолкования. Это обусловлено самим характером наших законов, тонких и четких. Например, свойство локальности существует только потому, что сила обратно пропорциональна квадрату расстояния. Если бы там стоял куб, мы не имели бы локального подхода. С другой стороны, тот факт, что сила связана с быстротой изменения скорости, позволяет записывать законы, пользуясь принципом минимума. Если бы сила, например, была пропорциональна самой скорости перемещения, а не ускорению, то это было бы невозможно. Стоит сильно изменить законы, и вы обнаружите, что число возможных формулировок сократилось. *Я не понимаю, почему правильные законы физики допускают такое огромное количество разных формулировок* (курсив мой — В. В.)» [31, с. 54–55]. Наличие у правильной («хорошей») теории множества различных эквивалентных математических формулировок создает, соответственно, множество стимулов для развития математики. И. Лакатос в своей методологии исследовательских программ отметил побочный критерий их эффективности: «Мы можем также оценить их по тем стимулам, какие они дают математике» [32, с. 88]. Добавлю только, что основной критерий Лакатоса связан с тем, «сколько новых фактов они дают, насколько велика их способность объяснить опровержения в процессе роста» [Там же]. В данном случае не так важно, что у Фейнмана идет речь о теориях, а у Лакатоса об исследовательских программах. Кстати говоря, создание методов аналитической механики можно рассматривать как работу в защитном поясе исследовательской программы, в ядре которой находится ньютоновская механика.

Таким образом, наличие множества эквивалентных формализмов классической механики, которое демонстрирует аналитическая механика, говорит о том, что эта теория, в соответствии с критерием Фейнмана, «хорошая»

или даже правильная. Классико-механическая исследовательская программа с лежащей в ее основе классической механикой на протяжении более чем двух веков своей эволюции создавала мощные импульсы для развития математики (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, многомерная риманова геометрия, теория непрерывных групп и т. д.). Это свидетельствовало об эффективности механической программы (согласно «математическому» критерию Лакатоса), и, конечно, о качестве лежащей в ее основе теории. Аналитическая механика была при этом своеобразным посредником между механикой и математикой. Механика, будучи частью физики, во многом определила (через посредство аналитической механики) те математические структуры, которые в XX в. проявили свою «непостижимую эффективность» в квантово-релятивистской физике, вышедшей далеко за пределы классической механики, но удивительным образом сохранившей аналитико-механические контуры. Итак, феномен «непостижимой эффективности математики» в физике, который Ю. Вигнер назвал «эмпирическим законом эпистемологии», в свете критериев Фейнмана и Лакатоса, становится несколько более понятным: математические структуры, в значительной степени порожденные механикой через посредство аналитической механики, возвращают свой долг, но не столько механике, сколько физике, вышедшей за механические рамки. При этом, несмотря на очевидную «немеханичность», новые квантово-релятивистские теории неожиданно обнаруживают аналитико-механическую (вариационную, лагранж-гамильтонову, симплектическую) форму, что и позволяет говорить о еще одном «эмпирическом законе эпистемологии» — непостижимой эффективности аналитической механики в физике.

Исторически мы чувствуем взаимосвязь обеих «непостижимых эффективностей», но логически их, по-видимому, более естественно рассматривать как два различных «эмпирических закона эпистемологии», являющихся, фактически, двумя своеобразными символами веры физиков-теоретиков.

После создания квантовой механики, особенно после разработки Фейнманом ее формулировки с помощью интегралов по путям (или по траекториям), стало ясно, что вариационность (лагранж-гамильтоновость) классики можно рассматривать как предельный случай квантового описания физических систем [22, с. 195–196]. Как говорил Фейнман, «...сам факт существования принципа минимума (действия) является следствием того, что в микромире частицы подчиняются квантовой механике» [31, с. 54]. Конечно, это можно было предвидеть, поскольку сама квантовая механика имеет в некотором смысле лагранж-гамильтонову структуру, в частности уравнение Шредингера выводимо из вариационного принципа [22, с. 65]. С другой стороны, можно считать, что вариационная структура фундаментальных теорий — необходимое условие той глубокой связи законов сохранения с симметриями, которая иногда даже дает основание их отождествлять и которая дается 1-й теоремой Э. Нётер об инвариантных вариационных

задачах. Иначе говоря, вариационность теорий может корениться в их симметрично-консервативной структуре [7, 20, 21].

Во Введении уже говорилось о возможности толкования теоретической физики как структур не только двойного бытия (математического и физического) [33], но и как структур тройного бытия (третья онтология — аналитико-механическая). Последняя, хотя и не обращена непосредственно к физической реальности, не является, вообще говоря, и чисто математической, поскольку выделяет класс специфических математических форм, возникших на классико-механической почве. Наличие таких полионтологических структур и, соответственно, полисемантических языков в теоретическом естествознании, заранее вовсе не очевидное и логически неоткуда не вытекающее, и позволяет говорить, в частном случае трех онтологий, о непостижимых эффективности математики в физике и аналитической механике, аналитической механике в физике и математике и даже физики — в математике и механике.

Статья посвящается памяти Льва Соломоновича Полака, внесшего неоценимый вклад в историю изучения и осмысления вариационных принципов механики и физики. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-06-00246а).

Литература

1. Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель.— М.— Ижевск: Инст. компьют. исслед., НИЦ «РХД», 2007, 912 с.
2. Визгин В. П. Догмат веры физика-теоретика: «предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Проблемы знания в истории науки и культуры / Отв. ред. Е. Н. Молодцова.— СПб.: Алетейя, 2001, с. 123–141.
3. Кобзарев И. Ю., Манин Ю. И. Элементарные частицы. Диалоги физика и математика.— М.: Фазис. 1997.
4. Манин Ю. И. Математика и физика // Ю. И. Манин. Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008, с. 137–195.
5. Ланцош К. Вариационные принципы механики.— М.: Мир, 1965, 408 с.
6. Визгин В. П. Между механикой и математикой: аналитическая механика как фактор развития математики (XIX в.) // Исследования по истории физики и механики, 1986.— М.: Наука, 1986, с. 49–62
7. Полак Л. С. Вариационные принципы механики: их развитие и применение в физике. Изд. 2-е, испр., М.: ЛИБРОКОМ, 2010, 600 с.
8. Кирсанов В. С. Эфир и генезис классической теории поля // Механика и цивилизация XVII — XIX вв. /Под ред. А. Т. Григорьяна и Б. Г. Кузнецова.— М.: Наука, 1979, с. 219–260.

9. Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия // Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полака.— М.: ГИФМЛ, 1959, с. 430–459.
10. Полак Л. С. Людвиг Больцман и развитие молекулярно-кинетической теории газов и статистической механики // Л. Больцман. Избранные труды.— М.: Наука, 1984, с. 476–559.
11. Планк М. Принцип наименьшего действия // Вариационные принципы механики. . . / Под ред. Л. С. Полака.— М.: ГИФМЛ, 1959, с. 579–588.
12. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. В двух томах. Т. II.— М.: Наука, 1989, 437 с.
13. Bracco Ch., Provost J.-P. De l'electromagnetisme a la mecanique: le role de l'action dans le Memoire de Poincare de 1905 // Revue d'histoire des sciences. 2009, T. 62-2, P. 457–493.
14. Планк М. Заслуги Гельмгольца в теоретической физике // М. Планк. Избранные труды. . . — М.: Наука, 1975, с. 553–555.
15. Больцман Л. Два отрывка из «Лекций о принципах механики» // Вариационные принципы механики. . . / Под ред. Л. С. Полака.— М.: ГИФМЛ, 1959, с. 466–496.
16. Визгин В. П. Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование. 1900–1915 гг.).— М.: Наука, 1981, 352 с.
17. Визгин В. П. Единые теории поля в первой трети XX в.— М.: Наука, 1985, 304 с.
18. Визгин В. П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) // Успехи физических наук. 2001, Т. 171, № 12, с. 1347–1363.
19. Гильберт Д. Основания физики // Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полака.— М.: ГИФМЛ, 1959, с. 589–598.
20. Визгин В. П. Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике.— М.: Наука, 1977, 240 с.
21. Kastrup H. A. The contribution of Emmy Noether, Felix Klein and Sophus Lie to the modern concept of symmetries in physical systems // Symmetries in Physics (1600-1980) / Proceedings of the 1-st Intern. Meeting in the Hist. of Scient. Ideas. 1983. Ed. by M. G. Doncel etc. Barcelona; UAB. 1987. P. 113–163.
22. Киселев В. В. Квантовая механика.— М.: МЦНМО, 2009, 560 с.
23. Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей.— М.— Л.: ГТТИ, 1947, 292 с.
24. Гросс Д. Дж. Открытие асимптотической свободы и появление КХД. Нобелевская лекция // Нобелевские лекции по физике. 1995–2004.— М.— Ижевск: Инст. компьют. исслед., НИЦ «РХД», 2009, с. 727–752.
25. Фейнберг Е. Л. Как важно иногда быть консервативным // Фейнберг Евгений Львович: Личность сквозь призму памяти / Под общей ред. В. Л. Гинзбурга.— М.: Физматлит, 2008, с. 324–338.

26. 'т Хоофт Г. Перенормировка калибровочных теорий // Г. 'т Хоофт. Избранные лекции по математической физике.— М.— Ижевск, Инст. компьютер. исслед., НИЦ «РХД», 2008, с. 6–31.
27. *Sao T. Y.* Conceptual developments of 20th century field theories. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1997, 433 p.
28. *Schweber S. S.* QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994, 732 p.
29. *Степанянц К. В.* Классическая теория поля.— М.: Физматлит, 2009, 539 с.
30. *Борчердс Р. Е.* Квантовая теория поля.— М.— Ижевск: Инст. компьютер. исслед., НИЦ «РХД», 2006, 96 с.
31. *Фейнман Р.* Характер физических законов.— М.: Мир, 1968, 232 с.
32. *Лакатос И.* Фальсификация и методология научно-исследовательских программ.— М.: Медиум, 1955, 236 с.
33. *Визгин В. П.* Теоретическая физика как структура «двойного бытия» // Философия математики: актуальные проблемы. Тезисы Второй международной научной конференции: 28–29 мая 2009 г.— М.: МАКС Пресс, 2009, с. 208–210.



Фоменко А. Т.
Ориентируемость и неориентируемость многообразий

«Отраженное воплощение» математики

А. П. Ефремов¹⁾

«...он научил его предвидению с помощью науки чисел, полагая, что она более чистая, божественная...»

Ямвлих, «О Пифагоровой жизни»

Является ли вымысел сущностью?

Призрак стремления к материальной успешности доминирует в современном сознании, и общественном, и частном. Человечество настойчиво раскручивает маховик перепроизводства вещей и желания ими обладать. Похоже, что свойственная ранней античности парадигма простого материализма заново утверждается на очередном витке цивилизационной спирали. И именно в этом близком для масс ключе лидеры общественных групп вынуждены формулировать цели и задачи своей деятельности. Наука не является исключением, ее оплачиваемые государством «приоритетные направления» должны способствовать улучшению жизни людей. Несложный анализ перечня этих приоритетов с очевидностью свидетельствует, что имеется в виду материальный комфорт, с чем не поспоришь. Не приносящим очевидной выгоды и мало понятным народу фундаментальным наукам на этом празднике мест не зарезервировано.

Однако философы утверждают (поверим им), что идеи о малопригодных на практике нематериальных сущностях зародились, как ни странно, не в средневековом мистическом тумане и не в романтическом XVIII в., а в период того самого насущно-примитивного материализма, когда, казалось бы, у бедного человечества не было ничего важнее, чем стремление к комфорту.

Конечно, процессам отхода от чисто материалистических представлений о природе вещей способствовали некоторые обстоятельства; их даже можно назвать причинами, если не слишком углубляться в суть собственно явления такого отхода. Таких очевидных «бытовых» причин, как минимум две. Первая: кто-то из успешных (или счастливых) представителей античного мира имел свободное время для размышлений, в отличие от подавляющего большинства тех, кто все свои силы отдавал борьбе за жизненный комфорт.

¹⁾Александр Петрович Ефремов (1945 г. р.) — доктор физико-математических наук, профессор РУДН, академик РАЕН, директор Института гравитации и космологии РУДН. E-mail: a.yefremov@rudn.ru

Вторая: не исключено, что и среди тех последних находились люди, для которых вопросы познания мира оказались столь же, если не более важны, чем их материальное благополучие. (Стоит заметить в скобках, что обе эти причины до сих пор не потеряли своей актуальности.)

Но, точнее, все-таки они — не причины, а обстоятельства. Поскольку, наверное, можно ставить вопрос о наличии сущностной, исходной причины, некой движущей силы, инициирующей изменение направленности «вектора мышления» из конкретной, как правило, чувственной области восприятия мира в область абстрактных представлений. Здесь, может быть, следует уточнить термин «абстрактных». В русском языке есть нескольких принятых значений слова «абстракция» (лат. *abstractio* — отвлечение); но в данном случае имеется в виду не *теоретическое* обобщение, не отвлечение от *несущественных сторон* предмета познания с целью выявления существенных признаков и тем более не то нечто, что *утратило* определенность или реальность. И все же именно последнее оказывается близко к вменяемому здесь смыслу, но только в том случае, если признак бывшей некогда определенности — «утратило» — отсутствует изначально; иными словами, используемое понятие приобретает абсолютный, если угодно, экстремальный характер. «Абстрактное представление» здесь — своего рода крайняя степень абстракции — такой «предмет»¹⁾ познания, который обладает врожденной возможностью *принципиально не зависеть* от чувственно воспринимаемого материального мира. Это уточнение, конечно, заметно сужает область рассматриваемых «предметов», но примеры их легко находятся в самых различных сферах системного мышления и, безусловно, будут приведены ниже. Но зато это экстремальное представление может оказаться полезным для более глубокого (хочется даже сказать — адекватного) осознания сущности математики и, возможно, не только ее.

Теперь, продолжая тему фундаментальной причины смещения области мышления в сферу чистых абстракций, время привести одно знаменитое изречение.

В работе «Истина, или опровергающие речи», не сохранившейся, но тем не менее широко цитируемой, основатель софизма Протагор (V в. до н. э.) утверждает: *человек есть мера всех вещей существующих, что они существуют, и не существующих, что они не существуют. Все является таким, каким оно нам кажется.*

Высказанное почти два с половиной тысячелетия назад это утверждение, по-видимому, отражает одно из самых ранних представлений о том, что сознание, персональное человеческое «я», может являться не инструментом отражения действительности, а абсолютной первоосновой процесса познания. Впрочем, на бытовом уровне такая позиция кажется приемлемой, так что временно с ней согласимся. Притом заметим, что автор этого

¹⁾Кавычки подчеркивают отличие от материальной вещи.

утверждения, в отличие от существенно более поздних солипсистов, вовсе не считает окружающий мир исключительно плодом сознания; мир вроде бы реален, но он — именно то, чем представляется человеку. Однако нет людей с одинаковым восприятием, для каждого мир будет иным, чем для другого; и если мир объективен, а мнения различны, то либо придется договариваться о более или менее общих представлениях, либо результатом процесса познания окажется тупик. По отношению к познанию природы последнее, как известно, пока не происходит, поскольку договоренности наличествуют. Характерным примером в естественнонаучной (но еще ранее — в бытовой) сфере является договор о «скорости течения» и правил измерения времени. Природу этой «физической величины» вряд ли можно соотнести с представлениями о материальных сущностях, но она все же находится в зависимости от материального мира (от его изменений) и поэтому понятие такого договорного времени не являет собой абсолютную абстракцию¹⁾.

Но, возвращаясь к позиции Протагора, следует признать, что помимо предметов, которые человек считает принадлежащими «внешнему» материальному миру, можно говорить и о «предметах», таковыми не являющимися. Возникновение у человека мыслей и «образов», не являющихся идеальным отражением материальных объектов, т. е. не имеющих привычного для глаза геометрического воплощения (поэтому «образы» — в кавычках) — один из наиболее загадочных, но и характерных процессов, свойственных сознанию.

И вот своего рода рубежный вопрос: является ли способность к реализации таких «образов» врожденной, изначально присущей сознанию, или она есть следствие прохождения каждого частного сознания через все этапы его становления как такового, включая, конечно, специальные периоды обучения? Предложение ответить на этот вопрос, как несложно понять, предоставляет выбор между двумя возможными позициями по отношению к сознанию (пока будем использовать этот несколько расплывчатый, но устоявшийся термин): либо только «обученное» сознание способно «творить», либо оно заведомо приспособлено к возникновению в нем — по некоторым существенным причинам — абстракций.

Может показаться, что предлагаемая трактовка двух возможных «технологических способностей» сознания: сначала обучаться и только потом — порождать абстракции, либо изначально быть готовым к созданию идеальных «образов», звучит искусственно или даже схоластически. Однако это кардинальное различие имеет далеко идущие следствия в понимании сути бытия; если угодно, в допущении этих противоположных позиций содержится своеобразная емкая формулировка так называемого «основного вопроса философии». Если некто согласится с одной из двух позиций, он с необходимостью отделяется непреодолимым барьером от того, кто считает

¹⁾Ниже будет приведено понятие другого — абсолютно абстрактного «геометрического» времени.

правильной другую. Ибо один будет считать сознание вторичным в «живом», другой же — изначальной сущностью, в известном смысле от «живого» не зависящей. Нетрудно убедиться, что логическая редукция этой системы противоречий, в частности, имеет результатом известные (и упрощенные) онтологическую и гносеологическую дилеммы.

С каждой из вышеотмеченных позиций представление об абстракции в сознании человека выглядит по-своему. Если сознание присуще только живому, т. е. возникает в уже живом, то идеальный «негеометрический образ» должен быть уникальным явлением данного сознания. Допущение объективности мира заставляет признать этот факт по отношению к каждому сознанию, не только «моему», но и «твоему». Опыт подсказывает, что некоторая частная абстракция может связывать два сознания — «передатчик» и «приемник», или даже сознания группы индивидуумов, но для этого она непременно должна пройти стадию «материальной актуализации», например, в виде заданной последовательности плотностей воздушной среды или геометрических фигур. Иными словами, абстракция, возникшая в чужом сознании, обязана войти в такое соприкосновение с материальными сущностями, какое позволило бы «людям-приемникам» сначала чувственно ее воспринять, и только затем — осмыслить (и воспринять либо отвергнуть). Это миллиарды раз в день повторяемое действие порождает триллионы физических объектов, представляющих материальные элементы передаваемой абстракции, при этом сам по себе такой материальный элемент не имеет смысла; приписанным, или договорным смыслом обладает лишь полное сочетание их определенным образом упорядоченных различий.

Таким образом, допущение объективности мира и первичности живого заставляет признать абстрактную идею частного сознания сущностью, хотя бы потому, что она передается другому сознанию с использованием материальных носителей.

Пример такой абсолютной абстракции, возникающей в сознании человека, — музыка, не имеющая ни своего аналога в «мертвом» физическом мире, ни геометрического образа, создаваемого искусственно (человеком же). Есть только собственно звучание музыки и запись ее: на бумаге, на ферромагнитной ленте, на оптическом диске, в системе микросхем. Для всех это — безусловная сущность.

Но есть еще один вид «записи» — в сознании автора. И что если он не смог или не посчитал нужным представить свое произведение другим? Является ли сущностью абстракция, возникшая в частном сознании и не открытая другому сознанию? Ответ двусложен: «творец» убежден в истинности существования своей идеи (в том числе, и «по Протагору»). Все остальные об этом ничего не знают, для них эта абстракция не существует. Поэтому даже если идея в принципе может быть передана через материальную среду, она остается сущностью субъективной, «не надежной», хотя бы потому, что существует понятие об «измененном состоянии сознания» (за прерогативу

которого в человеке, кстати, в свое время ратовали основоположники эзотеризма).¹⁾

Признание первичности живого по отношению к сознанию влечет за собой, как минимум, еще три проблемы. Первая проблема сама по себе носит характер абстракции: совершенно не ясно, *зачем* никак не связанная с внешним миром идея родится в частном сознании? Вторая проблема, скорее, технологическая: *как* в сознании возникает абсолютно новая идея? И если первые два вопроса дают возможность, по крайней мере, пофантазировать, придумывая ответ, то третья проблема являет собой фатально-беснадежный вывод: вторичность сознания по отношению к живому означает полное отрицание рационально ожидаемых результатов сознательной деятельности человека. Иными словами, в этом варианте жизнь человека и всего человечества не имеет никакого высшего смысла.

Ситуация кардинально меняется, если считать, что понятия «живое» и «сознание»²⁾ могут рассматриваться не последовательно, а параллельно и даже независимо друг от друга. Но возможно ли это? Ведь любой человек по своему личному опыту знает, что он осознает себя существенно позже даты земного рождения, не говоря уж о каком-то бытии внеземном, значит, скорее всего, «сознание» вторично? Однако почти все религии признают бессмертие души³⁾. Можно, конечно, снисходительно относиться к религиозной вере, считая ее «философией морали» незрелого человечества. Но к религии, пожалуй, следует относиться с уважением, и не только отдавая дань *действующей* традиции и великой культуре. Само существование мировых религий должно вызывать великое удивление, ибо здесь возникает почти тот же вопрос, что был задан чуть выше: *зачем* абстрактная идея о бессмертии души, очевидно не связанная ни с каким земным чувственным опытом, во-первых, появилась вообще, а во-вторых — и с этим не поспоришь — объективно овладела сознанием миллиардов жителей Земли? Тем, кто рассматривает это грандиозное явление как бессмысленное, не имеющее цели, сам факт существования человечества должен представляться игрой слепого случая, одной из дециллионов стохастических реализаций мертвой природы, могущей также в любой момент стереть это человечество с лица Земли, возможно, вместе с этой самой Землей.

Такая точка зрения имеет право на жизнь. Однако стоит указать на одну ее слабую сторону. Дело в том, что, несмотря на свою кажущуюся ничтожность во вселенной, человечество уже успело оказать *сознательное* влияние на окружающий его космос. И не только заброшенными в межзвезд-

¹⁾См., например, Успенский П. Д., «Новая модель вселенной». СПб: Изд-во Чернышёва, 1993.

²⁾Здесь термин «сознание» приобретает несколько иной «автономный» и обобщенный смысл.

³⁾Конечно, есть и атеисты; но есть и верующие саддукеи, для которых никакого «бессмертия души» нет.

ное пространство крошечными космическими зондами (хотя и ими тоже); существеннее то, что планета Земля, довольно ярко отражающая видимый свет Солнца, и сама ярко — и системно! — «светится» в радиодиапазоне электромагнитного излучения, порождаемого знанием, волей и усилиями человека. Это излучение, физическое явление предположительно ранее свойственное лишь «мертвой» природе, теперь оказывается результатом действия разума и оно, конечно, влияет на окружающий мир, изменяет его. Значит, в результате появления человечества мир становится уже не таким, как если бы он был «без сознания», сознание оставляет свой внятный след, и дальнейшие вселенские события будут развиваться с учетом того, что этот след оставлен. Впрочем, нет необходимости говорить о влиянии нашей цивилизации на большой космос. Достаточно *любого*, как угодно малого, *сознательного* действия отдельного человека — и в будущем оно непременно зачтется. Как в том знаменитом фантастическом рассказе, герой которого, оказавшись в далеком прошлом, случайно наступил на бабочку, а потом вернулся в совсем иное настоящее¹⁾. Так что человеческое сознание — безусловный фактор влияния на «инерционное» движение в будущее «мертвого» физического мира. Отсюда и сомнения, что само человечество — случайность, а религии, не только предлагавшие, но уже заметно поспособствовавшие человечеству (стало быть, «сознанию») весьма и весьма размножиться — беспцельное изобретение самого человека.

И все же, если «сознание» может не зависеть от «живого», то, как быть с осознанием человеком своего «я», лишь через некоторое время после появления на свет? Здесь, наверное, можно рассуждать о комплексности самого «сознания», о моменте включения, но главное все же, видимо, в феномене памяти. Предположительно человек рождается с чистой, ничем не занятой памятью, в ней еще нет реперных точек и лекал бытия, которые загружаются в память постепенно, и уже на их базе с помощью чувственного восприятия в сознании выстраивается персональная модель окружающего мира, «каким он кажется». Память являет собой одну из основ логики, без которой само-осознание невозможно. Но память — это не все «сознание», об этом чуть ниже.

Впрочем, можно оставить в стороне аргументы и процедуры убеждения или самооправдания, а просто-напросто постулировать недоказуемое предположение о том, что «сознание» есть некая самостоятельная сущность. Суть этого постулата в допущении, что у непредставимой геометрически и не имеющей аналогов в физическом мире абстракции (т. е. вымысла), определяемой понятием «сознание», имеется сущностный источник, никак не зависящий от того, вкладывается это понятие в сознания группы индивидуумов или нет. Несложно сообразить, что, принимая это предположение за данность, уже можно пытаться ответить на поставленные выше вопросы о высшем смысле

¹⁾Брэдбери Рэй, «И грянул гром».

возникновения абстрактных идей и задачах человечества. Имея в виду, что контуры ответов проявятся в ходе последующих рассуждений, полезно завершить этот раздел работы некоторым резюме о сущности вымысла.

Люди, допускающие объективность мира, уверены в том, что их представлениям о материальном объекте безусловно соответствует некая материальная сущность, сам объект — пусть даже не такой, каков он по сути есть (вещь в себе), а такой, «каким он кажется». В этой группе индивидуумов возникает общая (обычно договорная) неабстрактная идея о данной сущности, и в дальнейшем, как известно из философской классики, в общении этой группы будет обсуждаться не сам объект, а отражение его в сознаниях: идея или идеи о нем.

Но та же группа может воспринять сведения не о материальной вещи, а абстракцию, например, какой-то раздел математики, и мыслить о ней и обсуждать ее точно так же, как если бы она была идеальным отражением какого-то объекта. Должны ли участники этой группы считать, что данному их представлению соответствует некоторая объективная сущность? Социологические исследования и анализ литературных источников показывают, что некоторые (и большинство) будут считать именно так¹⁾. Однако сомнение остальных понятно, поскольку здесь скрыт «магнит Протагора». Если эта сущность идеальна и есть только в чужом (и в моем) сознании, то она является абсолютной абстракцией, не имеющей воплощения, и все те, кто считают ее сущностью, «перетягиваются на ту сторону барьера»: мир оказывается таковым, каким он кажется. Чтобы уйти от этого скатывания к простоте при отсутствии высшего смысла, те, кто убежден в необходимости быть «по эту сторону», обречены на поиск сущностей, отражениями которых являются возникающие в их сознании абстракции.

Математика — очищенная от эмоций, не зависящая от частного сознания грандиозная идеальная система, как ничто иное притягивает внимание в этом поиске. И древние, и недавние, и современные мыслители видели и видят в ней «направляющую конструкцию», априорную базу мирового устройства, «божественную гармонию». Следует сказать, что, в отличие от самой математики, эти оценки и восторги зиждутся не на проверяемом опыте, не на логике и рассуждении, а на нелогичном чувственном восприятии, на интуиции. Тем не менее, поиск «воплощенного отражения» этой загадочной сущности идет, и не исключено, что он окажется успешным. Во всяком случае, уже сегодня появляются некоторые основания считать, что представления о мире великих идеалистов и адептов математики Пифагора и Платона находят свое — пусть косвенное — но убеждающее подтверждение. Отсюда — прямой путь к метаматематике. Но сначала — краткое изложение используемой в дальнейших рассуждениях системы терминов и понятий.

¹⁾См. статью: *Ефремов А. П.*, «Метафизика кватернионной математики», *Метафизика*. Век XXI, вып. 2, 2008.

Глоссарий

В этом разделе помещены тезисы основных высказываний и представлений автора, а также термины и понятия, связанные с данной темой. Они даны в предельно краткой форме, поскольку неоднократно обсуждались в многочисленных сообщениях и публикациях; ссылки и некоторые полные тексты можно найти в разделе «философия» на сайте www.cosmology.su.

Необходимые тезисы и понятия.

Мир объективен.

Мир устроен заметно сложнее, чем он нам кажется.

Человек — несовершенный «прибор» для физического, опытного изучения мира, его сенсорные способности недостаточны для адекватного восприятия мира.

Человек — хороший «прибор» для аналитического изучения мира; способности человека мыслить достаточны для адекватного восприятия мира и познания его устройства.

Человечество находится на ранней стадии развития и пока не знает, как устроен мир.

Всякий человек наделен вложенной в него информационной системой¹⁾.

Информационная система человека состоит из двух частей: логической²⁾ и нелогической.

Каждая из этих частей (и информационная система в целом) обладают двумя качествами: сложностью и гармоничностью.

Сложность системы — понятие определяемое (моделируемое); условно его можно определить как число точек системы и число независимых связей между ними.

Гармоничность системы — понятие не определенное, но им будем пользоваться, имея в виду некую степень соответствия «настройки» информационной системы объективно поступающей в нее информации.

Человек в течение жизни волен повышать качество своей частной информационной системы (усложнять и гармонизировать ее)³⁾.

Каждый объект — материальный или идеальный — несет абсолютную информацию о себе⁴⁾; абсолютная информация неотъемлемо присуща (имманентна) каждому объекту.

Представление человека об объекте есть информация сознания.

¹⁾То, что выше подразумевалось под термином «сознание», там, где оно считается самостоятельной сущностью.

²⁾То, что обычно подразумевается под сознанием человека, память — неперенная составляющая логической части.

³⁾Волен и не повышать ее качество.

⁴⁾Обобщенный аналог кантовой «вещи в себе».

Информация сознания может быть тождественна абсолютной информации, быть ее частью или совсем не иметь к ней отношения; это зависит от свойств объекта и от качеств частной информационной системы.

Математика¹⁾ — объект²⁾, абсолютная информация которого тождественна информации сознания.

Абсолютная информация и информация сознания могут передаваться человеку логическим путем³⁾ и трансцендентно.

Гносеологическая дилемма философии не имеет смысла, поскольку для частного сознания объекты мира частично познаваемы абсолютно, частично не познаваемы.

Здесь полезно сделать три замечания. Во-первых, данные высказывания, понятия и термины, видимо, дают представление о том, что их автор склонен занимать объективистскую позицию по отношению к «сознанию», называя его в духе современных технологий информационной системой; однако здесь речь идет о несравнимо более сложных системах, чем компьютерные, что обеспечивается (и подчеркивается) наличием нелогической части. Во-вторых, с каждым из этих высказываний, точнее, по поводу каждого из них, наверное, можно спорить, однако, до настоящего времени серьезной критики вышеприведенной системы тезисов, свидетельствующей, что она приводит к абсурду, не было. И, в-третьих, эта система содержит только небольшую часть всех тезисов, имеющих отношение к полной мировоззренческой концепции, которая базируется на исследовании окружающего мира уже не прежним методом физического эксперимента или даже широко распространенным сегодня методом математической эмпирики, а методом детального изучения собственно математических структур. Для связи с дальнейшими рассуждениями об этом нужно сказать несколько подробнее.

«Метафизика»

В буквальном (и узком) понимании этот термин говорит о том, что стоит (или лежит) за пределами физических явлений⁴⁾. Иными словами, допустимо предположение, что чувственно воспринимаемый окружающий мир — отнюдь не все, что есть; «за» ним может скрываться нечто, являющее его первичную сущность, структурирующую этот мир и, не исключено, правящую им. В силу всего вышесказанного, те, кто задумывается над этим, делятся на две группы. Одни голосуют за метафизичность мира, другие отрицают ее. В обозримой истории человечества маятник мнений по этому

¹⁾Здесь — не символичный язык, формальный инструмент или просто числа, а система сущностных соотношений.

²⁾Едва ли не единственный.

³⁾Логически объяснимым на данном уровне знания.

⁴⁾Хотя в основе термина — упорядоченность трудов Аристотеля, собранных Андроником Родосским.

поводу качался из одной крайности в другую — от Пифагора к Левкиппу, от Беркли к Ламетри, от Гегеля к Конту. Подчеркнем: речь о тех, кто задумывался; остальные — в абсолютно подавляющем большинстве люди религиозные — безусловно разделяли позиции метафизического мировоззрения. «Переданное» раннему человечеству содержание священных книг сделало свое дело: человечество в массе своей *поверило* в истинность нефизических («сверхфизических») сущностей.

История новейших времен выявила неожиданную тенденцию. Позитивизм, не замечавший метафизики, а за ними и воинствующий материализм, начисто ее отрицавший, своей направленностью на объективное изучение мира сами с собой сыграли злую шутку. Начиная с Декарта, Ньютона и Кеплера процессы познания устройства мира все более и более сдвигались в сторону математики: сначала физики подбирали формулы под результаты опыта, потом, глядя уже только на разрозненные формулы, они начали объединять их в системы уравнений, затем выяснили, что во многих уравнениях физики есть общие закономерности. В результате механика — физическая наука — стала разделом уже не физики, а математики. В XX в. с продвижением к пределу точности измерений и величине используемой в опыте энергии процедура познания мега и микро мира, по сути, свелась исключительно к математической деятельности. И воинствующие материалисты чуть было не упустили момент, когда их сугубо материальный мир вдруг оказался подчинен самой что ни на есть идеалистической системе. Но надо отдать должное классовому (и философскому) чутью непримиримых идеологов материализма, таки нашедших надлежащие эпитеты кибернетике, теории относительности, а заодно и генетике.

Но в итоге все встало на свои места. Физика XX и XXI вв. — физика «элементарных» частиц, их структур и взаимодействий, физика вселенной в целом и ее составляющих — все это превратилось в разделы математики. Более того, с легкой руки Эйнштейна невидимые (и, возможно, несуществующие¹⁾) физические поля обрели визуально различимые контуры геометрических фигур. Этот процесс всеобъемлющей математизации науки о природе вещей ширится из года в год, все чаще оставляя опыту лишь функции контроля предсказаний, сделанных из соображений чистого идеализма. К сожалению, и в этом процессе наметился кризис бессилия: несмотря на тысячи статей, ежегодно публикуемых в мировой физико-математической периодике, прогресс в дальнейшем понимании сути вещей затормозился. Бури и штормы великих экспериментальных и теоретических открытий, сотрясавшие океан познания в начале прошлого века, все более сменяются покойной зыбью бессчетного множества не слишком разнообразных теорий, состоятельность которых обеспечивается рейдами всепоглощающего математического монстра — принципа экстремума действия. Картина абсурда

¹⁾Поскольку существуют теории дальнего действия, где поля отсутствуют.

для «не измышлявшего гипотез» Исаака Ньютона: абсолютная абстракция правит физическим миром.

Но все же попробуем детальнее разобраться, какую роль играет математика в описываемой ситуации, проанализировав ее с использованием системы вышеприведенных понятий.

Чувственное восприятие мира, полученное и многократно подтвержденное в физическом эксперименте, есть информация сознания исследователя. Она может быть (и чаще всего является) неточной, искажающей абсолютную информацию, имманентно содержащуюся в объекте исследования — пусть это будет некоторая физическая закономерность. Сегодняшний уровень развития научной методики предполагает, что данное наблюдение должно быть представлено в форме, доступной и воспринимаемой чужими сознаниями наиболее эффективно. Эта форма — математическая запись данной закономерности, не претерпевающая никаких изменений при передаче от одного сознания к другому, поскольку абсолютная математическая информация тождественна информации сознания. Распространенная таким образом информация более не искажается. Однако чаще всего трудно сказать, насколько точно полученные опытные данные соответствуют эмпирически подобранной для них математической записи, а значит, насколько верно предложенная формула соответствует абсолютной информации, имманентной исследуемой закономерности.

История физики знает множество примеров таких ошибочных «законов», достаточно вспомнить древнюю геоцентрическую геометрию (что тоже — «математическая запись») модели вселенной. Сравнительно недавний и не менее известный пример — «закон» Рэля—Джинса для излучения черного тела, безукоризненный с точки зрения классической физики, но предрекающий ультрафиолетовую катастрофу, в природе не наблюдаемую. Предыдущая, базовая информация сознания авторов «закона» оказалась недостаточной, по сути, ложной по отношению к абсолютной информации, имманентной процессу излучения, и, опираясь на эту искаженную информацию, они для вывода своей формулы использовали, как выяснилось, «неправильную математику», которая была адекватна законам известной им физики (которая теперь называется классической). Решение проблемы нашел Макс Планк, с точки зрения метода — эвристически (сделал открытие). Однако он не просто «догадался», что свет может излучаться и поглощаться строго определенными порциями: о корпускулярной природе света говорили и спорили уже во времена Ньютона. Но одной этой гипотезы явно не хватило для зарождения квантовой механики. Планк обладал уже существенно более обширными и точными сведениями об излучении (впрочем, теми же, что и авторы ультрафиолетовой катастрофы) и хорошо умел переводить информацию сознания на язык математики — это была необходимая, но, как показал «закон» Рэля—Джинса, не достаточная база для возникновения новой модели в данном частном сознании. Технология собственно открытия,

возникновения новой идеи, состояла в том, что настойчивые и глубокие размышления Планка над проблемой так настроили его «информационную антенну», придали ей тот уровень сложности и ту степень соответствия теме размышлений, которые оказались достаточными для «приема» присущей исследуемому явлению части абсолютной информации, *всегда существующей в окружающем мире*.

Последнее хотелось бы еще раз подчеркнуть. Абсолютная информация о любом объекте (вещи, явлении, понятии) *существует всегда* и доступна для восприятия информационной системой человека. Частично она считывается датчиками физического мира, ощущается как чувства и передается в информационную систему для обработки, частично — воспринимается и обрабатывается непосредственно логической и нелогической частями информационной системы. Развитие физико-математических теорий — один из видов такой непосредственной деятельности логической части, но собственно момент создания совершенно новой информации сознания, момент открытия, «гениальное озарение»¹⁾ — это акт трансцендентного получения части абсолютной информации информационной системой человека. Недостаточно хорошо (по сложности и гармоничности — «соответствию теме») «настроенная антенна», но, тем не менее, направленная на некоторое решение, может получить весьма искаженный образ информации абсолютной. Будучи затем переведенной на универсальный язык математики, она приобретает в человеческой среде магическую силу, поскольку теперь это записанное в формулах искажение истины наделяется чертами свойственной математике непререкаемой тождественности абсолютной информации и информации сознания.

В последнее столетие, когда направление поиска физических закономерностей заметно сместилось в область уже не физической, а чисто математической эмпирики, ситуация не слишком изменилась, а, пожалуй, даже ухудшилась. Если раньше под результаты опыта могла быть подобрана формула, неточно соответствующая или вообще не соответствующая истинной закономерности явления, то в сфере математической эмпирики, когда делаются попытки найти общие закономерности среди уже известных формул, несовершенство первичной информации сознания может повлечь за собой следующую системную ошибку. И это не только умозрительное предположение, а, скорее, реальное подозрение. Представляется, что каждый серьезный исследователь обязан когда-то *сам себе* задать вопрос: есть ли среди современных ему «законов» физики те, которые следует признать абсолютной истинной? Включая законы электродинамики Максвелла, теорию относительности Эйнштейна, теорию спинорных полей Дирака и теорию кварков Гелл-Манна? Скорее всего, в ответе самому себе исследователь

¹⁾ Уильям Гамильтон открыл алгебру кватернионов во «вспышке гениального озарения» — так потом написали на мемориальной табличке в Дублине.

услышит собственное сомнение в том, что в каждой из перечисленных областей физики ему известно абсолютно все. Но как идти к истине? Подбирать, как прежде, формулы под результаты эксперимента? Даже уже не с каждым веком, а с каждым годом это делать все труднее: отпущенные человечеству лимиты точности измерений и величины энергий, по-видимому, заканчиваются, хотя, конечно, в качестве лаборатории остается вселенная, впрочем, не слишком доступная даже для наблюдения явлений. Скажут: остается единственное — строить математические модели физических объектов и имитации явлений — теории фундаментальных сил, объединенных взаимодействий, «геометрических полей», струн и суперструн. . . Как строить — известно: придумываем функционал действия, варьируем, получаем уравнения. Добытый в недрах неточной науки, классической механики, принцип экстремума действия, как уже отмечалось, овладел физическим миром. Другого столь же универсального метода построения физических моделей пока нет. И иногда он, действительно, работает неплохо, вспомним теорию электрослабых взаимодействий. Но если вдуматься, процесс подбора функционалов по своей сути мало отличается от процессов физической эмпирики, которую теоретики снисходительно называли «ползучей». Так, если астрономы вдруг замечают, что галактики «разбегаются» быстрее, чем это предсказывает общая теория относительности, то теоретикам приходится подправлять функционал действия для гравитационных сил, добавляя в него, например, слагаемое темной энергии.

Здесь для контраста полезно заметить, что ни один из «реально действующих» физических законов не был открыт варьированием функционала действия — ни уравнения динамики Ньютона, ни уравнения электромагнитных взаимодействий, ни «закон всемирного тяготения», ни уравнения гравитации Эйнштейна, ни уравнения фермионных полей Дирака. И только *потом*, когда уравнения всех этих теорий были уже написаны, для них *подобрали* функционалы действия. По известным причинам вне вышеприведенного списка остаются теория относительности, термодинамика и статистическая физика, квантовая механика, квантовая теория поля, классификации элементарных частиц.

Понятно, что интенсивные занятия вышеописанной математической эмпирикой в процессе познания физического мира постепенно должны завести исследования в тупик, поскольку невозможно придумать бесконечное количество «хороших» функционалов. Это торможение прогресса в теоретической физике, уже упомянутое выше, действительно стало заметным в последние десятилетия. Но, помимо ограничения перспективы, метод математической эмпирики, как некой дымовой завесой застилает сущность отношений физического мира и математики, о которых говорили Пифагор, Платон, Николай Кузанский, Эммануил Кант, Давид Гильберт и Герман Вейль, отношений истинной фундаментальной взаимозависимости. Те же, кто занят игрой случайных математических проб и ошибок, не

в состоянии постичь глубинной сущности математики и ее роли, для них она была, есть и останется удобным инструментом, искусственно созданным языком, на котором информацию одного частного сознания можно аккуратно донести до чужого частного сознания. Таким образом, идеи, в подавляющем большинстве случаев искаженные по отношению к абсолютной истине, вначале утверждаются в группе экспертов, становятся «законами», потом переключиваются в учебники, в школы, овладевают массами, и, бывает, физически реализуются в виде столь же искаженных, несправедливых материальных сил¹⁾.

Но давайте встанем на точку зрения тех, кто стоит по «другую сторону» барьера, считает, пусть предположительно, информационную систему человека своего рода самостоятельной сущностью, вложенной в его тело. Тогда ответ на вопрос, «зачем это сделано?» не приходится мучительно искать: информационные системы существуют для того, чтобы обрабатывать информацию — получать, изменять, хранить, передавать и — *создавать*. Последнее — явление загадочное. Никто не знает механизма создания новой информации. Но что значит — новой? Если говорить о проблемах устройства мира, а именно они здесь, в основном, и обсуждаются, то речь очевидно идет об информации, новой для нашего знания об этом мире. Однако, как отмечалось выше, эта информация всегда есть и она абсолютна, только ее нужно суметь принять и обратить в информацию сознания, по возможности, максимально высококачественную. Иначе говоря, создание «новой информации» есть не что иное как процесс более или менее точной трансляции абсолютной информации (ее части) сначала в частное, затем — в общественное сознание, по сути, в физический мир. Математические законы и соотношения транслируются человеком сразу тождественно истине — абсолютно точно. Но раз транслируются, значит, они — эти законы и соотношения — являют собой объективную сущность и «где-то должны быть».

Вопросом «где?» — и не только по отношению к математике, и даже, в первую очередь, не к ней, озадачивались многие; здесь часто цитируются великий математик (Готфрид Лейбниц), и философ-богослов (Павел Флоренский). «Где» тот сверхъестественный мир, в котором обретаются высшие силы? — вот тема их поиска. Оба обратились к абсолютной абстракции — множеству мнимых чисел, не имеющему аналога в физическом мире. Но если математик связывал одномерное мнимое пространство с обителью божественной сущности все же, видимо, с тайным скепсисом, то философ, получивший и математическое образование, шел дальше. Он настойчиво вводил более вместительное двумерное пространство, а после прочтения трудов Эйнштейна по специальной теории относительности

¹⁾См. статью: Ефремов А. П., «Древняя религия и современная наука», Метафизика. Век XXI, вып. 3, 2009.

пришел к выводу, что на периферии нашей планетной системы все пространство вселенной должно быть мнимым¹⁾.

Но, обсуждая работы исследователей прошлых — и уже далеких — лет, нельзя не отметить глубину и мощь их интуиции, той части информационной системы, что получает информацию в нелогической, свернутой форме, по сути, «готовой к употреблению» — даже если она бывает искаженной. Так, Флоренский в своем поиске многомерного мнимого пространства, наверное, сам того не подозревая, использовал свойства той математики, которая модельно оказалась гораздо богаче и точнее, чем его искусственные построения. Сложно сказать, знал ли он что-либо об алгебраических работах Уильяма Гамильтона, по-видимому, нет. И, тем не менее, основой своих рассуждений он избрал именно ту часть гамильтоновой алгебры, которая наиболее ярко выделяет ее среди иных, и которая благодаря упрощениям Гиббса и Хэвисайда вошла в курс векторной алгебры как векторное произведение. Это искусственно выделенное алгебраическое действие на самом деле есть некоммутативная часть результата умножения особых чисел — кватернионов, открытых Гамильтоном в середине XIX в.

Теперь, вспоминая парадигму Пифагора, в концентрированной форме звучащую афоризмом «мир есть число», можно задать вопрос, о каких числах, о какой математике идет речь? Физическая и математическая эмпирика в этом смысле «всеядны»: подходит, наверное, любая область любой как угодно сложной математики, лишь бы подобранная (подогнанная) формула или модель давала удовлетворительное совпадение с данными опыта или обобщала уже известные «физические законы». Однако блуждать вслепую, без маяков — в тщетных поисках фарватера — дело почти безнадежное. Для ориентирования в океане математики потребовались «реперные точки и лекала». Физики это поняли довольно быстро и стали приспосабливать под свои нужды не всю математику в целом, а наиболее соответствующие поставленным задачам ее разделы. Для студентов-физиков даже были введены специальные дисциплины, среди которых «методы математической физики», «вариационное исчисление», «теория групп». Кстати, о группах: в математике группа — одна из наиболее простых алгебраических систем — множество с малым набором заданных в нем математических операций. В исследованиях физиков XX в. выяснилось, что эти простые множества весьма содержательны и чрезвычайно, можно сказать, естественно удобны как для описания физических ситуаций и взаимодействий (непрерывные группы), так и для классификации физических частиц (дискретные группы). Причина этого «естественного удобства» состоит в том, что каждая группа

¹⁾См. Флоренский П. А., «Мнимости в геометрии. Расширение области двумерных образов геометрии», а также и текст доклада Ефремов А. П. «Теория мнимостей Павла Флоренского» на сайте www.cosmology.su, раздел «наука» — «философия» (<http://www.cosmology.su/file.php?id=263>).

задает определенную симметрию — абстракцию, тем не менее, тесно связанную с геометрическим представлением, которое в информационной системе человека может трансформироваться в свойственные физическому миру визуальные образы. Поэтому те, кто сомневается в объективной независимости математики от сознания, могут полагать, что собственными (хотя в реальности отсутствующими) симметриями вращений и перестановок физический мир оказал влияние на процесс возникновения теории групп. Хотя ее история содержит удивительные эпизоды открытий, «гениальных озарений» в умах ее создателей, «работавших», как Галуа, с абсолютными абстракциями.

Другой, более сложный вид математических структур, «популярных» в физике, представлен алгебрами. Говоря упрощенно, алгебра — это множество с большим, чем в группе, числом определенных операций и элементов. Широко известный пример — алгебра действительных чисел, для которых определены ноль и единица, а также изученные еще в средней школе действия с «хорошими» свойствами: сложение, умножение, деление. В течение столетий эта алгебра считалась уникальной математической структурой, единственно подходящей для описания физических процессов. Все «законы» физики практически до конца XIX в. были «похожи» на математику действительных чисел. В информационных системах исследователей, да и всех образованных людей, источники взаимодействий представлялись как счетные или распределенные в пространстве, но вполне реальные тела с определенными траекториями, скоростями и ускорениями. Переносчиками взаимодействий служили среды, подобные невидимым жидкостям или невесомым и тоже невидимым упругим мембранам — физические поля, имеющие свои реальные характеристики, над которыми можно было производить те же операции, что и над элементами алгебры действительных чисел.

Предвестником нового понимания физики стали уравнения Максвелла, но — в обсуждаемом аспекте — не своим сущностным содержанием и даже не гармонией синтеза разрозненных законов электричества и магнетизма, а тем, что автор использовал для их формулировки совершенно новую математику — алгебру кватернионов Гамильтона. Однако этот далеко не случайный факт остался всего лишь частью истории: первая запись уравнений электродинамики обогнала свое время, не нашла понимания и последователей, и дальнейшее развитие этой теории оторвалось от своих истинных математических корней. Информация сознания предпочла упрощенную, более для нее технологичную математическую базу: векторную алгебру и анализ.

По-настоящему серьезный шаг к признанию математики как отражения физики был сделан Германом Минковским, предложившим для специальной теории относительности геометрическую модель пространства-времени. Тем самым впервые в истории физики вводилось новое время — не договорное, базирующееся на механике периодических процессов, а геометрическое, связанное с фактом существования фундаментальной скорости. По сути дела, одна абстракция, не данная человеку в ощущениях, величина

скорости света в вакууме, породила следующую абсолютную абстракцию — геометрическое время, имеющее точно такие же свойства, как любая из размерностей физического пространства.

Но, пожалуй, самое главное в модели Минковского состояло в том, что он представил время как размерность, мнимую по отношению к размерностям трехмерного мира. Это было настоящее эвристическое открытие, полученная трансцендентным путем информация. Хотя казалось (и, наверно, автору открытия тоже), что она подкрепляется логическим желанием зачем-то сохранить знакопостоянство четырехмерной метрики пространства-времени. И именно эта кажущаяся логическая мотивация не была воспринята информацией сознания подавляющего большинства исследований; в результате они отказались от мнимого времени и вместо него ввели знакопеременную метрику. В этом несложно усмотреть «детскую» приверженность математике действительных чисел, «похожих» на окружающий мир, и незрелость информационных систем, их неспособность признать сущностными мнимые числа — абсолютные абстракции, не имеющие аналогов в природе.

Впрочем, нельзя сказать, что математика мнимых и комплексных чисел «зачем-то» изучаемая и развиваемая математиками, не использовалась в физике столетней давности. Она успешно применялась для описания, например, волновых процессов, но в «урезанном виде»: мнимые слагаемые, возникающие при расчете наблюдаемых величин, как правило, не считались физически состоятельными. Во всех подобных случаях математика комплексных чисел воспринималась исключительно как удобный инструмент для описания физики. Ситуация резко изменилась в период создания квантовой механики. Последней попыткой обойтись без мнимых чисел для описания микроструктур явилась теория Бора, предложившего, как известно, квантовать адиабатический инвариант классической механики; эта попытка не стала успешной. Усилиями де Бройля, Шрёдингера, Гейзенберга, Борна, Паули, Фейнмана «действующая» квантовая механика была создана. Специалисты знают, насколько эта теории оказалась отличной от «стандартных классических» представлений о сущности физических величин и явлений, но акцент хотелось бы сделать не на этом. Одной из самых поразительных черт механики микромира явилась жесткая необходимость участия в ее содержании математики комплексных чисел. Естественно, лишь часть известных разделов этой математики вошла в формулировку квантовой теории, но именно эти разделы, связанные с определением операторов и наличием пространств комплексных функций, дифференцируемых в квадрате, оказались неотъемлемой частью сущностного содержания новой физики. Последнее словосочетание — «новая физика» — не оговорка. Человеческое сознание впервые пришло к необходимости привлечь не имеющие «физических двойников» математические структуры для описания чувственно не воспринимаемых и модельно непредставимых объектов и явлений. Как и их «классические» предшественники, подобные свойственной им математике

реальных чисел, основные фигуранты новой физики — функции состояния и операторы (за исключением оператора координаты) оказались в значительной степени «похожими» на естественную для них математику комплексных чисел. Помимо математических свойств, это сходство более всего обнаружилось в том, что, как для мнимых чисел, для них не нашлось никакого визуально представимого, геометрического воплощения, даже идеального¹⁾.

Однако «похожим» на алгебру комплексных чисел в квантовой механике оказалось не всё. В теле теории появились важные для ее сути математические объекты — коммутационные соотношения операторов; выяснилось, что заметная часть таких соотношений имеет свойства, не укладывающиеся в рамки задействованной математики. Умножение целого ряда операторов оказалось непрерывным, и это было свойство уже не алгебры комплексных чисел, а совсем другой алгебры. Поскольку, как и прежние физические теории, квантовая механика создавалась методом математической эмпирики с элементами эвристики, ее математическая база была эклектичной: настроенные на поток тематической информации «антенны» исследователей, все же недостаточно совершенные, выхватывали из этого потока фрагменты истины и складывали их, как элементы мозаики, в новую очень сложную для понимания теорию. Это были гениальные люди, и они сделали великое дело. Дальнейшее развитие теории Дираком, появление ее релятивистской версии привело к предсказанию позитрона, который вскоре был реально обнаружен.

Но спиноры Дирака (а чуть раньше — функции состояния в уравнениях Паули) уже явно не были элементами алгебры комплексных чисел. В фундаменте физики микромира все более и более настойчиво вырисовывались контуры еще более сложной математики, открытой почти за век до триумфа теории Дирака и являющей собой еще более трудно представимую абсолютную информацию: это была алгебра кватернионов, предрекающая существование мнимого трехмерного мира. Исследования алгебры кватернионных чисел и в целом кватернионной математики как, наверное, исследование и применение никакой другой математики помогло продемонстрировать, что именно лежит «за» физикой, ее реальными объектами и явлениями. Убедительность и достоверность этой демонстрации проявилась, как минимум, в двух уровнях.

Первый уровень достоверности — неожиданное обнаружение в структуре математики кватернионных чисел значительного числа известных ранее результатов физической и математической эмпирики. Здесь стоит напомнить, что алгебра кватернионов, открытая Уильямом Гамильтоном в 1843 г., —

¹⁾В последних работах автора, посвященных структуре комплексных, двойных, дуальных кватернионных и бикватернионных чисел предложена новая геометрическая модель комплексного числа, а также геометрическая интерпретация спинорных функций, родственных функции состояния квантовой механики; см. публикации 2010 г. в журналах *Gravitation & Cosmology*, *Advanced Science Letters*, а также ссылки на сайте www.cosmology.su.

это третья среди всех возможных «хороших» алгебр, допускающих для входящих в них элементов «привычные» операции: сложение (вычитание), умножение и деление при определяемых базовых элементах. В алгебре действительных чисел эти элементы — ноль и единица, в алгебре комплексных чисел — ноль, единица и мнимая единица. В алгебре кватернионов эти базовые элементы — ноль, одна действительная единица, а также три мнимых единицы, квадрат каждой из которых есть отрицательная действительная единица. Яркой особенностью этой алгебры является не обязательная перестановочность сомножителей ее элементов: одни элементы (числа) безразличны к порядку своего расположения в действии умножения, результат произведения других элементов зависит от их места — справа или слева. В целом умножение чисел из алгебры кватернионов некоммутативно; вспомним, что такими же свойствами обладают некоторые операторы квантовой физики, однако, это далеко не единственное сходство. Еще в период раннего изучения математики кватернионов было замечено, что три ее базисные мнимые единицы «ведут себя» так, будто являются отражением геометрической структуры: триадой направляющих векторов прямоугольной системы координат. Это был поразительный факт, свидетельствующий о глубочайшей взаимосвязи абсолютной абстракции — алгебры, с одной стороны, а с другой — визуально представимой, т. е. почти физической геометрической конфигурации, которую Рене Декарт, не имевший ни малейшего представления о кватернионах, ввел эвристически, открыл. Но оказалось, что абсолютная информация о декартовой системе координат имманентно присуща математике кватернионов, и она всегда была и остается объективной идеальной сущностью.

То же можно сказать и о множестве других «проявлений физики» в математике кватернионов. Среди них — возможность автоматического описания динамики тел в произвольных неинерциальных системах отсчета классической механики, вывод (а не эвристическая запись) уравнения Паули для заряженной квантовомеханической частицы во внешнем магнитном поле, естественное появление спинорных структур как элементарных «кирпичиков» кватернионных чисел. Особо можно выделить феноменальный результат австрийского математика Рудольфа Фютера, полученный им в 30-х гг. прошлого века; он показал, что чисто математическое условие дифференцируемости функции кватернионного переменного тождественно системе уравнений электродинамики Максвелла в вакууме. Наконец, одно из недавних исследований показало, что чисто геометрическая характеристика трехмерного пространства, содержащего кватернионную неметричность, — тензор кривизны — формально тождественен напряженности поля Янга—Миллса, которая в физике используется для описания сильных взаимодействий.

Эти многочисленные «кватернионные совпадения» (а открыты, конечно, еще не все) показывают, что в самой структуре математики может содержаться запись физических законов, ранее возникших и сформулированных

в информационных системах человека в результате логических действий (осмысления эмпирических данных) и/или полученных трансцендентно (открытых эвристически). И здесь уже речь может идти не только о группах или о «хороших» алгебрах, которыми огромное множество математических структур отнюдь не ограничивается. Что из этого множества отвечает «нашей» физике, что — нет, пока сказать сложно, и здесь это не цель. Важен и очевиден другой факт: тайное учение Пифагора о некоем первенстве чисел сегодня, спустя два с половиной тысячелетия, вдруг снова становится актуальным. Постепенно выясняется, и это уже вопрос не только религиозной или научной веры, что «за» физическим миром оказывается его идеальный метафизический двойник — математика. Пусть «не вся», но представленная целым рядом своих «высокоорганизованных» структур, в частности, исключительных алгебр. Таких алгебр на сегодняшний день известно всего четыре. Это уже упомянутые выше алгебры действительных, комплексных и кватернионных чисел, а также алгебра октонионов (или октав), в которой базисными являются восемь единиц; умножение элементов этой алгебры теряет не только свойство коммутативности, но и ассоциативности, т. е. существенной в этой алгебре является и последовательность умножения нескольких элементов. Тем не менее, в этой алгебре, как и в трех предыдущих по числу размерностей, существует так называемое тождество квадратов (в данном случае — восьми), и тем самым алгебра октав причислена к числу исключительных. Больше таких «хороших» алгебр нет, что доказывается знаменитыми теоремами Фробениуса—Гурвица.

Но пора сказать о втором уровне достоверности, тесно связанном с идеями Платона.

О «параллельных мирах» и метаматематике

Поиск известных физических закономерностей в математических структурах не ограничился перечисленными выше результатами. Автору данной работы удалось заметить, что в структуре той же математики кватернионов «закодирована» обширная серия экспериментально проверенных физических закономерностей, описание которых до последнего времени осуществлялось эвристической математической моделью, которая носит название теории относительности. Среди этих закономерностей — эффекты специальной теории относительности Эйнштейна, модельно связанной с «плоским» четырехмерным пространством-временем Минковского, — сокращение масштабов длин и времени в различных системах отсчета, релятивистское правило сложения скоростей, абберация и эффект Доплера. Для расчета этих эффектов приходится считать, что системы отсчета различных наблюдателей движутся относительно друг друга с постоянной скоростью, поскольку специальная теория относительности не предназначена для описания неинерциальных движений наблюдателей, и рассмотрение в ее рамках

произвольных сложных движений тел чрезвычайно затруднено. Задачи же неинерциального движения можно решать методами дифференциальной геометрии, свойственными «следующей» теории Эйнштейна — общей теории относительности. Однако основным результатом использования этих методов явилась геометризация физической силы — гравитации, модельно связанной с искривлением четырехмерного пространственно-временного мира. Специалистам известно, что тензорная математика теории гравитации, во-первых, весьма сложная сама по себе, в применении к описанию неинерциальных движений требует искусственного введения ряда дополнительных условий, связанных, в частности, с правилами переноса векторов и освобождения от «лишних» компонент физических величин.

Понятно, что несовершенство этих, тем не менее, великих теорий есть результат метода их построения — эмпирического подбора или эвристического открытия общих (или принципиально иных) формул, которым в некотором пределе соответствуют уже известные математические образы физических законов.

Применение другого метода — исследования собственно математической структуры, в данном случае векторных единиц кватернионной алгебры, — привело к иному, весьма нестандартному, но интересному результату. Оказалось, что группа разрешенных преобразований кватернионных единиц (которые, напомним, геометрически эквивалентны направляющим векторам декартовой системы координат) — это группа трехмерных вращений над полем комплексных чисел, эквивалентная группе Лоренца, на которой строится специальная теория относительности Эйнштейна. Далее выяснилось, что математическая величина, которая остается инвариантной относительно группы вращений, есть не что иное как кватернионный «корень квадратный» из базовой величины теории относительности — интервала пространства-времени Минковского. Таким образом, в структуре математики кватернионов «автоматически нашлась» специфическая формулировка теории относительного движения и взаимодействия тел, естественно содержащая все ранее известные результаты стандартной релятивистской теории. Но, кроме того, векторная форма наблюдаемых величин в новой версии позволила легко формулировать и решать любые задачи, связанные с неинерциальным движением тел и систем отсчета наблюдателя, без привлечения каких-либо искусственных дополнительных условий. Решения целого ряда таких задач были получены и опубликованы в течение последних двух лет¹⁾.

Однако отличительной особенностью новой версии релятивистской теории оказалась геометрия пространства и времени. Во-первых, время, как

¹⁾ Yefremov A. P.: «Quaternion Model of Relativity: Solutions for Non-Inertial Motions and New Effects» Adv. Sci. Lett. 1, 2008, P. 179–186; «Newton-type Dynamic in Quaternion Model of Relativity», Adv. Sci. Lett. 2, 2009, P. 81–85; «Solutions of Dynamic Equations in Quaternion Model of Relativity», Adv. Sci. Lett. 3, 2010, P. 236–240.

и в ранней модели Минковского, является геометрической характеристикой «кватернионной» модели вселенной (пока что «плоской»), т. е., по сути, длиной — но математически мнимой по отношению к длине физического пространства; и этот факт взаимной мнимости геометрий пространства и времени *принципиально не устраним*, поскольку в новой версии базовой величиной является не абстрактный метрический тензор (сигнатура которого может быть подобрана так, чтобы устранить мнимость), а векторная, по сути своей, близкая к физике геометрическая величина. И если геометрическое время определяется как математически мнимая величина, то это означает, что эта «длина» не может физически (визуально) наблюдаться. Но это не означает, что этой длины нет. Более того, — и это самое главное — таких мнимых независимых длин в кватернионной модели три. Иными словами, помимо обычного физического пространства, имманентно присущая структуре кватернионной алгебры модель вселенной предусматривает наличие еще одного трехмерного пространства, мнимого по отношению к нашему трехмерному миру. Этот второй, «параллельный» мир образован тремя линейными размерностями, каждая из которых может быть трактована (в духе работ Минковского) как размерность геометрического времени. В общем случае свойственным этому «мнимому» миру оказывается трехмерный вектор, длина (модуль) которого имеет смысл изменения геометрического времени. Коэффициентом пропорциональности между изменением координат (модулем вектора перемещения) в физическом мире и изменением времени в нефизическом (мнимом) трехмерном мире удобно принять постоянную фундаментальную скорость равной 1 единиц длины/единиц времени (скорость света в вакууме). Математические исследования показывают, что для частиц физического мира мнимый мир недоступен, величина фундаментальной скорости является для них непреодолимым барьером.

Следует признать, что наличие невидимого и недостижимого второго мира в описываемой модели вселенной — весьма непривычное свойство этой модели. Существенно, однако, что это — не эмпирическая и не эвристическая модель. Она — следствие логического анализа содержания исключительной («хорошей») алгебры, т. е. — определенная информация сознания, в данном случае тождественная абсолютной информации. И принятие или отрицание этой модели частным сознанием есть проблема соответствующей компетенции, никак не зависящая от объективного существования данной математической структуры.

Предположим, что некое частное сознание считает модель дуальной — состоящей из двух разделенных световым барьером трехмерных миров — соответствующей реальной ситуации. Тогда это сознание не может не озадачиться следующим вопросом: есть ли в «параллельном» мнимом мире какие-то объекты (раз мир объективен), кроме векторов геометрического времени? Подразумевая, конечно, что когда-то кое-что уже было сказано о двух мирах и их содержании. Действительно, в нашем физическом пространстве (если

считать его объективной сущностью) помимо трех размерностей, впрочем, никак не обозначенных, определенно наблюдаются частицы, из которых формируются тела, а может быть, и переносчики взаимодействий. В кватернионной модели существуют очень простые преобразования координат, которые «переносят» наблюдателя из одного мира в другой. При этом наблюдатель видит бывший «параллельный» мир как физический, а бывший физический мир для него становится мнимым; т. е. разделенные барьером два трехмерных мира данной модели симметричны. Это обстоятельство позволяет предположить, что и во втором мире, помимо мнимых размерностей (тоже никак не обозначенных) могут находиться некие объекты. Но для наблюдателя из первого мира эти объекты мира второго *идеальны*, т. е. для информационной системы человека «параллельный» мир — это мир идей — точно по Платону. Высокая симметрия модели и некоторые другие соображения заставляют предположить, что физические и идеальные объекты двух миров могут иметь отношение друг к другу. Эта гипотеза, в частности, подтверждается и тем фактом, что целый ряд «высокоорганизованных» математических структур содержит в качестве их неотъемлемых частей идеальные отражения структур и закономерностей, свойственных физическому миру. Можно сказать, что «за» физическим миром в похожем на него, но «параллельном», мнимом мире «лежат» идеальные математические конструкции, содержащие абсолютную информацию о материальных телах и физических законах.

Но поскольку существенной характеристикой данной модели является высокий уровень ее геометрической симметрии, любое из двух трехмерных взаимно мнимых пространств может быть для наблюдателя физическим миром. Тогда второе трехмерное пространство автоматически оказывается «местом пребывания» идеальных объектов. И если гипотетически предположить условно «одновременное» наличие двух наблюдателей в двух «параллельных» мирах, то физический мир одного будет для другого миром платоновых эйдосов, «имманентных способов бытия вещей», если угодно, мировым банком абсолютной информации о сути всех физических вещей и явлений. Всякая же логически структурированная информация сущностно являет собой одну из областей математики.

Такая зеркальная симметрия обсуждаемой модели позволяет высказать предположение об истоках происхождения самой математики или, по крайней мере, ряда ее «высокоорганизованных», «исключительных» разделов, и тем самым замкнуть линию рассуждений. Если метафизические образы вещей и явлений оказываются представленными определенными математическими структурами, то метаматематическими образами собственно разделов математики должны быть объекты и явления физического мира. Ибо для наблюдателя в любом из двух трехмерных пространств кватернионной модели вселенной банк абсолютной информации оказывается «размещенным» в дуальном ему мире, мнимом пространстве. Здесь полезно заметить, что в новой ситуации термин «мнимое» уже теряет тот смысл, который

ему приписывался при введении столетия назад — как нечто, принадлежащее исключительно разуму, информации сознания. Математически мнимое пространство оказывается таким же реальным, как и то, в котором обретается человечество и вся доступная его наблюдениям часть вселенной, но это второе пространство «не видно», его от наблюдения «загораживает» световой барьер. Представляется существенным, что этот барьер имеет конечную высоту. До настоящего времени нет никаких экспериментальных свидетельств того, что все физические взаимодействия, как и волновые электромагнитные, передаются в пустоте с фундаментальной скоростью, хотя это обычно предполагается в современной теоретической физике. Каковы агенты и технология передачи информации «через барьер» в информационную систему человека пока не известно. На эту тему можно фантазировать, но лучший способ прихода к пониманию сути происходящего все же — продолжение научных исследований, поиск и изучение скрытых в математических глубинах и имманентно им присущих моделей физического мира.

Заключение. Апология математики

В своем замечательном труде «Апология математика»¹⁾ известный английский математик Готфри Харди самому себе задал вопрос: что служит оправданием жизни математика? Иными словами, *зачем* человек профессионально (или даже непрофессионально) занимается математикой? Среди множества причин Харди усмотрел также и ту, о которой в ряде своих предыдущих работ высказывался и автор данной статьи, отмечая наличие в информационных системах некоторых людей присутствие некоей побуждающей и непобедимой идеи, всесильного императива — стремления к познанию устройства мира. Известнейших примеров множество. Вряд ли Галилей слеп, глядя в свой телескоп, а Фарадей не расставался со своими рамками и магнитами в ожидании премий и наград. Их-то, как правило, не было, а вот неприятностей — сколько угодно. Трагическое завершение жизненного пути Бруно и Больцмана — ярчайшие подтверждения этого тезиса. Факт налицо: таким людям беспричинно *необходимо* заниматься наукой, даже если эта наука являет собой абсолютную абстракцию.

Математика — синтез высших абстракций. Она существует объективно и всегда, как объективен и вечен физический мир — в любых известных и пока не известных его проявлениях. Математика, безусловно, не создается, но открывается; не сразу, а постепенно, по мере взросления человечества и повышения качеств составляющих его информационных систем. Математика не только описывает но, по всей видимости, и содержит в себе как зеркальное отражение глубинную суть вещей и явлений, как вещам

¹⁾<http://www.ega-math.narod.ru/Math/Hardy.htm>

и явлениям имманентны структуры и закономерности, сущностно отражающие содержание различных областей и разделов математики. Математика — один из тех немногих объектов вселенной, присущая которым абсолютная информация порождает тождественную себе информацию сознания. И как никакой другой объект вселенной математика может продемонстрировать сознанию (и постоянно делает это), что мир, в котором живет человечество и вселенная в целом — совсем не таковы, какими они кажутся, а гораздо сложнее. Всегда были, в настоящее время есть и будут люди, которые не могут не заниматься математикой и изучают ее не как прикладную, но как фундаментальную науку, не имеющую прикладного значения не только в обозримом будущем, но, возможно, не имеющую такого значения вообще. Это знание может приходить и приходит к исследователям математики в виде трансцендентного акта передачи информации из «вселенского банка данных» или от других людей, но каким путем это знание не пришло бы, оно всегда остается истинным.

В качестве иллюстрации ко всему вышесказанному хочется привести отрывок из книги античного философа Ямвлиха, главы сирийской школы неоплатонизма, и тем закончить эту работу. Вот слова Ямвлиха о Пифагоре:

«Он думал, что ему одному на земле понятны и слышны космические звуки, и от этого природного источника и корня он считал себя способным учиться и учить других и уподобиться небесным существам соответственно стремлению и способности подражания, поскольку он один был так счастливо наделен породившим его божественным началом».



Фоменко А. Т.
Замечательные числа «пи» и «е»

Число, геометрия и физическая реальность

Д. Г. Павлов¹⁾

«Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. . . Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций в физике. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известной мере оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность.»

А. Эйнштейн

«Все сущее — суть числа.»

Пифагор

Несмотря на то, что большинство ученых, оценивая роль физики и математики в отношении познания человеком окружающего мира, на первый план выдвигают практический опыт и эксперимент, т. е. исходят из первичности физических построений, за которыми лишь в качестве инструмента для описания следуют специально подобранные математические конструкции, некоторые исследователи убеждены в возможности и целесообразности прямо противоположного подхода. То есть, когда не опыт выступает источником идей и представлений ученого об окружающем его мире, а сама математика, причем в лице наиболее красивых и простых своих элементов. Конечно же, такой подход применим далеко не всегда, а лишь в отдельных и достаточно редких случаях, однако тем ценнее должны представляться те знания о Вселенной, для которых достаточно абстрактных математических структур.

На первый взгляд представляется, что подобный подход имеет слишком незначительные шансы на успех из-за огромного количества различных математических конструкций, что могли бы выступать в качестве потенциальной основы для такого рода поисков. Однако круг вероятных кандидатов можно весьма эффективно ограничить, если максимально внимательно подойти к предложению Эйнштейна, вынесенному в эпиграф данной статьи, т. е., отталкиваться не от всяких, но лишь от наиболее элементарных математических объектов. К таким простейшими объектам, в первую очередь, следует отнести числа. Однако различных классов

¹⁾Дмитрий Геннадиевич Павлов (1960 г. р.) — кандидат технических наук МГТУ имени Н. Э. Баумана. Директор по науке Института гиперкомплексных систем в геометрии и физике geom2004@mail.ru

чисел также довольно много. Помимо обычных, к которым, как правило, относят натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные, известны и такие, как кватернионы, октавы, p -адические числа, числа Клиффорда, Грассмана и т. д., и т. п. Попробуем не распылять наше внимание по всем числам вообще, а сосредоточить его на Числах «с большой буквы», т. е. на таких, чьи свойства уже доказали свою непосредственную связь с теми или иными проявлениями реального физического мира.

Предлагается под Числами понимать представителей уже звучавшего выше ряда: натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные. . . Органическое переплетение свойств перечисленных классов Чисел с действительностью давно стало общепризнанным. Своей кульминации такое единство достигает на уровне комплексных чисел, свойства которых, как известно, не только имеют прямое отношение к геометрии двумерного евклидова пространства (что, кстати, в свое время и послужило основным аргументом в согласии математиков считать комплексную алгебру естественным расширением действительных чисел), но и обладают красивыми связями с физикой, что происходит весьма естественным путем, когда от алгебры переходят к анализу на комплексной плоскости. Какую бы аналитическую функцию от комплексной переменной мы ни взяли, ей всегда можно поставить в соответствие конкретное двумерное физическое поле (например, электро- или магнитостатическое). Равно как справедливо и обратное утверждение: для любой комбинации источников и вихрей, задающих идеальное двумерное поле в вакууме, можно всегда отыскать «свою» аналитическую функцию комплексной переменной. Считается, что на этом двумерном частном случае теснейшие переплетения свойств Чисел, геометрии и физики, только-только нетривиальным образом начавшиеся (ведь более простые Числа связаны либо с одномерными, либо вообще с дискретными пространствами), внезапно вдруг и заканчиваются. В алгебре доказана важная теорема, носящая имя Фробениуса, констатирующая, что числовых множеств с размерностью три и выше, наследующих все без исключения свойства действительных и комплексных алгебр, не существует. Вместе с этим фактом отсутствует и возможность связать между собой геометрию многомерных пространств с многокомпонентными «хорошими» алгебрами. Кватернионы, открытые Гамильтоном, не могут считаться полноценными обобщениями комплексных чисел, так как их произведения, в отличие от произведений остальных Чисел, некоммутативны. Кроме того, над кватернионами, которые в отличие от действительных и комплексных чисел образуют тело, а не числовое поле, отсутствуют нетривиальные аналитические функции. Самые «сложные» из них являются дробно-линейными функциями. Данное обстоятельство тесно связано с теоремой Лиувилля, которая, будучи примененной к четырехмерному евклидову пространству, ассоциированному с алгеброй кватернионов, утверждает, что конформная группа здесь всего 15-параметрическая, тогда как на комплексной плоскости и на вещественной прямой

соответствующие группы преобразований бесконечномерны. Сравнивая данный факт с множеством аналитических функций действительной и комплексной переменных, становится понятным вывод о том, что отсутствие разноразмерности в конформных преобразованиях приводит к резкому сокращению для кватернионов и функций над ними геометрических и физических приложений, сколь-нибудь соизмеримых с приложениями настоящих Чисел.

Столкнувшись с данным обстоятельством, особенно досадным после впечатляющих успехов взаимодействия алгебры, геометрии и физики на примере комплексного анализа, большинство математиков отказалось от дальнейших поисков вариантов расширения списка Чисел. Лишь редкие энтузиасты продолжают заниматься этой проблемой, сосредоточив свое внимание на отыскании таких изменений в понятии аналитических функций, которые бы, с одной стороны, не противоречили алгебре кватернионов, а с другой, в той или в иной мере включали бы в себя теорию функций комплексной переменной. В частности, соответствующие попытки предпринимаются в рамках алгебры комплексных кватернионов или бикватернионов, как их иногда называют [1–4]. Автору настоящей статьи такие усилия представляются излишне компромиссными (хотя и небезынтересными), так как они не в силах отменить факта некоммутативности произведений кватернионов и бикватернионов, а также не позволяют избавиться от относительной бедности групп аналитических функций и конформных преобразований в связанных с ними пространствах. Однако, как минимум, один вариант для пополнения списка Чисел, а следовательно, и для появления новых оснований для продолжения поисков естественных аналогий, идущих от чистой математики к физике и не только в двумерном, но и в многомерных случаях, все же имеется.

Рассмотрим так называемые двойные числа [5, 6]. Их еще иногда именуют расщепляемыми или гиперболически комплексными. Данная алгебра, которую договоримся обозначать H_2 , а ее числа как $h = t + jx$, на первый взгляд, существенно более элементарна и проста, чем комплексная алгебра C . Такое впечатление определенным образом связано с тем, что их мнимая единица j в квадрате дает не отрицательную, а положительную вещественную единицу:

$$j^2 = +1.$$

Законы сложения и умножения двойных чисел в базисе, состоящем из 1 и j , имеют вид:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= (t_1 + jx_1) + (t_2 + jx_2) = (t_1 + t_2) + j(x_1 + x_2); \\ h_1 \cdot h_2 &= (t_1 + jx_1) \cdot (t_2 + jx_2) = (t_1 t_2 + x_1 x_2) + j(t_1 x_2 + t_2 x_1). \end{aligned}$$

Разница в значении квадрата мнимой единицы комплексных и двойных чисел приводит к тому, что в геометрическом плане последним соответствуют точки и векторы не евклидовой, а псевдоевклидовой плоскости [6]. Это связано также с тем, что квадрат их модуля, получаемый аналогично

комплексным числам путем умножения на сопряженное число:

$$|h|^2 = (t + jx) \cdot (t - jx) = t^2 - x^2,$$

соответствует метрике двумерного пространства-времени, если величину скорости света положить равной единице.

Но самым замечательным является факт, что аналогия с комплексными числами у двойной переменной прослеживается намного глубже. При этом все, что связывало первые с геометрией евклидовой плоскости, вторые связывает с геометрией двумерного пространства-времени. Операциям сложения и умножения двойных чисел соответствуют трансляции, повороты и растяжения псевдоевклидовой плоскости. Имеют смысл понятия сопряженного числа, модуля и аргумента, алгебраической и экспоненциальной форм представления, справедливы аналоги формул Эйлера, Стокса, Остроградского, Коши и др., естественным образом вводится понятие производной, не зависящей от направления и аналитичности функций [6, 7, 8]. Трудно вообще придумать качество, имеющее место на плоскости комплексной переменной, чтобы оно не нашло своего аналога на плоскости двойной переменной. Но, как ни странно, при всем при этом двойные числа практически никто не включает в классификацию Чисел и их не принято считать столь же естественными расширениями действительных чисел, какими давно признаны комплексные.

По-видимому, основная причина столь пренебрежительного отношения математиков к двойным числам кроется в слишком очевидной простоте их устройства, иногда граничащей с тривиальностью. Для этих чисел легко находится базис (он иногда называется изотропным), в котором они распадаются на две независимые действительные алгебры. В результате создается впечатление, что ничего, кроме свойств такой пары, плоскость двойной переменной не содержит. И все же, эта простота по сравнению с комплексными числами является кажущейся, ее тут ничуть не больше, чем во взаимоотношениях между псевдоевклидовой и евклидовой плоскостями. Утверждать обратное, равносильно попыткам доказательства, что геометрия евклидовой плоскости намного сложнее и интереснее, чем геометрия двумерного пространства-времени. Если уж такое сравнение и проводить, то большую сложность (во всяком случае, в субъективном восприятии), скорее, следовало бы приписать как раз псевдоевклидову варианту. В любом случае, двойные числа, как минимум, вдвое сложнее вещественных и потому проверка предположения, что они в отличие от кватернионов и бикватернионов должны быть включены в список Чисел, имеет достаточно веские причины.

Известно, что двойные числа удовлетворяют практически всем аксиомам, которые справедливы для Чисел рассматривавшегося фундаментального ряда, вообще, и для комплексных чисел, в частности. Сказанное относится и к наличию свойства коммутативности у их произведений, которое отсутствовало у кватернионов. Единственным отличием можно

считать лишь появление в алгебре двойной переменной делителей нуля, т. е. объектов с ненулевыми компонентами, модуль которых оказывается равным нулю и для которых не существует обратных по умножению, как и у обычного нуля. Математики данное качество часто считают «плохим» или как минимум, неудобным. Именно поэтому упоминавшаяся выше теорема Фробениуса, не рассматривала алгебр с делителями нуля, в принципе. Подобное ограничение с позиций предлагаемого подхода, основанного на поиске Чисел, имевших бы тесную и естественную связь с геометрией и физикой, представляется совершенно неоправданным.

Алгебре двойных чисел соответствует геометрия двумерного псевдоевклидова пространства-времени [6], а в последнем, как известно, появляется фундаментальный объект, которого нет (во всяком случае, в вещественном виде) ни в одном евклидовом пространстве. Речь идет о световом конусе, или другими словами, о множестве точек, расстояния до которых (более правильно говорить об интервалах) от фиксированной точки равняются нулю. Именно точкам и векторам светового конуса естественным образом ставятся в соответствие делители нуля алгебры двойных чисел. То есть основное препятствие, которое по мнению математиков не позволяет двойным числам рассматриваться в одном ряду с действительными и комплексными, на самом деле, является необходимым элементом как псевдоевклидовой геометрии, так и связанной с ней релятивистской физики. Но если из теоремы Фробениуса исключить требование отсутствия у интересных для физических приложений алгебр делителей нуля и иметь в виду, что Числам могут соответствовать не только евклидовы, но и псевдоевклидовы пространства, то пессимистический вывод о замыкании комплексной алгеброй перечня фундаментальных Числовых объектов становится не вполне точным, и появляются веские основания для пополнения рассматриваемого списка, прежде всего, за счет включения в него двойных чисел.

Немаловажным фактором, также свидетельствующим о необходимости считать двойные числа Числами, является наличие над ними бесконечно-параметрического множества аналитических функций (правильнее говорить об h -аналитичности [6], поскольку на плоскости H_2 переменной иная топология, чем на комплексной плоскости). Более того, понятие h -аналитической функции от двойной переменной можно определить таким образом, что их разнообразие оказывается ровно таким же как и разнообразие аналитических функций обычной комплексной переменной, причем любой функции из одного множества при этом соответствует одна и только одна функция другого [9]. В этом случае, аналитические функции обычной комплексной переменной можно однозначно связывать не только с двумя сопряженными гармоническими функциями от двух переменных, но и с парой произвольных аналитических функций от одной вещественной переменной каждая, на которые в изотропном базисе разлагается любая h -аналитическая функция. Тот факт, что на комплексной плоскости нет действительного базиса, в котором такое разложение осуществлялось бы так же, как и на двойной,

ничего не меняет по существу, тем более, что, как показано в [9] и будет частично продемонстрировано ниже, соответствие между аналитическими и h -аналитическими функциями в двух рассматриваемых алгебрах намного более тесное, чем представлялось ранее. Кроме того, необходимо помнить о возможности перехода от пары независимых алгебр $H_2(R)$ и C к объединенной четырехкомпонентной алгебре $H_2(C)$, в которой свойства двойных и комплексных чисел переплетаются наиболее естественным образом.

Одним из замечательных свойств комплексной плоскости, открытым совсем недавно, явилось построение на ней при помощи компьютерных алгоритмов фрактальных множеств Жюлиа и Мандельброта [10]. Красота, гармония и содержательность этих объектов [11] явились дополнительным подтверждением связей, существующих между чистой математикой и геометрией, ну а от последней, как известно, совсем недалеко до физики. Существует мнение, что аналогичных по сложности фрактальных или фракталоподобных множеств на плоскости двойной переменной невозможно построить в принципе. У многих исследователей данной проблемы, вместо беспрельдно изломанных границ комплексных фракталов получались тривиально гладкие квадраты и прямоугольники [12–14]. Однако, как показывают недавние исследования [15–17], ситуация и тут существенно интереснее. Если вместо предельных фрактальных множеств Жюлиа рассматривать так называемые предфракталы, отличающиеся от последних связью с конечным числом итераций, то вместо гладких границ прямоугольников на плоскости двойной переменной появляются объекты, практически ничем не отличающиеся от предфракталов на комплексной плоскости.

Таким образом, двойные числа все же следует признать заслуживающими звания Чисел с большой буквы, а также включить их в соответствующую классификацию между вещественной и комплексной алгебрами, а может, даже, и параллельно последней. Если этот достаточно формальный шаг окажется подкрепленным еще и указанием нетривиальных связей двойных чисел и функций над ними не только с геометрическими, но и с физическими свойствами двумерного пространства-времени, вопрос с классификацией двойных чисел можно будет считать в основном закрытым. Попробуем именно это проделать ниже.

С элементарной геометрией на уровне групп движений, или, что то же самое, изометрических преобразований, в паре «двойные числа» — «псевдоевклидова плоскость» все более-менее ясно. Как и на комплексной плоскости, группа движений здесь реализуется сложением двойных чисел и умножением на числа единичного модуля, с той естественной разницей, что вращения на двойной плоскости являются гиперболическими. Физическая интерпретация этих алгебраических и геометрических свойств двойных чисел также не вызывает трудностей и обычно связывается с задачами специальной теории относительности, когда есть лишь две значимых координаты: одна пространственная и одна временная [18]. Однако существенно более интересен вопрос о гипотетических связях между нелинейными h -аналити-

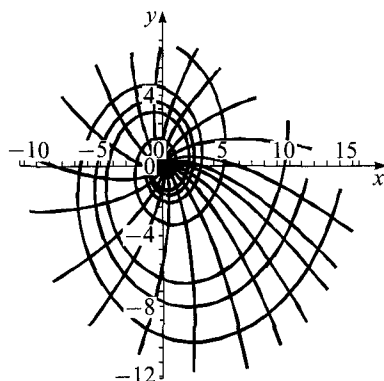


Рис. 1. Силовые линии (спирали, раскручивающиеся по часовой стрелке) и эквипотенциальные линии (спирали, раскручивающиеся против часовой стрелки) точечного вихреисточника на комплексной плоскости с $q = 1$, $w = 1/4$

ческими функциями и соответствующими уже им геометрическими и физическими интерпретациями. Подчеркнем, что речь идет об отыскании связей максимально аналогичных тем, что давно известны между аналитическими функциями комплексной переменной, конформными преобразованиями евклидовой плоскости и соответствующими тем и другим физическими приложениями. То обстоятельство, что двойные числа и функции от них давно нашли широкое применение в теории суперструн и в квантовой теории поля сейчас не обсуждается, так как мы сейчас рассматриваем приложения к классической полевой физике. Для исследования данной проблемы вспомним, как подобные связи реализуются на комплексной плоскости.

Рассмотрим простейшую нетривиальную аналитическую функцию комплексной переменной — натуральный логарифм с комплексным коэффициентом a :

$$\begin{aligned} F(z) &= a \ln(z - z_0) = (q + iw) \ln((x - x_0) + i(y - y_0)) = u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= q \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - w \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0} + \\ &\quad + i(w \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + q \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0}), \end{aligned}$$

где $z = x + iy$ — комплексная переменная, $a = q + iw$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ — некоторые фиксированные комплексные числа, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — сопряженные гармонические функции, на которые всегда можно разложить аналитическую функцию.

В теории комплексного потенциала [6], имеющей дело с физическими интерпретациями аналитических комплекснозначных функций, с кривыми $v(x, y) = \text{const}_1$ принято связывать силовые линии некоторого двумерного векторного поля, а с кривыми $u(x, y) = \text{const}_2$ — эквипотенциальные линии этого же поля. Для рассматриваемой аналитической функции логарифм с комплексным множителем и соответствующая ей пара полей имеет вид, представленный на рис. 1. Такое поле в гидродинамическом смысле интер-

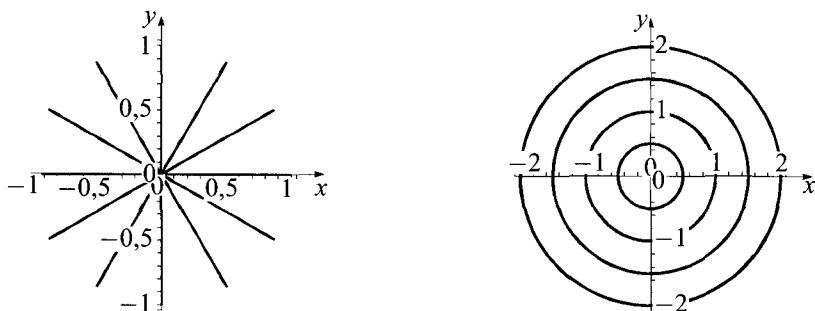


Рис. 2. На левом рисунке представлены линии напряженности одиночного электрического заряда, на правом — одиночного точечного магнитного вихря

претирруется как поле одиночного двумерного точечного вихреисточника, находящегося в точке с координатами (x_0, y_0) с обильностью, пропорциональной величине q и с завихренностью, пропорциональной величине w .

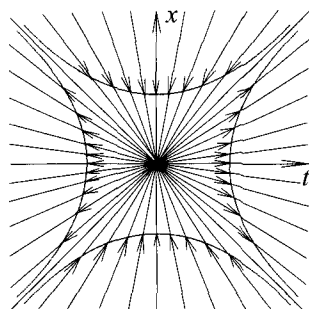
Гидродинамическая трактовка не единственная и не самая лучшая, так как требует рассмотрения идеальной жидкости, которой не существует в природе и, к тому же, такой вариант сопряжен с определенными трудностями при его распространении на плоскость двойной переменной. Гораздо более удобна для последующих аналогий с псевдоевклидовым пространством-временем электромагнитная интерпретация векторного поля, получаемого из произвольной аналитической функции. При таком подходе натуральному логарифму с комплексным множителем соответствует формальная сумма (так как векторы напряженностей электрического и магнитного полей, как известно, не складываются) двумерного электростатического поля, создаваемого одиночным зарядом с величиной, пропорциональной q , и двумерного магнитостатического поля, создаваемого одиночным проводником с током, пропорциональным величине w , текущим в перпендикулярном к плоскости направлении. Образы проводников с током, хотя бы чисто условно, удобно заменить на точечные двумерные магнитные вихри, как я буду их здесь называть.

Если множитель a перед логарифмом взять чисто вещественным, то соответствующее такой «упрощенной» аналитической функции векторное поле можно интерпретировать как двумерное электростатическое, создаваемое одиночным электрическим зарядом (рис. 2, слева).

А если положить a равным чисто мнимой величине iw , то результирующий комплексный потенциал порождает вихревое поле, которое можно интерпретировать как двумерное магнитостатическое поле, создаваемое одиночным точечным магнитным вихрем (рис. 2, справа).

Замечательным свойством аналитических функций является то обстоятельство, что, оперируя одними только комплексными потенциалами точечных источников и вихрей на расширенной комплексной плоскости, можно получить поле, соответствующее любой конфигурации двух двумерных электро- и магнитостатических полей. Равно как верно и обратное: произ-

Рис. 3. Схематическая картина силовых линий гиперболического точечного источника. Поле постоянно по абсолютной величине на гиперболических окружностях (евклидовых гиперболах), а в соседних квадрантах светового конуса меняет свой характер (источник или сток)



вольной паре плоских потенциальных или соленоидальных векторных полей с точечными особенностями в них всегда можно подобрать соответствующую аналитическую функцию комплексной переменной.

Следует ли ожидать наличия столь же красивых и представляющих физический интерес связей между h -аналитическими функциями двойной переменной и некоторыми достаточно простыми (эффективно двумерными) реальными физическими явлениями? Если справедливы ожидания Эйнштейна и утверждение Пифагора, вынесенные в качестве эпиграфов данной статьи, а также работоспособен наш исходный тезис о возможности идти к физико-математическим теориям не только от опыта, но и исходя из свойств фундаментальных Числовых объектов, то такая связь представляется логически необходимой.

Для проверки этого предположения рассмотрим h -аналитическую функцию натуральный логарифм от двойных чисел:

$$\begin{aligned} F(h) &= A \ln(h - h_0) = (Q + jW) \ln((t - t_0) + j(x - x_0)) = U(t, x) + jV(t, x) = \\ &= Q \ln \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2} + W \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0} + \\ &+ jW \ln \sqrt{(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2} + Q \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0}, \end{aligned}$$

где $h = t + jx$ — двойная переменная, $A = Q + jW$ и $h_0 = t_0 + jx_0$ — некоторые фиксированные двойные числа, $U(t, x)$ и $V(t, x)$ — сопряженные h -гармонические функции, на которые всегда можно разложить h -аналитическую функцию.

Положим сперва $A = Q$, т. е. возьмем A чисто вещественным. Тогда наш гиперкомплексный потенциал принимает вид:

$$\begin{aligned} F(h) &= A \ln(h - h_0) = Q \ln((t - t_0) + j(x - x_0)) = \\ U(t, x) + jV(t, x) &= Q \ln \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2} + jQ \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Поступая в полной аналогии с теорией комплексного потенциала и связывая с уравнениями $V(t, x) = \text{const}_1$ линии тока (силовые линии), а с $U(t, x) = \text{const}_2$ — линии уровня, мы получаем графический портрет некоего двумерного векторного поля на псевдоевклидовой плоскости (рис. 3).

Логично предположить, что данное пространственно-временное образование можно интерпретировать как поле точечного источника с обильностью

(зарядом) Q , находящимся в точке-событии с координатами (t_0, x_0) . Силовые линии этого поля, как и для источника на комплексной плоскости — радиальные прямые, а линии уровня — концентрические окружности, только не евклидовы, а псевдоевклидовы, поскольку представляют собой квадратичные гиперболы. Естественно, что это совсем не такой источник, который был связан с логарифмом на комплексной плоскости, так как метрика на плоскости двойной переменной совершенно иная и перед нами не пространственное векторное поле, а пространственно-временное. Кроме того, если на комплексной плоскости логарифм терял аналитичность в единственной точке с координатами (x_0, y_0) , то на плоскости двойной переменной логарифм перестает быть h -аналитической функцией не только в точке (t_0, x_0) , но и на связанном с ней изотропном (световом) конусе. Несмотря на эти отличия, перед нами все же именно источник, который, чтобы не путать его с комплексным аналогом, договоримся именовать гиперболическим, а величину его заряда Q для контрастности попробуем именовать разрядом.

Обозначим напряженность векторного поля, создаваемого одними лишь гиперболическими точечными разрядами как $P(t, x) = P_t + jP_x$. С исходной h -аналитической функцией, понимаемой как гиперкомплексный потенциал, такое поле по аналогии с теорией обычного комплексного потенциала можно связать соотношением: $P(t, x) = \bar{F}'(z)$, откуда следует, что $P_t = \partial U / \partial t = -\partial V / \partial x$ и $P_x = \partial U / \partial x = -\partial V / \partial t$ во всех точках, где исходная функция $F(h)$ h -аналитична. Квадрат модуля напряженности такого поля $|P|^2 = |\bar{F}'(z)|^2 = (P_t)^2 - (P_x)^2$, а направление ее вектора в каждой точке задается гиперболическим углом с осью t : $\alpha = \text{Arth}(P_x / P_t)$. Как видим, у данного поля много общего с напряженностью двумерного электростатического поля $E(x, y) = E_x + iE_y$, имевшей практически аналогичные связи с аналитическими функциями комплексной переменной, с той разницей, что вместо пространства исследуемое поле реализуется в пространстве-времени, а его источниками являются не особые точки, а особые события. Для такого поля можно ввести понятие гиперболической потенциальности, связав его с конкретным выражением для дифференциального оператора: $\text{roth } P = \partial P_t / \partial x + \partial P_x / \partial t = 0$, лишь немного отличающимся от своего прототипа на комплексной плоскости. Аналогичным образом вводится и понятие гиперболической дивергенции поля $\text{divh } P = \partial P_t / \partial t + \partial P_x / \partial x = Q$, которая в случае гиперкомплексного потенциала в виде функции $F(z) = Q \ln(h - h_0)$ в точке h_0 имеет (интегрируемую особенность) и принимает нулевые значения во всех остальных точках плоскости. Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного потенциального поля электрической напряженности E , создаваемого одиночным зарядом, только в данном случае поле P создается одиночным разрядом и заполняет оно собой не пространство, а пространство-время.

Переходя от действительного значения множителя A к чисто мнимому $A = jW$, будем иметь следующее выражение для гиперкомплексного

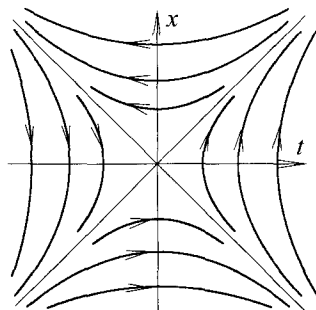


Рис. 4. Силовые линии двумерного точечного гиперболического вихря. Ориентация линий — общая для всех 4-х квадрантов светового конуса (против часовой стрелки)

потенциала:

$$F(h) = A \ln(h - h_0) = jW \ln((t - t_0) + j(x - x_0)) = U(t, x) + jV(t, x) = \\ W \operatorname{Arth} \frac{x - x_0}{t - t_0} + jW \ln \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2}.$$

В итоговой картине векторного поля такая замена вещественной величины разряда на гиперболически мнимую приводит к тому, что силовые линии и линии уровня меняются местами (рис. 4), т. е. силовые линии поля теперь представляют собой семейства концентрических гипербол, а линии уровня превращаются в пучок радиальных прямых.

В данном случае мы имеем полное право такое поле интерпретировать как гиперболический точечный вихрь обильностью W , находящийся в точке-событии с координатами (t_0, x_0) двумерного пространства-времени.

Обозначим напряженность векторного поля, создаваемого гиперболическими точечными вихрями (или, другими словами, гиперболически мнимыми разрядами) как $G(t, x) = G_t + jG_x$. С исходной h -аналитической функцией это гиперболически вихревое поле связано соотношением: $G(t, x) = \overline{F'(z)}$, откуда следует, что $G_t = \partial U / \partial t = -\partial V / \partial x$ и $G_x = \partial U / \partial x = -\partial V / \partial t$ во всех точках, где исходная функция $F(z)$ h -аналитична. Квадрат модуля напряженности такого поля $|G| = |\overline{F'(z)}| = (G_t)^2 - (G_x)^2$, а направление ее вектора в каждой точке задается гиперболическим углом с осью t : $\alpha = \operatorname{Arth}(G_x / G_t)$. В отличие от рассмотренного выше потенциального векторного поля P , оно обладает не време- , а пространственноподобными силовыми линиями, откуда и модуль, и гиперболический угол для векторов его напряженности оказываются мнимыми величинами. С другой стороны, у данного поля много общего с напряженностью двумерного магнитного поля $H(x, y) = H_x + jH_y$, имевшей практически аналогичные связи с аналитическими функциями комплексной переменной, с той разницей, что вместо пространства данное поле реализуется в пространстве-времени, его вихрями являются не особые точки, а особые события, а силовые линии таких вихрей являются псевдоевклидовыми окружностями, т. е. гиперболами. Для такого поля можно ввести понятие гиперболической соленоидальности, связав его

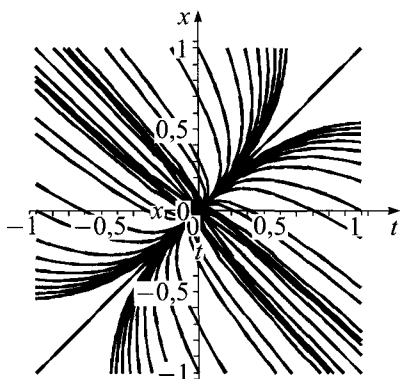


Рис. 5. Силовые линии точечного вихреисточника для $Q/W = -2$. Линии исходят из центра во втором и четвертом квадрантах светового конуса, и сходятся к центру в первом и третьем

с равенством нулю во всех точках поля гиперболической дивергенции: $\text{divh } G = dG_t/dt + dG_x/dx = 0$. Гиперболический ротор для данного вида двумерного поля в случае гиперкомплексного потенциала в виде функции $F(z) = jW \ln(h - h_0)$ в точке h_0 оказывается сингулярным (с интегрируемой особенностью), а во всех остальных точках плоскости имеет нулевое значение. Таким образом, перед нами полный гиперболический аналог двумерного соленоидального поля магнитной напряженности H , связанного с одиночным вихрем, только в данном случае вихрь имеет гиперболическую природу и реализуется в пространстве-времени.

Когда множитель A перед функцией натурального логарифма от двойной переменной принимает гиперкомплексное значение $A = Q + jW$, то в соответствии с принятыми правилами геометрической интерпретации, мы имеем векторное поле двумерного точечного гиперболического вихреисточника (рис. 5). В этом случае получаются сразу два сосуществующих поля: гиперболически потенциальное $P(t, x)$, связанное с разрядом Q в точке-событии (t_0, x_0) , и гиперболически соленоидальное $G(t, x)$, порождаемое гиперболически мнимым разрядом W , произошедшим в той же пространственно-временной точке.

Симметрия между напряженностями пары полей $E(x, y)$ и $H(x, y)$ на комплексной плоскости и напряженностями $P(t, x)$ и $G(t, x)$ на плоскости двойной переменной — удивительно гармоничная и полная. Было бы странно, что для первой пары в физическом мире существует двумерная реализация (причем не единственная!), а для второй таковой не существовало бы вовсе. В связи с этим совершенно логично выглядит гипотеза, что поля $P(t, x)$ и $G(t, x)$ также реализуются в физическом мире, причем одно из них является гиперболическим дубликатом двумерного электрического поля, а другое — магнитного.

Перебор известных современной физике фундаментальных взаимодействий показывает, что на непосредственную связь с рассматриваемой парой $P(t, x)$ и $G(t, x)$, похоже, не может претендовать ни одно. Значит, мы должны выдвинуть версию о существовании в реальности дополнительного

фундаментального взаимодействия, свойства которого при переходе к ситуациям, где значимыми остаются лишь два измерения, одно из которых — время, оказываются именно такими, как подсказывают нам $\hbar$ -аналитические функции двойной переменной. Назовем объединение этой пары полей гиперболическим полем.

Таким образом, на основании одних только математических построений и их сравнении с известными электромагнитными явлениями мы приходим сразу к нескольким достаточно интересным по своим последствиям для физики гипотезам, естественно, требующим соответствующей экспериментальной проверки.

1. Источниками гиперболического поля оказываются не элементарные частицы, как это имело место в случае электрического поля, а точечные события в пространстве-времени, при этом место зарядов занимают разряды.
2. Напряженность поля, порождаемого разрядами, имеет гиперболический характер, т. е. силовые линии заполняют собой не пространство, а пространство-время, при этом эквипотенциальные линии поля (в случае двух измерений) являются гиперболами.
3. У гиперболического поля, как и у обычного электрического поля на евклидовой плоскости, имеется своя вихревая пара — гиперболический аналог магнитного поля, силовые линии которого псевдоевклидовы окружности, т. е. гиперболы.
4. Заряды гиперболического поля, которые выше мы договорились называть разрядами, как и заряды обычного электрического или гравитационного взаимодействия, можно характеризовать величиной полной энергии, однако в данном случае это понятие относится не к частице, а к точечному элементарному событию или, другими словами, к пространственно-временной сингулярности.
5. Разряды гиперболического поля могут быть не только положительными или отрицательными, но вещественными, мнимыми и гиперкомплексными величинами.
6. Напряженности обеих компонент гиперболического поля, связанного с двумерным одиночным вихреисточником, спадают обратно пропорционально величине интервала от точки, в которой тот находится.
7. Вихревая часть гиперболического поля, скорее всего, не может быть обнаружена прямыми экспериментами с обычными частицами, так как его силовые линии оказываются пространственноподобными по отношению к направлению собственного времени наблюдателя и к мировым линиям пробных частиц. Для обнаружения такого взаимодействия требуются измерения, связанные с событиями, или иными словами, детектирование проявлений гиперболического поля должно осуществляться при помощи часов.

8. Естественные расширения гиперболического поля на три и четыре измерения следует строить не путем переходов к пространству Минковского или его псевдоримановым обобщениям (у которых мало общего с Числами), а в тесной связи с естественными расширениями двойных чисел H_2 на тройные H_3 и четверные H_4 . Такие алгебры порождают уже не псевдоевклидово пространство-время, а линейные финслеровы пространства с метрикой Бервальда—Моора [19–23].
9. В многомерных финслеровых пространствах с метрикой Бервальда—Моора, кроме длин и углов, естественными метрическими инвариантами являются еще и так называемые тринглы и полиуглы [24, 25], с которыми можно связать уже не только h -аналитические, но и более сложные функции. Разнообразие последних существенно богаче, а их свойства намного интересней. Возможно, что при рассмотрении таких функций станет понятно, как объединяются гиперболическое и электромагнитное поля, причем в неразрывном единстве с понятием многокомпонентного гиперкомплексного Числа.
10. На основании предлагаемого подхода к гиперболическому полю можно сделать прогноз в отношении скорости распространения соответствующего взаимодействия. Судя по линиям напряженности поля, связанного с точечным разрядом, гиперболическое взаимодействие распространяется со всевозможными скоростями от нулевой до предельной, равной скорости света. Формально можно говорить даже и о сверхсветовых скоростях, однако, по отношению к наблюдателю это будут уже мнимые, не регистрируемые величины скорости.
11. Для пространств с метрикой Бервальда—Моора, в частности для четырехмерного случая, лучше говорить не о трехмерной скорости, а о финслеровом аналоге понятия четырехскорости. Последняя в отличие от четырехскорости специальной теории относительности не остается постоянной по модулю вдоль мировой линии пробной частицы, а может менять свою величину, оставаясь всегда касательной к ней.

На плоскости двойной переменной, также как и на комплексной, мы не связаны ограничением иметь дело с одними только источниками и вихрями. Параллельно с такими точечными особенностями можно рассматривать гиперболические диполи, квадруполь и прочие мультиполи, а также континуальные их распределения по пространству-времени. Иными словами, мы можем дать гиперболически полевую интерпретацию любой h -аналитической функции двойной переменной, в полном соответствии с тем, как это имело место между аналитическими функциями комплексной переменной и двумерными электро- и магнитостатическими полями.

Возникающая на основе алгебры и анализа на двойных числах модель физического поля, являющегося зеркальным двойником двумерного стационарного электромагнитного поля, требует внимательного к ней отношения

и самой тщательной проверки в экспериментах и космологических наблюдениях. Если в процессе таких исследований наша гипотеза о существовании гиперболического поля с вполне конкретными и а priori предсказываемыми свойствами действительно подтвердится, то с полным основанием можно будет поставить вопрос о необходимости расширений двумерных уравнений данного поля уже на три и четыре пространственно-временных измерения. При этом поиск многомерных физических моделей гиперболического и других фундаментальных полей следует вести, не только отталкиваясь от наблюдений и экспериментов, но и изучая математическую структуру многокомпонентных обобщений двойных и комплексных чисел, а также выделенных функций над ними, которые, скорее всего, будут устроены намного сложнее и интереснее, чем обычные аналитические и h -аналитические функции. Соответствующие Числа известны: они представляют собой прямые суммы n действительных и m комплексных алгебр, нужно только научиться смотреть на них в неразрывной связи с порождаемыми ими линейными финслеровыми пространствами, непрерывными симметриями, выделенными функциями от гиперкомплексных чисел и с уверенностью в возможности физической интерпретации всего этого.

На первый взгляд может показаться, что необходимость включения двойных чисел в один ряд с другими фундаментальными Числовыми объектами — является излишним обстоятельством, а все проделанные выше теоретические построения могли быть получены и без этого. Так ли уж важно, поставим мы двойные числа рядом с вещественными и комплексными или будем считать их самостоятельным классом чисел? Думаю, что в контексте основной идеи данной работы, т. е. возможности получения знаний о реальном физическом мире на основании изучения простейших математических объектов, вопрос о месте двойных чисел — принципиальный. И дело даже не в том, сможем и захотим ли мы разглядеть за алгеброй двойной переменной, а также за h -анализом над ней геометрию и физику реальных двумерных физических полей. Более важной проблемой является возможность аналогичного подхода к трех- и четырехмерной геометрии и физике. Если окажется, что достаточно простые двойные числа при подробном рассмотрении свойств h -аналитических функций над ними в отношении к приложениям в геометрии и физике могут давать неизвестные и неожиданные знания о структуре двумерных пространственно-временных полей, то это автоматически должно означать аналогичную актуальность исследований других коммутативно-ассоциативных алгебр с делителями нуля на предмет уже их собственных физических интерпретаций. Учитывая, что таким многокомпонентным алгебрам соответствуют не евклидовы или псевдоевклидовы пространства, а их линейные финслеровы расширения [24, 25], замена ими пространства-времени Минковского может оказаться вполне плодотворной.

Многие современные физики, скорее всего, отнесутся к такой перспективе скептически. Тому есть много объективных и субъективных причин, одна из которых, связана с принятым на сегодня методологическим принципом развития прикладных наук, а именно, от эксперимента к физической модели, и только затем к математической. При этом иногда упускается из виду альтернативный путь. Да, вероятно в подавляющем большинстве ситуаций, кроме как на опыт и эксперимент физик больше ни на что не должен полагаться, но это вовсе не означает, что из данного правила нет исключений и в некоторых случаях, особенно когда у обычной стратегии возникают серьезные проблемы, более продуктивным не оказывается прямо противоположный путь, ведущий от простой и красивой математической конструкции сначала к геометрии, а затем и к физике.

Литература

1. Казанова Г., Векторная алгебра.— М.: Мир, 1979, 120 с.
2. Ефремов А. П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля.— М.: РУДН, 2005, 374 с.
3. Кассандров В. В. Кватернионный анализ и алгебродинамика // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2006, 2 (6), т. 3, с. 58–84.
4. Элиович А. А., Санюк В. И. Некоторые аспекты применения полиномов в теории поля.— ТМФ, 2010, 2, т. 162, с. 163–178.
5. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа.— М.: Наука, 1973.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1977.
7. Павлов Д. Г., Кокарев С. С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 2 (12), т. 6.
8. Павлов Д. Г., Кокарев С. С. h -аналитическая теория поля в 2-мерном пространстве-времени // Принято к печати в Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2010, 1(13), т. 7.
9. Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. Двойные числа // Принято к печати в Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2010, 1 (13), т. 7.
10. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы.— М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 с.
11. Пайтген Х. О., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем.— М.: Мир, 1993, 176 с.
12. Senn P. The Mandelbrot set for binary numbers // American Journal of Physics, 1989, Vol. 58, p. 1018.
13. Metzler W. The «mystery» of the quadratic Mandelbrot set // American Journal of Physics, 1994, 62 (9), pp. 813–814.
14. Artzy R. Dynamics of quadratic functions in cycle planes // Journal of Geometry, 1992, Vol. 44, pp. 26–32.
15. Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной

- переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), т. 6, с. 135–145.
16. Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Панчелюга В. А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), т. 6, с. 146–151.
 17. Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Панчелюга В. А. О форме аналогов множества Жюлиа на плоскости двойной переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 2(12), т. 6, с. 163–176.
 18. Ивлев Д. Д. О двойных числах и их функциях, В сб. Математическое просвещение. Вып.6. Под.ред. И. Н. Бронштейна, Ф. Л. Верпаховского.—М., 1961, с. 197–203.
 19. Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, 1(1), т. 1, с. 5–19.
 20. Павлов Д. Г. Хронометрия трехмерного времени// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, 1(1), т. 1, с. 20–32.
 21. Павлов Д. Г. Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, 1(1), т. 1, с. 33–42.
 22. Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Геометрия невырожденных поличисел// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2007, 1(7), т. 4, с. 3–25.
 23. Гарасько Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков.—М.: Тетру, 2009, 265 с.
 24. Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Аддитивные углы в пространстве H_3 // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2008, 2(10), т. 5, с. 25–43.
 25. Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Метрические бинглы и тринглы в H_3 // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1(11), т. 6, с. 42–67.



Фоменко А. Т.
Математика: кривизна и кручение

Математика как часть физики

*Р. Ф. Полищук*¹⁾

§ 1. Детские вопросы об устройстве Вселенной

Как устроена Вселенная? Опыт — источник и критерий истинности всех наших знаний. «Спуститесь к морю, взгляните в него», — обращается к своим слушателям Ричард Фейнман (*Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1.— М.: Мир, 1967, с. 37) и продолжает: «Это ведь не просто вода. Это вода и пена, это рябь и набегающие волны, это облака, солнце и голубое небо, это свет и тепло, шум и дыхание ветра, это песок и скалы, водоросли и рыбы, их жизнь и гибель, это и вы сами, ваши глаза и мысли, ваше ощущение счастья. И не то ли в любом другом месте, не такое ли разнообразие явлений и влияний? Вы не найдете в природе ничего простого, все в ней перепутано и слито. А наша любознательность требует найти в этом простоту, требует, чтобы мы ставили вопросы, пытались ухватить суть вещей и понять их многоликость как возможный итог действия сравнительно небольшого количества простейших процессов и сил, на все лады сочетающихся между собой. И мы спрашиваем себя: отличается ли песок от камня? Быть может это всего лишь множество камешков? А может и Луна — огромный камень?»

Да, Луна — своего рода большой камень, точнее, твердая порода. На Земле твердые породы образуют горы, высота которых ограничена прочностью электронных оболочек атомов горных пород. Масса Земли почти на два порядка больше массы Луны, и потому энергия гравитационного сжатия раскалила и расплавила внутренность Земли, а внутренность Солнца с массой, на пять с половиной порядков превосходящей массу Земли, раскалилась до пережигания водорода в гелий. Дальнейший рост массы создаст такой экзотический объект как черная дыра.

Но вопросы остаются. Как проквантовать гравитацию? Как связаны три фундаментальные физические константы? Есть вопросы и «попроще». «Спрашивается: какое нужно давление, чтобы прогнать сквозь трубку данное

¹⁾Ростислав Феофанович Полищук (1938 г. р.) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Астрофизического центра физического института имени П. Н. Лебедева РАН.

количество воды? И никто, основываясь только на первичных законах и на свойствах самой воды, не умеет ответить на этот вопрос. Если вода течет неторопливо или когда сочится вязкая жижа вроде меда, то мы прекрасно все умеем. Ответ вы можете найти в любом вашем учебнике. А вот с настоящей, мокрой водой, брызжащей из шланга, справиться мы не в силах» (там же, с. 69). Не решена аналитически даже задача классической механики о движении твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью (такова запускаемая с космодрома ракета). Есть математическая физика, экономическая физика, математическая история, но нет еще математической биологии и математической психологии с их новыми понятиями.

Здесь приходится включать *«воображение»*, чтобы за намеками увидеть что-то большее и картину, встающую за ними, и потом поставить опыт, который убедил бы нас в правильности догадки. Этот процесс воображения настолько труден, что происходит разделение труда: бывают физики-теоретики, они воображают, соображают и отгадывают новые законы, но опытов не ставят, и бывают физики-экспериментаторы, чье занятие — ставить опыты, воображать, соображать и отгадывать» (там же, с. 22). «Если бы в результате какой-то мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение, составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это — *атомная гипотеза* (можете называть ее не гипотезой, а фактом, но это ничего не меняет): *все тела состоят из атомов — мельчайших телец, которые находятся в непрерывном движении, притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотнее прижать к другому*. В одной этой фразе, как вы убедитесь, содержится невероятное количество информации о мире, стоит лишь приложить к ней немного воображения и чуть соображения» (там же, с. 23).

§ 2. Рождение умозрения

Другой способ резюмировать картину мира в одной фразе предпринял Пифагор (572–497 до н. э.): *мир есть число и гармония*. Первая аксиома натуральных чисел гласит: *единица есть натуральное число*. Но у Пифагора единица — не число, а именованная реальность, к которой все другие (натуральные) числа приобщаются через свое соотношение с единицей: количество всегда есть количество чего-то, так что абстрактные аксиомы натуральных чисел — *метафизические научные мифы*, существующие только в воображении и дающие начало математике как метафизической части физики, допускающей мысленные манипуляции и эксперименты (для математика В. И. Арнольда *математика есть часть физики, где эксперименты наиболее дешевы*). У Пифагора реальны только отношения целых чисел, рациональные числа, каждое из которых определяется через бесконечный

класс эквивалентности (pn, qn) , где n — произвольное натуральное число. Но как же быть тогда с длиной диагонали единичного квадрата? Она определяется как сечение всюду плотного множества (существующего в мысли, но не в опыте) дробей, квадрат которых меньше двух. Математика расщепилась на дискретную математику Демокрита (примерно 470–360 до н.э.) и континуальную математику Платона (429–347 до н.э.), иррациональные вещественные числа которой существуют *только в воображении*. Карл Вейерштрасс назвал математику *наукой о бесконечном*. Но бесконечное не дано нам в опыте и существует тоже только в воображении. Квантовая механика переносит акцент с непрерывного на дискретное. Сверхбольшие конечные числа (скажем, «гугол факториал», гугол — это 10^{100}) можно считать практически бесконечными величинами разного порядка. Да и компьютеры имеют дело только с конечными приближениями.

Как пишет Роджер Пенроуз (*Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель*. М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007, с. 31), «применительно к обыденной, повседневной жизни математическая точность мирового порядка выглядела зачастую сухой, непривлекательной и какой-то ограниченной, несмотря на всю, казалось бы, фундаментальную истинность математики самой по себе. Соответственно многие в те давние времена позволяли себе, замороженные красотой изучаемого предмета, унести на крыльях воображения далеко за пределы разумного. В астрологии, например, геометрическим фигурам часто приписывали еще и мистические и оккультные свойства — взять хотя бы пентаграммы и гептаграммы, которые, как предполагалось, обладали магической силой. Предпринимались попытки и усмотреть связь между платоновыми телами и элементарными состояниями материи» (тетраэдр — огонь, октаэдр — воздух, икосаэдр — вода, гексаэдр — земля, додекаэдр — небесный свод). Оккультная арифметика связывала понятия с числами, и арифметические действия превращались в суждения с «оргвыводами» (сегодня олигархи несут серьезные финансовые потери, руководствуясь в бизнесе астрологией как оккультным предком астрономии).

Платон знал, что математические высказывания как предположения, истинность которых устанавливается неопровержимо, описывают не реальные физические объекты, а некие идеальные сущности, образующие свой мир, онтологический статус которого у него выше статуса мира физического. Например, параболоид радиотелескопов не бывает идеальным, а чувствительность физических приборов — бесконечной. Но как прекрасен платонов образ чисел и идеальных форм, «нарезающих» из абсолютно податливой (воображаемой Платоном и отождествляемой им с пространством, в отличие от Демокрита с его неделимыми атомами и бесконечно делимым пустым пространством) материи реальные величины и формы! Сегодня мы знаем, что при конкретном достижении предела применимости идеальных

математических образов к физической реальности возникает новая физика, «заказывающая» новую математику. Но где «безначальное начало» всей реальности, как действительной, так и воображаемой?

Парадоксальное «постижение непостижимости» бездонного безначального начала видно уже у Платона в непознаваемости Единого, взятого в его единстве. Дело, очевидно, в замкнутости Единого на Иное и Многое и в существенном различии между *существованием* как таковым и *знанием* о нем, в их *двуединстве* для homo sapiens, оперирующего понятиями, каждое из которых имеет конечный предел применимости. Прочитируем в этой связи Сергея Сергеевича Аверинцева (Риторика и истоки европейской литературной традиции. М.: Школа «Языки русской культуры», 1996, с. 17). «Общепринятое обыкновение до сих пор заставляет всех говорить — с полным основанием! — что философия впервые родилась в Ионии и что ее основателем, самым первым философом средиземноморского круга был Фалес, хотя все отлично знают, что древние египтяне, вавилоняне, иудеи и до него куда как серьезно задумывались над глубинными вопросами жизни и смерти. Нельзя утверждать, что „Книга Иова“ уступает в глубине самым прославленным порождениям греческой философии (на каких весах можно было бы проверить такой приговор? . .); и все же „Книга Иова“ являет собой все что угодно — „мудрость“, может быть, „философствование“, но во всяком случае не философию. Вся мысль египтян, вавилонян и иудеев в своих предельных достижениях не философия, ибо предмет этой мысли не „бытие“, а жизнь, не „сущность“, а существование, и оперирует она не „категориями“, а нерасчлененными символами человеческого самоощущения-в-мире, всем своим складом исключая технико-методическую „правильность“ собственно философии.

В отличие от них греки, если позволительно так выразиться, извлекли из жизненного потока явлений неподвижно-самотождественную „сущность“ (будь то „вода“ Фалеса или „число“ Пифагора, „атом“ Демокрита или „идея“ Платона) и начали с этой „сущностью“ интеллектуально манипулировать, положив тем самым начало философии. Они высвободили для автономного бытия теоретическое мышление, которое, разумеется, существовало и до них, но, так сказать, в химически связанном виде, всегда внутри чего-то иного. В их руках оно впервые превратилось из мышления-в-мире в мышление-о-мире. Но совершенно аналогичную операцию они проделали со словом, изъяв его из житейского и сакрального обихода, запечатав печатью „художественности“ и положив тем самым — впервые! — начало литературе. В этом смысле литература, скажем, библейского типа может быть названа „поэзией“, „писанием“, „словесностью“, но только не „литературой“ в собственном, узком значении термина. Она не есть литература по той же причине, по которой ближневосточная мысль не есть философия.

В обоих случаях мы высказываем не оценку их уровня, а характеристику их сущности, мы отмечаем не их мнимую неполноценность сравнительно

с литературой и философией греческого типа, а их глубокое типологическое отличие от последних... Когда речения „пророков“ получали письменную фиксацию, возникали весьма своеобразные произведения, без которых немислим облик Библии. Но ни „мудрецы“, ни тем паче „пророки“ никоим образом не были по своему общественному самоопределению *литераторами*. Ученость на службе царя, вера на службе бога — и словесное творчество всякий раз лишь как следствие того и другого служения, всякий раз внутри жизненной ситуации, которая создана отнюдь не литературными интересами» (конец цитаты С. С. Аверинцева).

«Человек разумный» высвободил для автономного бытия смысловой стержень Вселенной, породившей его как *особенное всеобщего*, как парадоксальное двуединство бытия и существования, подчиняющееся модальной логике, отличной от аристотелевой, булевой. Человек как наиприроднейшее и наисложнейшее космическое существо соединил массу-энергию мира с его информацией-сложностью, и синергетика улавливает диалектическое двуединство человека, в котором соединились материя и дух как *закон человеческого существования*, соединились субстанция и ее атрибут как «фюсис-физика», природа устройства этой субстанции. При этом мир и истина о мире есть процесс. Не только полнота каждого состояния мира разворачивается процессом *идеального* в познании развивающейся идеей (например, говоря «окружность», мы ее мысленно чертим, разворачиваем в модусе времени, а потом берем как ставшее в модусе пространства, удерживаемого памятью при переходе от одного мгновенного пространства к другому), не способной уловить сразу всю информацию познаваемого состояния мира, но и сам мир самоизменяется: сами инварианты его трансформации, сама неподвижно-самотождественная сущность допускают и «зовут» их обобщение — ведь проведение границы есть и ее переступание.

Именно абсолютность границы делает человека человеком, своего рода существом *фрактальным*, в котором граница становится своего рода территорией, подобно фьордам Норвегии, где смешаны без смещения, переплетены «в каждой клетке» стихии моря и суши. Нервная, дыхательная, кровеносная и прочие системы человека фрактально переплетены (с обрезанием мультифрактального самоподобия на определенном масштабе для реального взаимодействия), тело человека, по сути, — часть его мозга. Атомы тела — память образовавшего их взрыва сверхновых звезд около 14 миллиардов лет тому назад, мозг — непрерывно изменяющаяся (в отличие от компьютеров, следующих извне заложенной программе) информационная динамическая мультистабильная система с памятью, позволяющей накапливать опыт, адаптироваться к окружению, выносить прошлое в предвидимое (вероятностное) будущее в виде *цели* (преимущество эстафеты жизни и ее передача дальше), экономящей затраты жизненных ресурсов для ее достижения, для воплощения в физических и «метафизических» потомках, в детях и культуре. Содержание культуры и самой жизни в конечном счете определяется ежемгновенным

перепроигрыванием ситуаций встречи сингулярных граничных моментов рождения и смерти человека (например, каждое утро — своего рода новое рождение человека и его мира), до последнего дыхания заканчивающихся победой жизни над смертью. Парадигма фрактальности вместе с парадигмами релятивизма и квантовости образуют современную физическую картину мира для познающего его человека.

Глубокое типологическое отличие типичных жизненных ситуаций различных исторических эпох склоняет сегодня тех, кто осмысливает историю человечества и человеческой мысли, к глубокому уважению всех этих эпох, отличающихся формой воплощения высшего Начала, но не его отрицанием — от первобытных мифов до современного просвещенного атеизма в духе, скажем, космического «религиозного» чувства Эйнштейна, покоренного стройностью мироздания и способностью ее познавать. Центр человеческого бытия во все исторические эпохи остается прежним, но с ростом разрешающей способности разума человек все детальнее членит реальность и усматривает все более глубокие ее корни. При этом рост знания сопровождается ростом рисков и угроз существованию человека, но у него нет иного выхода, кроме как проводить все более тонкие различия и закалять дух разрешением противоречий, казавшихся прежде неразрешимыми. Именно великая сложность человека способна (с помощью его метафизики и универсальной развивающейся математики как ее части: в переводе с голландского *математика* — *точное знание*) уловить великую простоту мироздания.

§ 3. Наука как развивающееся понятие

Человек, как сказал в своей книге «Математические методы классической механики» (М.: Наука, 1989) великий математик Владимир Игоревич Арнольд (1937-06-12, Одесса — 2010-06-03, Париж), видит и мыслит в терминах *инвариантов*. Инварианты и улавливают *неподвижно-самотождественную сущность* вариативного мира как его истину, отличную от нерасчлененных символов человеческого самоощущения-в-мире. Истина принадлежит *виртуальному пространству культуры* как характеристическому свойству человека. Как сказал другой великий математик, Николай Иванович Лобачевский (1792, Нижний Новгород — 1856, Казань), «*поверхности и линии не существуют в природе, а только в воображении: они предполагают, следовательно, свойство тел, познание которых должно родить в нас понятие о поверхностях и линиях*» (Математический энциклопедический словарь. М.: «Советская энциклопедия», 1988, с. 718). Лобачевский уловил саму суть *метафизики* как того, что существует только в воображении, т. е. в *мифе* в широком смысле этого слова (мифом называем здесь именно то, что существует только в воображении). Но логика образов реалий продиктована логикой самих реалий.

Человек разумный начинается там и тогда, где и когда он с несуществующим начинает действовать, как с существующим, т. е. начинается с мифа. Миф как виртуальное пространство культуры расчленяется в дальнейшем на искусство, религию, науку и философию. Наука есть развивающееся понятие. Человек есть ноосферная часть биосферы, которая, в свою очередь, есть часть Земли как небесного тела. Человек — космическое существо, рожденное космосом по закону космоса. Когда человек стал сталкивать предметы и стихии природы друг с другом, это дополнительное (сверх животного гомеостаза, необходимого для поддержания физиологических процессов) выключение из природы как внешней среды сопровождалось включением жестов, рисунков, символов и слов, логика которых продиктована логикой реалий. Метафизика (и метаматематика как ее язык) принадлежат именно виртуальному пространству культуры в его развитии как неподвижно-самотождественной сущности самой неподвижно-самотождественной сущности, в обобщении самих инвариантов, в терминах которых человек воспринимает и осознает мир. Как сказал Янг (1954), *симметрия диктует взаимодействие*. Здесь имеется в виду идея калибровочных полей, возникающих при локализации симметрий и компенсирующих это усиление симметрии: динамика направлена на восстановление симметрии (так расходящиеся волны от брошенного в пруд камня уносят созданное им возмущение поверхности воды).

Калибровочное поле есть *связность*, удлинение частной производной, позволяющее связывать, сравнивать «эталоны» тех или иных величин в разных точках в разные моменты времени: у нас нет абсолютных «эталонов», позволяющих говорить об изменении эмпирических относительных «эталонов» (в физике существует только то, что можно в принципе наблюдать), и можно их только сравнивать при параллельном перенесении в одну точку. Так, кривизна пространства-времени есть неголономность перенесения по контуру направления вектора, поверхностная плотность лоренцевых преобразований, а кручение (торсионное поле Картана) — неголономность перенесения точки приложения вектора, поверхностная плотность трансляций (словно вдоль всякого 2-направления имеется своего рода «винтовая лестница»). Развитие физики включит в себя, очевидно, и обобщение связности до *структур Клиффорда* (Чизхолм, 1991), когда репер — это не 4 векторных поля, как в общей теории относительности, а все 16 полей (базисные формы степеней от 0 до 4), перемешиваемых при переносе (так что отрезок может превратиться в площадь, масса — в спин, и так далее). Истина — в целом, истина времени — в пространстве-времени со световыми базисами, истина массы — в ее комплексной комбинации со спином (собственным значением оператора Казимира в мире де-Ситтера, близком миру Метагалактики), истина макроскопического пространства-времени — в многомерной теории струн, еще не общепринятой физиками.

Лагранжиан электрон-позитронного поля, содержащий произведение волновой функции на ей сопряженную, не изменяется при ее умножении на мнимую экспоненту $\exp i\varphi(x)$, принадлежащую группе $U(1)$. Уравнения Дирака остаются справедливыми при удлинении частной производной введением вектор-потенциала, подчиняющегося уравнениям Максвелла (*кодифференциал дифференциала вектор-потенциала равен току*), описывающим виртуальные фотоны, обмен которыми дает взаимодействие электрических зарядов. Электродинамика становится теорией калибровочной группы $U(1)$, теория сильных взаимодействий — теорией группы $SU(3)$. Все такие группы должны быть подгруппами группы великого объединения физических взаимодействий.

Единая реальность имеет уровни *каузальный* (например, огонь — то, что жжет), *эйдетический* (образ огня как такового не сводится к жжению, он — плазменное состояние вещества, имеющего температуру выше температуры его ионизации) и *онтологический* (огонь, кроме его конкретной природы, еще и просто *есть* как *безусловная информация* факта его наличия). Работа с безусловной информацией невозможна без ее кодирования в информацию *условную*. Так схематическое перевернутое изображение головы священного быка Аписа превращается в букву «А» (в греческой букве «альфа» рога смотрят вправо), изображение угла дома (гимель) превращается в букву «Г», одна палочка превращается в число «1», золото как деньги превращается в банкноты и в электронную запись на пластиковой карточке, и так далее. Мир платоновых идей — мир условной информации, оборотной стороной его четкости является его приближенная применимость к описанию реальности (например, приходится от четких множеств переходить к нечетким; ведь даже при накрапывающем дожде со сливающимися и испаряющимися каплями трудно говорить о нем как о множестве четко различаемых элементов-капель).

Эмпирическое землемерие превращается в теоретическую геометрию с созданием Евклидом идеальных объектов: (1) *точка есть то, часть чего — ничто*; (2) *линия — длина без ширины*; (3) *края линии — точки*; (4) *прямая линия — та, что равно лежит во всех своих точках*; (5) *поверхность есть то, что имеет только длину и ширину*; (6) *края поверхности суть линии*; (7) *плоская поверхность есть та, что равно лежит во всех своих точках*. Как отметил Эйнштейн (см. «Википедия», Начала Евклида), «это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением».

Только теперь можно доказать, например, *теорему Фалеса*: углы при основании равнобедренного треугольника равны. Действительно, если проведем биссектрису верхнего угла и сложим вокруг нее треугольник, то боковые стороны наложатся друг на друга и совпадут из-за равенства длин,

т. е. совпадут сами половинки треугольника. Это означает, что биссектриса равнобедренного треугольника является одновременно медианой и высотой, а углы при основании равны. Но в природе нет точек (движение которых рождает линии, движения линий — площади, движение площадей — объемы, и так далее — от нульмерных до бесконечномерных объемов и пространств), расстояний (точно определяемых только для пар точек) и поверхностей (у атома нет поверхности).

Создание постулатов требует преодоления чувства реальности. Постулаты не самоочевидны, и именно поэтому требуется узаконить воображаемую реальность не существующих, создаваемых воображением идеальных объектов. Парменид разделил первоначальную *космологию* на тяготеющую к практике *физику* и на тяготеющую к теории *метафизику* (идеальных объектов, понятий), которые образуют *сизигию*, диалектически замкнуты друг на друга (физика в широком смысле слова содержит весь корпус познания мира и включает в себя и математический понятийный аппарат, и всю остальную метафизику). Парменид утвердил мир истины (научного познания) и резко противопоставил его миру мнений (политиков, верующих, обывателей). При этом он был вынужден отождествить *мысль и то, о чем мысль* — только позже было сказано «*мысль изреченная есть ложь*». Здесь «изречение» сродни извлечению рыбаком молчаливой рыбы-мысли (вспомним про *священное безмолвие* исихазма) из воды. Идеалисты считают это рождением реальности — ведь «*в Начале было Слово*», хотя еще раньше (у греков) «*в Начале был Хаос*». Слово — символ смысловой упорядоченности бытия, и человек — воплощение *космохаоса*, в котором модусы хаоса и порядка замкнуты друг на друга (временное сплетение каузальных нитей в единое вервие, звеньев — в цепь способно выглядеть лапласовским детерминизмом, хотя в квантовой механике детерминированы только вероятности). Человек воплощает и трагизм, и величие изменяющейся реальности. При этом его познание изменяет его самого, и абсолютизация «метафизики» в ущерб «физике» (например, абсолютное затворничество) ведет не к полноте жизни с ее гармонией сущности и существования, а в никуда (не случайно гений Григорий Перельман, доказавший, что *всякое односвязное компактное без границы 3-многообразие есть 3-сфера*, бросил математику). В квантовой механике измерение, наблюдение изменяет состояние наблюдаемого объекта (волновая функция Вселенной включает в себя и наблюдателя). Человек — существо с памятью, изменяющееся при познании.

В евклидовой геометрии всякий отрезок бесконечно делим на части и бесконечно продолжаем (второй постулат Евклида: *ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой*). Между тем из трех фундаментальных физических констант (постоянная тяготения Ньютона, постоянная Планка и скорость света в вакууме) можно построить *планковскую длину* (примерно 10^{-33} см), на уровне которой понятие длины теряет прежний смысл, поскольку квантовые флуктуации метрики сравнимы с самой мет-

рикой. Семь дополнительных компактифицированных пространственных измерений в теории струн как современной теории физического пространства-времени имеют планковские масштабы компактификации, рождающие *топологические* энергетические моды струн, пропорциональные размеру компактификации и числу намотки на компактные измерения. Обычные *осцилляционные* моды обратно пропорциональны размеру (масса-энергия движения частиц в световом состоянии, именуемых безмассовыми, обратно пропорциональна длине ее волны), и сумма топологических и осцилляционных мод инвариантна относительно инверсии размеров $R \rightarrow 1/R$ (указанные моды просто меняются местами). Эта *T-дуальность* в теории струн означает *эквивалентность бесконечно больших и бесконечно малых размеров*. В частности, наблюдаемое в телескопы с помощью легких фотонов расширение Вселенной при наблюдении с помощью сверхтяжелых частиц выглядело бы как сжатие. Кроме того, согласно гипотезе Давида Гильберта (Познание природы и логика, 1930), *актуальной бесконечности в природе не существует*. Человек видит конечную часть мира и говорит «и так далее до бесконечности», мысленно продолжая ее, как картинку в калейдоскопе. Ошибка — в слове «так»: каждое понятие имеет предел применимости, и при достижении предела применимости старого понятия рождается понятие новое. Всякая система научных понятий внутренне противоречива (вспомним теорему Гёделя о неполноте), развитие универсального научного мировоззрения есть непрерывная самокритика и непрерывный штурм тайн природы, реально продвигающий познание.

Но движение к конкретному знанию неизбежно начинается с абстракций, которые платоники склонны сакрализировать. Для А. Ф. Лосева (*Из ранних произведений*. Диалектика мифа.— М.: Правда, 1990, с. 396) «миф есть (для мифического сознания, конечно) наивысшая по своей конкретности, максимально интенсивная и в величайшей мере напряженная реальность. Это не выдумка, но — *наиболее яркая и самая подлинная действительность*. Это — *совершенно необходимая категория мысли и жизни*, далекая от всякой случайности и произвола». «Миф — не идеальное понятие, и также не идея и не понятие. Это есть сама жизнь» (там же, с. 400; сама неотрывность логики реалии от самой реалии есть изначальная реальность, и не случайно экзистенциалисты называют понятие бегством от смерти). Здесь видим изначальное единство категории и жизни, далее разделившихся (по Аверинцеву), но данное различие вполне вкладывается в указанную нами выше диалектику существующего и несуществующего как характеристического свойства человека разумного (при этом мы расширительно толкуем понятие мифа, теряя богатство анализа А. Ф. Лосева, но улавливая более общее членение реальности). Любопытно, что сам А. Ф. Лосев никак не мог примириться с научным фактом движения Земли вокруг Солнца, установленным еще Аристархом Самосским и позже Коперником, учитываемым в современных космических проектах, включая разработанный в Астрокосмическом центре

ФИАН проект «Радиоастрон»: «А я, по грехам своим, никак не могу взять в толк: как это земля может двигаться? Учебники читал, когда-то хотел сам быть астрономом, даже женился на астрономке. Но вот до сих пор никак не могу себя убедить, что земля движется и что неба никакого нет. Какие-то там маятники да отклонение чего-то куда-то, какие-то параллаксы... Неубедительно. Просто жидковато как-то. Тут вопрос о целой земле идет, а вы какие-то маятники качаете. А главное, все это как-то неуютно, все это какое-то неродное, злое, жестокое» (там же, с. 405; вот и мы в этой заметке качаем некие «маятники»). Здесь прежде всего важно противопоставление добра и зла, их асимметрия и различный онтологический статус. Ну а более аккуратное современное проведение их границы в проблеме механики Солнечной системы — своего рода просто техническая деталь (кстати, общая теория относительности Эйнштейна не уравнила геоцентрическую и гелиоцентрическую системы, а перевела их различие на новый язык: Солнце больше планет прогибает пространство-время Солнечной системы и на языке его конформной кривизны Вейля определяет преимущественную почти гелиоцентрическую барицентрическую *вейль-каноническую* систему отсчета; риччи-каноническая система отсчета сопутствует источникам, а вейль-каноническая — отрывающемуся от них свободному полю).

Что касается жестокости — то да, объективная истина может быть жестока и требует утраты многих прежних иллюзий о мире и самом человеке как его органической части. С. С. Аверинцев пишет (*Поэтика ранневизантийской литературы*. М.: «Coda», 1997, Бытие как совершенство — красота как бытие, с. 33): *выделение эстетики в особую научную дисциплину компенсировало ту деэстетизацию миропонимания, которой было оплачено рождение новоевропейской «научности» и «практичности»*. Можно вспомнить бунт Гёте и Тютчева («не то, что мните вы, природа... в ней есть душа») против этой деэстетизации мира Ньютоном, превратившим мир в мертвую механическую машину (но и сейчас нас обжигает его «жар холодных чисел»: ведь закон всемирного тяготения управляет полетом звезд, планет и космических кораблей), и только теперь синергетика улавливает содержательное единство естественнонаучного и гуманитарного подходов к миру, расширяя контекст миропонимания глубокой иерархизацией единой реальности.

Согласно Анаксагору (500–428 до н. э.) начальное состояние мира представляло собой неподвижную бесформенную смесь бесчисленного множества мельчайших, чувственно невоспринимаемых частиц-семян и всевозможных веществ, которую внешний агент ум-нус в какой-то момент времени привел в быстрое вращательное движение, вызвавшее эволюцию первоначального хаоса до упорядоченного космоса.

Современная синергетика с ее концепцией самоорганизации вселенского динамического космохаоса не нуждается в Творце и во внесении духовного

психофизического начала в *дхармы* как элементы мира в буддизме: интуиции *теории катастроф* подсказывают идею критических мер сложности самоорганизации мира, разграничивающих неживое и живое, неразумное и разумное. Как сказал один из основателей *эконофизики* Филипп Андерсон (*Science*, 1972, v. 177), «*физика элементарных частиц и, в частности, редукционистские подходы, обладают лишь ограниченной возможностью объяснить устройство мироздания. Реальность имеет иерархическую структуру, каждый уровень которой в определенной степени независим от уровней, находящихся выше и ниже. На каждой стадии необходимы совершенно новые законы, концепции и обобщения, требующие не меньшего напряжения и творчества, чем на предыдущих. . . Психология — это не прикладная биология, так же как и биология — это не прикладная химия*».

Но абсолютизировать различие ступеней иерархии столь же ошибочно, сколь и абсолютизировать их упрощенное единство. Категории единого — с одной стороны, и иного и многого — с другой, диалектически замкнуты друг на друга и логически разрушают себя в замкнутости на себя самих: единое есть единое многого, а многое берется в его единстве. Весь набор понятий развился как из семени из единого понятия бытия. «Лес» понятий оказался своего рода единым «деревом баобабо», корни которого образуют единую систему. Вспомним, что одноклеточные организмы-прокариоты стали образовывать колонии, затем возникла специализация клеток с единым генетическим кодом, возникли многоклеточные организмы эукариоты, а стволовые клетки превращаются в часть того органа, в который попадают (это, конечно, отдаленная аналогия). *Форма* (по Гегелю) есть развитое в себя *содержание*, *тождество* отлично от *различия* и потому включает его в себя, *количество* есть хитрость, которая улавливает *качество* (Метагалактика как набор ста миллиардов галактик по сто миллиардов звезд, содержащая около 10^{90} частиц, качественно отлична от одночастичного состояния Вселенной), и так далее. Это у Анаксагора частицы-семена качественно отличны, а в теории струн все элементарные частицы — это различные моды колебания струны и различные состояния любой одной частицы, являющейся по своей природе квантом возбуждения единого физического вакуума (струна стремится сжаться в точку, но принцип неопределенностей Гейзенберга этого «не позволяет», и струна вибрирует вдоль светового конуса, не требуя источника своей динамики, как у Анаксагора). Когда Демокрит путем *умозрения* открыл, что мир — это *атомы и пустота*, он выжег свои физические глаза, глядя в отражение Солнца в отполированном медном щите, чтобы они не препятствовали его умозрению. Сегодня именно умозрение открывает новые измерения нашего пространства-времени.

Изложим правдоподобную гипотезу возникновения и эволюции Вселенной (истина может оказаться еще сложнее, но не проще). Эволюция определяется принципом *экстремума действия*: сложение всех возможных путей эволюции, переводящих одно состояние Вселенной в другое, приводит

к взаимной компенсации почти всех путей и к выживанию с наибольшей вероятностью пути, отвечающего экстремуму действия. Так в хаосе звуков скрипичной струны выживают только резонансы (мера резонансов равна нулю в множестве всех колебаний), тон, как беспорядок-хаос рождает порядок-космос, гармонию, симметрию.

Фундаментальные физические константы образуют планковские величины размерности длины, частоты (мир можно считать перевозникающим с планковской частотой примерно 10^{43} раз в секунду, что перекликается с древнеиндийским учением о космических ритмах и с учением *суфизма* о ежемгновенном пересоздании мира Аллахом), массы (10^{-5} г). Закон сохранения массы-энергии выполняется для совокупности вакуума и вещества. При аннигиляции струн противоположной намотки произошла декомпактификация трех измерений пространства (поскольку струны можно считать как бы двухмерными «шлангами», встреча которых предполагает их встречу и аннигиляцию при флуктуационном росте именно трех измерений пространства из десяти; эта размерность 10 — число степеней свободы колебания струн, необходимое для их квантования). Ослабление намоток вызвало раздувание струн в трех измерениях. Топологические энергетические моды перешли в осцилляционные, в свет.

Световое состояние частицы является основным. Ее 4-импульс как вектор-гипотенуза в пространстве-времени есть сумма равных по модулю векторов-катетов: массы-энергии (частота, умноженная на постоянную Планка, равная скалярному произведению 4-импульса частицы на 4-скорость наблюдателя) и 3-импульса. В этой «теореме Пифагора» квадрат гипотенузы равен разности квадратов катетов (иначе время не отличалось бы от пространства), поэтому модуль 4-импульса равен нулю, как и длина мировой линии «светового наблюдателя» (это его собственное время, так что для него расстояние до всех предметов впереди и позади равно нулю, причем, задняя небесная полусфера стягивается аберрацией света в антиапекс движения и исчезает из-за красного смещения; преодоление наблюдателем нулевого расстояния за нулевое время нельзя считать движением — первичные световые образы указывают на вторичность понятий покоя, движения, пространства и времени: комбинации световых времен дают обычное пространство и время, а покой — это наложение встречных световых состояний, «стоячая волна»). Непрерывное взаимодействие световых безмассовых частиц с *бозоном Хиггса* превращает их мировую линию в ломаную линию со звеньями нулевой 4-длины, дающую в среднем мировую линию ненулевой длины, и световая частица превращается в досветовую в среднем частицу с ненулевой массой-энергией. Понятие ненулевой массы покоя (у Ньютона — *количество вещества*) тоже вторично. Заметим также, что столкновение двух субсветовых пылинок в принципе может породить галактику и Метагалактику.

На планковских масштабах флуктуации метрики сравнимы с самой метрикой (метрик стало как бы сразу много), и выжила наипростейшая гео-

метрия пространства-времени постоянной 4-кривизны (мир де-Ситтера). Ее можно представить в виде однополостного гиперболоида в плоском 5-мерном мире, и расширяющаяся Вселенная отвечает (геодезически неполному) набору его плоских 3-сечений. Столкновение фотонов рождало вещество, которое при расширении разжижалось медленнее света и создало *фридмановскую стадию* замедленного (гравитацией) расширения. Но постоянство плотности массы-энергии вакуума привело 5 миллиардов лет тому назад к его доминированию и к новой фазе ускоренного расширения.

Перекачка массы-энергии вакуума в вещество вызвала рост на 60 порядков его массы и гравитационного радиуса (для Земли он равен 1 см, для Солнца — 3 км; при сжатии до этих размеров даже свет не может вырваться наружу, и все проваливается в *черную дыру*). При этом объем вырос на 180 порядков, и плотность массы-энергии вакуума (космологическая постоянная, *темная энергия*) упала на 120 порядков.

Гравитационная конденсация зажгла звезды и расплавляла внутренности остывающих планет, имеющих «резонансные», симметричные орбиты и формы. Крупные звезды стискивали вещество до склеивания сильными взаимодействиями протонов (вопреки закону Кулона отталкивания одноименных зарядов), и возникли сложные химические элементы, без которых жизнь невозможна (мы — дети звезд, и это — научный факт). Массы звезд примерно пропорциональны кубу отношения планковской массы к массе протона, и без этих больших звезд, пережигающих свои нуклоны в гелий и в другие химические элементы, жизнь тоже невозможна.

Жизнь на Земле возникла благодаря непрерывной переработке низкоэнтропийного излучения Солнца (2 кг фотонов в секунду из 4-х мегатонн падает на Землю) в высокоэнтропийное излучение Земли. *Жизнь — это поток упорядочения (негэнтропии), обеспечиваемый самокоррекцией наследственного кода (в биосфере — биологического, в социуме — социокультурного) при условии притока свободной энергии* (Polishchuk R. F., in *Fundamentals of Life*, Eds. G. Palyi, C. Zucchi and L. Caglioti, Elsevier, Paris, 2002, p. 141–151). Интуиции теории катастроф (*особые множества имеют меру нуль*) позволяют соединить представление о крайней редкости жизни в космосе (и понять его молчание при наивном поиске внеземных цивилизаций) с ее *структурной устойчивостью*. Например, около каждой звезды имеется малая теплая *экосфера*, где температурный режим совместим с жизнью (например, на Марсе — мороз, на Венере — жара, на Земле — тепло). Чем дальше человек будет проникать в космос (необходимо переноса с собой земную среду обитания), тем больше он будет обнаруживать чуждость космоса человеку и тем больше будет ценить родную Землю. Человечество — не «географический», но смысловой центр Вселенной, возникающий на полюсе ее сложности.

На Земле вначале возникли, среди прочего, сахара, липиды, аминокислоты и нуклеотиды. Среди химических элементов естественно возник

«срединный» элемент углерод, способный создавать полимерные молекулы. Конденсация указанных предбиологических молекул создала в океане полипептиды и полинуклеотиды. Молекулы ДНК хранят информацию, белки ее реализуют, а молекулы РНК выступают их посредниками. При высокой концентрации фосфорилированных нуклеотидов наряду с замыканием эфирных связей происходит образование аденин-тимидиновых и гуанин-цитозиноновых пар. Комплементарная авторепродукция данного полинуклеотида обеспечивает перезапись и размножение генетической информации: выживают гиперциклы. Формирование единого генетического кода описывается уравнением Д. С. Чернавского для концентраций гиперциклов с 4-мя параметрами порядка для каждого кластера: период автокаталитического воспроизводства, коэффициенты диффузии, внешней конфронтации (перемешивание различных гиперциклов для них губительно) и (описывающей эффект тесноты) конфронтации внутренней (*Успехи физических наук*, 2000, № 2, с. 157–183. См. www.ufn.ru).

На ранних стадиях эволюции атмосфера Земли не содержала кислорода, но затем возникли фотосинтетики, способные усваивать энергию света и синтезировать АТФ за счет окисления сахаров. Приспособление к среде обеспечивали точечные и блочные мутации. Над флорой с помощью пищевых цепей надстроилась пирамида фауны с человеком на вершине. В нервных сетях высших животных и человека возник процесс мышления, близкий процессу распознавания образов.

Когда возникает новое, оно отталкивается от старого. Мышление образами возникло как жизненная необходимость для ориентирования человека в природе и социуме. Появление образного правополушарного мышления не могло не сопровождаться идеализацией, сакрализацией созданных мышлением образов как инвариантов освоения мира. Но реальная работа с образами превращает их в рутину, десакрализует. Возникает левополушарное логическое мышление, апеллирующее к холодному рассудку. Когда цель ясна, рассудок отыскивает кратчайший путь к ее достижению. Но когда ситуация неопределенна, подключается правополушарная интуиция с ее поисковой аналогией аналогий и гомологий. Но как мышление нельзя оторвать от породившей его реальной жизни, так и универсальный математический язык нельзя оторвать от породившей его физики в широком смысле слова как единого корпуса знания единой иерархически расчлененной реальности.

Истина мира уловлена уже античной натурфилософией, а сегодня она представлена с большим разрешением. Туманное облачко в созвездии Андромеды оказалось галактикой, подобной нашей. Развитие физики оказалось развитием понятия числа. Число оказалось оператором: «два» значит «удвой», «мнимая единица» — «поверни на прямой угол». Для этого единице пришлось приписать направление в плоскости. Мгновенное состояние Вселенной можно считать вектором бесконечномерного пространства (скажем, разбивая его пространство на бесконечно малые тетраэдры и вводя

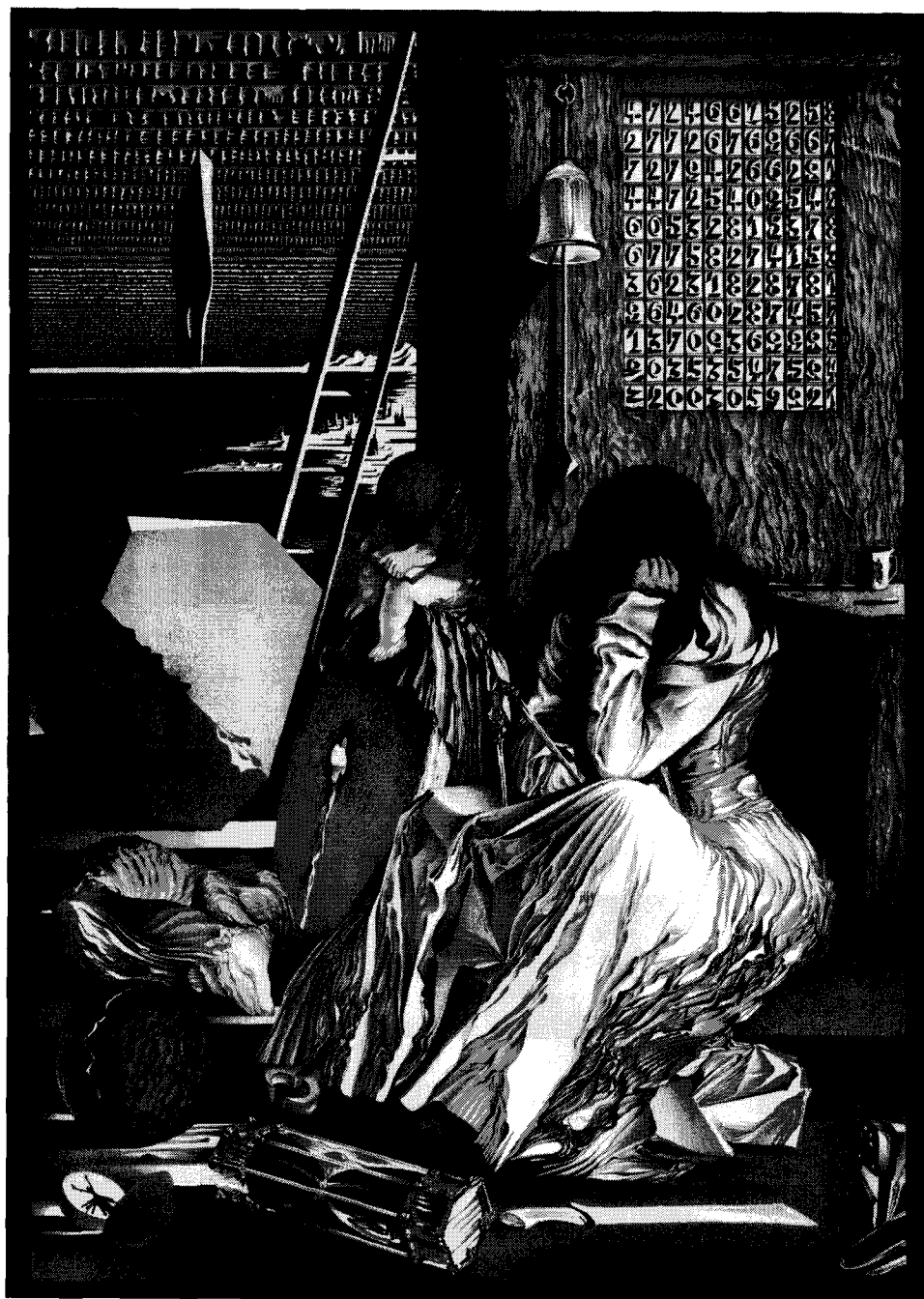
для каждого их ребра свое измерение пространства). Тогда эволюцию Вселенной можно задать зависящим от времени квантовым числом как бесконечномерной матрицей. Для группы суперсимметрии, объединяющей фермионы и бозоны, пришлось дополнить группу Пуанкаре антикоммутирующими комплексными грассмановыми переменными (ненулевыми матричными квадратными корнями из нуля).

Не является ли математическое познание конечным этапом бесконечного движения в одном направлении? Нет, именно принцип финитизма Гильберта открывает дорогу истинной бесконечности, не сводящейся к бесконечной экстраполяции конечного знания. Уже обобщение размерности гиперкомплексных чисел изменяет их свойства до неприложимости к физике: работает интуитивная идея топологии малых размерностей, когда только они нетривиальны, а остальные случаи тривиальны. Поэтому группой симметрии «теории всего» в физике может оказаться конечная исключительная группа Ли. Развивается сама система понятий, и рождение новой парадигмы, включающей парадигмы прежние как встроенные блоки новой конструкции, влечет глубокое смысловое преобразование всей картины мира. Это расширение горизонта будет также обнаружением более глубокого единства новой физики, включающей в себя и математическую историю социума как части Вселенной.

Часть IV

ФИЛОСОФИЯ

И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ



Фоменко А. Т.
 Антидюрер. Из авторского цикла: «Диалог с авторами XVI в.»

Из истории естественно-научного мировоззрения¹⁾

И. Р. Шафаревич²⁾

Постулаты естественно-научного мировоззрения

Естественно-научное мировоззрение — это система взглядов, развившихся в естествознании, в основном в физике и, ввиду связанных с ней громадных успехов и технических приложений, ставшая популярной и очень привлекательной. Так что теперь считается, что эти методы мышления применимы в различных областях знания и являются наиболее точным и достоверным методом познания и в науке о живом, и об обществе, и о человеке.

Основные положения этой системы взглядов можно сформулировать в виде четырех утверждений.

Существование законов природы. То есть, небольшого, во всяком случае обозримого, числа законов, из которых мы можем получить описание практически всех природных явлений. Это совсем не очевидное утверждение. Ведь можно было бы предположить, наоборот, что каждое явление описывается своим законом, а явления, происходившие раньше управлялись совсем другими законами. Образно можно сказать, что система законов — это нечто вроде коробочки, в которую можно упаковать всю вселенную, а потом, открыв коробочку, опять развернуть из нее вселенную, по крайней мере, умственно. Чтобы пояснить конкретнее, что я имею в виду, приведу один пример. При создании этой концепции в XVII в. в исследованиях Галилея большую роль играл «закон свободного падения тел», согласно которому путь, пройденный свободно падающим телом, пропорционален квадрату времени падения. Точнее говоря, имеет место соотношение $s = gt^2/2$, где s — пройденное телом расстояние, t — время падения, g — некоторая постоянная, называемая ускорением силы тяжести.

¹⁾Статья ранее была опубликована в журнале «Историко-математические исследования». Вторая серия. Выпуск 6(41). — М.: «Янус-К», 2001, с. 11–33.

²⁾Игорь Ростиславович Шафаревич (1923 г. р.) — выдающийся советский и российский математик, философ и общественный деятель. Окончил МГУ имени М. В. Ломоносова в 1940 г., доктор физико-математических наук (1946), член-корр. АН СССР (1958), академик РАН (1991). С 1943 г. преподавал в МГУ, являясь сотрудником Математического института АН СССР. Широко известны труды И. Р. Шафаревича в области алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии и теории диофантовых уравнений.

Но почему Галилей так упорно искал этот закон или какой-то ему подобный? Почему не предположить, что каждое тело падает по своему закону? Вот такая вера в существование единого закона и лежит в основе естественно-научного мировоззрения.

2. *Экспериментальность*. Закон извлекается не из обыденного опыта, не на основании авторитета прошедших поколений, а из природы, методом наблюдения, точнее эксперимента. Эксперимент является специальным методом наблюдения, когда явление ставится в искусственные условия, неограниченное число раз точно воспроизводимые.

3. *Объективность*. Вера в то, что эксперимент объективен по своей природе, т. е. не зависит от наблюдателя и может быть в точности воспроизведен различными людьми. В идеале наблюдателя даже лучше исключить, заменив прибором, это считается надежнее.

4. *Математичность*. В результате эксперимента мы получаем некоторое число (или более сложное математическое понятие, например, функцию). То есть, в эксперименте мы имеем дело с величинами, которые измеримы и сводятся к числам. Все законы являются некоторыми математическими соотношениями между этими числами (или другими математическими объектами). Примером является написанная выше формула, выражающая закон свободного падения тел. Потом из этих соотношений мы получаем, применяя методы математики, следствия, которые дают описание все новых явлений природы.

Сформулированные четыре положения являются постулатами, лежащими в основе естественно-научного мировоззрения, вроде аксиом в геометрии.

Это мировоззрение выкристаллизовалось за последние четыреста лет и в настоящее время подкрепляется невиданными достижениями науки и техники. Грубо говоря, около 1600 г. нашей эры, произошло резкое изменение характера научного мышления, давшее взрывообразное увеличение объема научных знаний и власти над миром. Произошедшие с тех пор изменения называются в настоящее время «Научно-технической революцией XVII–XX вв.» или «Коперниканской революцией» (последнее название объясняется ролью, которую играла при выработке этого мировоззрения созданная Коперником гелиоцентрическая система мира). В это время были открыты законы механики, теория электрических явлений, законы электрического тока, теория электромагнитного поля и электромагнитная теория света, что привело к созданию теории относительности. Была развита концепция атомного и молекулярного строения вещества, теория газов и теплоты. Возникла атомная физика и квантовая механика. Эти достижения физики полностью изменили жизнь и дали людям неслыханную до того власть над природой. Вся наша жизнь, начиная с того, что мы живем в громадных домах, в громадных городах и кончая тем, что имеем шанс погибнуть в атомной войне, основывается на некоторых открытиях естествознания. Под влиянием возникших в физике идей, была создана теория эволюции земной коры и ор-

ганического мира, клеточного строения живого вещества. Последняя теория позволила исследовать механизм передачи наследственных признаков.

Научная революция XVII в.

Как произошел этот громадный скачок в развитии человеческого мышления?

Начало было положено изменениями, произошедшими в науке в XVII в., и все последующие успехи явились только следствием этих событий. Поэтому нужно внимательно присмотреться к XVII в., к тому, что тогда произошло в науке.

Конечно, XVII в. — это условная точка отсчета. Например, книга Коперника «О вращении небесных сфер», содержащая изложение гелиоцентрической системы, была опубликована несколько раньше — в 1543 г.

Центральная роль в разрушении старых и создании новых взглядов принадлежит Галилею. В 1610 г. он сконструировал телескоп и обнаружил ряд новых явлений. Млечный путь состоит из отдельных звезд (до этого считалось, что он является облаком газов); Юпитер имеет спутники; на Солнце есть пятна; на Луне — горы. Он исследовал также законы движения тел на Земле, например, закон свободного падения тел. Главный вывод, который более всего поразил и его, и его последователей — что и на Земле, и на небе действуют одни законы. Например, мы видим ежедневно спутник Земли — Луну, но оказывается и у далекого Юпитера есть такие же спутники. Значит, вся вселенная управляется едиными законами!

В период между 1609 и 1621 гг., в результате обработки громадного числа астрономических наблюдений, Кеплер нашел законы движения планет (знаменитые три закона Кеплера).

В 1630 г. Галилей опубликовал книгу «Диалог о двух главных системах мира», где поддерживал теорию Коперника. Центральной идеей этой книги является мысль, что законы движения небесных тел совпадают с законами действующими на земле. Законы «земной» механики он исследует в сочинении «Беседы, касающиеся двух новых областей науки», опубликованном в 1638 г.

В 1637 г. Декарт опубликовал свою книгу «Рассуждения о методе», в ней он расширил сферу рассматриваемых явлений изучением явлений оптики, исследовал законы преломления света. Он использовал в ней новый математический метод — аналитическую геометрию. В 1644 г. он же опубликовал книгу «Начала философии», в которой сформулировал так называемый закон инерции (называемый сейчас обычно первым законом Ньютона), согласно которому, тело, на которое не действуют никакие силы, совершает равномерное прямолинейное движение.

В 1686 г. вышел труд Ньютона — книга, которая явилась венцом всего этого направления: «Математические начала натуральной философии».

Книга начинается с формулировки некоторых основных законов. Затем из них путем математических рассуждений выводится описание множества явлений таких как, например, движение Луны, планет и комет, приливы и отливы, механика жидкостей и газов. Чувствуется уверенность автора в универсальности найденных законов и всего его подхода. Часто используется термин «Система мира», т. е. вся теория — это как бы некоторая «Теория мира».

Позже Ньютон включил в свои исследования и оптику (расщепление света на простейшие цвета, теория света как потока частиц).

Все развитие физики в XVII в. было связано с созданием и применением новых разделов математики — аналитической геометрии, интегрального и дифференциального исчисления, дифференциальных уравнений, бесконечных рядов.

Перечислим еще раз основные научные события XVII в. Начать надо немного раньше:

1543 — Коперник «О вращении небесных сфер»;

1610 — наблюдения в телескоп Галилея;

1609–1621 — законы Кеплера;

1630 — Галилей «Диалог о двух системах мира»; — Декарт «Рассуждение о методе»; — Галилей «Беседы, касающиеся двух новых областей науки»;

1644 — Декарт «Начала философии»;

1686 — Ньютон «Математические начала натуральной философии»;

1704 — Ньютон «Оптика».

Напомним, что же в этот век происходило в человеческой истории:

Россия — от Смутного времени до Петра I;

Германия — Тридцатилетняя война между протестантами и католиками;

Англия — Английская революция, власть Кромвеля, восстановление монархии;

Франция — эта эпоха всем лучше всего знакома по романам Дюма — три мушкетера, Д'Артаньян, виконт Де Бражелон — все жили в этом веке.

Какова же причина прорыва в естествознании, произошедшего в XVII в.? И почему это произошло в XVII в., а не на сто, пятьсот, тысячу лет раньше?

Создатели этого нового естествознания вполне отдавали себе отчет в том, какой громадный переворот в науке они совершают. Галилей, например, писал свои работы, в основном, в популярной, доходчивой форме, в виде беседы нескольких человек, не на общепринятом тогда языке науки — латыни, а на народном, итальянском языке, явно стремясь пропагандировать свои идеи. Были и идеологи, не внесшие сами вклада в науку, но развивавшие и пропагандировавшие ее новые принципы — самые известные — Дж. Бруно и Ф. Бэкон. И все они, в основном, сходились в объяснении тех причин, которые вызвали этот переворот в науке. Они выделяли две: 1) накопилось много фактов, противоречащих старым взглядам; 2) ученые отказались от

домыслов «схоластики» и «повернулись лицом к природе», т. е. к эксперименту. Отказались от умозрительных объяснений, вроде того, что «у каждого тела есть естественное место, к которому оно естественно стремится» и попытались выводить законы природы из эксперимента.

Но исследования современных историков естествознания показали, что, несмотря на внешнюю убедительность, это объяснение сомнительно. Вот ряд аргументов, приводящих к такому выводу:

- те «новые факты», которые произвели особенно сильное впечатление на ученых XVII в., были известны задолго до того: за 2000 лет и даже больше. Например, гелиоцентрическая система была сформулирована греческим астрономом Аристархом Самосским в III в. до н. э.; то, что Млечный путь состоит из отдельных звезд, утверждал Демокрит в IV в. до н. э.; что на Луне есть горы — Анаксагор в V в. до н. э. В XVII в. эти взгляды не были общепринятыми, но специалистам были известны, например, Коперник в своей книге ссылаясь на «древних» в подтверждение своей теории. Архимеду (в III в. до н. э.) были известны методы, которые, с нашей точки зрения, естественно рассматривать как варианты методов интегрального и дифференциального исчисления;
- многие открытия, которые, как считалось, были сделаны в XVII в. «экспериментально», на самом деле не могли быть найдены при тогдашнем уровне экспериментальной техники. Например, закон Галилея о свободном падении тел верен, только если отсутствует сопротивление воздуха (например, если наблюдать падение в сосуде, из которого выкачан воздух). Шекспир, стоявший обеими ногами на почве реального опыта, писал:

«И как тяжеловесные предметы,
Когда их бросишь, с быстротой летят...» [1, с. 127].

А согласно закону, найденному Галилеем, перышко и ядро падают с одинаковой скоростью. И сам Галилей понимал несоответствие его закона реальному опыту. Он вовсе не изучал экспериментально реальное свободное падение (хотя иногда и говорит об опытах с падающими с башни предметами). Часто, когда Галилей говорит об эксперименте, он имеет в виду то, что современные физики называют «мысленным экспериментом». Так, он предлагает наблюдать падение тел в средах все более «податливых», надеясь так приблизиться к точному закону — но он не говорит, как такие опыты ставить. Или же он ставил другие эксперименты, при которых можно было бы наблюдать движение на коротких интервалах, когда сопротивление воздуха сказывается меньше. Вообще же он ставил данные опыта неизмеримо ниже математической теории. Например писал, как его восхищают создатели гелиоцентрической теории (Коперник и Аристарх Самосский), не побоявшиеся пойти против очевидных показаний своих органов чувств.

Тем более эти аргументы относятся к «закону инерции» — ведь он постулирует бесконечное движение по прямой — явление в принципе никак не наблюдаемое (как и тело, на которое не действуют никакие силы).

Точка зрения многих современных историков науки такова: поразительный прорыв в науке, начавшийся в XVII в. явился результатом слома старых представлений о пространстве и вселенной. Он основан как раз на отказе от того, что дает повседневный опыт, что мы «видим своими глазами» (например, что солнце движется по небу) и на смелом применении экспериментально принципиально не наблюдаемых понятий. Основным таким понятием было понятие бесконечного пространства — ведь реально мы способны наблюдать лишь маленькую часть его. А только в бесконечном пространстве возможно неограниченно продолжающееся прямолинейное движение, о котором говорится в «законе инерции». Насколько я знаю, эта точка зрения была впервые (и очень ярко) аргументирована Э. Бертом [2], а позже разработана рядом исследователей, из которых наиболее известным стал выходец из нашей страны А. Койре [3].

До XVII в. большинством ученых была принята и подтверждена авторитетом церкви концепция, сформулированная в принципе еще Аристотелем, согласно которой мир конечен, ограничен сферой, на которой расположены звезды, а вне этой сферы нет ничего — ни времени, ни материи, ни пустоты. Все пространство заполнено, каждая точка — место положения какого-либо тела. В центре сферы, ограничивающей мир, расположена неподвижная Земля. Кроме того, внутри этой сферы находится еще ряд сфер с центром в Земле, и все сферы вращаются, это вращение вечно, неизменно и равномерно. На этих сферах расположены Солнце, Луна и планеты. Всего сфер 56. Взаимное вращение сфер было подобрано так, что объясняло видимое движение планет. (Вариантом этой системы была система Птолемея, о которой мы скажем позже.) Самая близкая к Земле сфера — та, на которой расположена Луна. Она разделяет мир на две части, в которых действуют совершенно разные законы. В надлунном пространстве господствует вечно неизменное движение. В подлунном пространстве господствует изменение, возникновение и уничтожение. Каждое тело имеет свое естественное место и естественно движется к нему: тяжелые тела движутся по направлению к Земле, легкие — от нее.

Вся Вселенная есть олицетворение порядка и красоты. Космос по-гречески значит красота (одним из производных этого слова является слово косметика). Один современный исследователь предлагает переводить это слово по-русски как «лепота» [4].

Эта идея Космоса была разбита в XVII в. и заменена радикально отличной идеей: пространство бесконечно, однородно во всех его частях и во всех направлениях и в принципе пусто, лишь отдельные места иногда занимают определенные тела. Тело в таком пространстве может двигаться бесконечно, без воздействия на него каких-либо сил. Естественно, эта система не

могла основываться на экспериментах — т. е. это была некая математическая абстракция, и привычное нам физическое пространство переосмысливалось как абстрактное.

Изложенная выше система взглядов выражается в словах Галилея: «Философия написана в величайшей книге природы, всегда раскрытой перед нашими глазами, но эту книгу нельзя понять, не научившись сперва понимать ее язык и не изучив знаки, которыми она написана. А написана она на языке математики, и ее знаки—это треугольники, окружности и прочие геометрические фигуры, без которых человеческому пониманию ни одно ее слово не доступно» [5].

Обычно эти слова понимали в том смысле, что изучение физики невозможно без применения математики. Но в книге [2], опубликованной в 1925 г., Э. Берт дал новое и более глубокое их толкование. Он считает, что Галилей предложил изучать не физику объемлющего нас пространства, а ту, в которой отсутствуют такие физические явления, как трение, сопротивление воздуха и т. д., т. е. физику не в реальном мире, а в воображаемом геометрическом мире. Потом туда можно перетащить и сопротивление воздуха, но пренебречь целым рядом других факторов, действующих в реальном мире, так что общий принцип остается прежним. Только математически описанная реальность обладает истинной достоверностью, а реальность, улавливаемая органами чувств, сомнительна и изменчива. Физика становится математичной, и поэтому явления — вычислимы и предсказуемы.

Аристотелевская теория — это попытка объединить все факты естествознания на основе повседневного опыта и здравого смысла. Но в некоторых случаях приходилось идти на компромиссы, так как последовательно это провести трудно и, вероятно, не всегда возможно. Например, Аристотель [6, с. 205, 209] высказывал естественное, с точки зрения здравого смысла, утверждение, что каждое движение должно иметь причину приводиться чем-то в движение. У него и его последователей это утверждение формулировалось и более определенно — если тело движется, значит его что-то тянет или толкает. Однако такой формулировке противоречило движение брошенного рукой камня или выпущенной из лука стрелы. Для объяснения подобных явлений в разное время предлагались более или менее логичные объяснения, но постепенно система взглядов становилась все сложнее и все менее естественной.

Новая физика XVII в. решает эту проблему, порывая с интуицией и отказываясь от реального опыта, т. е. перемещает все физические явления в абстрактное пространство и время. Это и явилось одним из факторов успеха. Таким образом, физика в принципе поглощается «математической физикой» (хотя методы, применявшиеся в XVII в., с современной точки зрения, элементарны — этому сейчас учат в старших классах средней школы — тогда это была вершина математической мысли). То есть успех был достигнут за счет отказа от физики повседневного опыта и замены ее

некоторой абстракцией. Не удивительно, что это легче, и на таком пути успехов является все больше. Утрируя такую точку зрения, можно было бы назвать всю физику, начавшуюся с XVII в., «подгонкой под ответ», когда трудную, но реальную задачу заменяют более простой абстракцией. Это и есть критика русского философа А. Ф. Лосева, изложенная в еще более парадоксальной форме:

«Говорят: идите к нам, у нас — полный реализм, живая жизнь, вместо ваших фантазий и мечтаний откроем живые глаза и будем телесно ощущать все окружающее, весь подлинный и реальный мир. И что же? Вот мы пришли, бросили „фантазии“ и „мечтания“, открыли глаза. Оказывается — полный обман и подлог. Оказывается: на горизонт не смотри — это наша фантазия, на небо не смотри — ибо никакого неба нет, границы мира не ищи — никакой границы тоже нет, глазам не верь, ушам не верь, осязанию не верь. . . Батюшки мои, да куда же это мы попали? Какая нелегкая нас занесла в этот бедлам, где чудятся только одни пустые дыры и мертвые точки? Нет, дяденька, не обманешь. Ты, дяденька, хотел с меня шкуру спустить, а не реалистом меня сделать. Ты, дяденька, вор и разбойник» [7, с. 593].

Именно эти слова Лосева процитировал Л. М. Каганович в 1930 г. на XVI съезде ВКП(б) как пример того, как плохо у нас еще поставлена бдительность. Вспомнили об этом и на открывшемся осенью 1930 г. следствии по делу об «Истинно-православной церкви», закончившемся для Лосева лагерем, откуда он вернулся почти слепым. . .

Что же представляет собой 400-летнее триумфальное шествие естествознания? Неужели просто «полный обман и подлог» — по словам Лосева? Если весь успех был в том, чтобы заменить реальный мир изучением своих «мечтаний» и «фантазий», — т. е. более простых абстракций, — то ведь это похоже на фокус карточного шулера, подсовывающего фальшивую карту! Конечно, и Лосев так не считал, а лишь указывал, в парадоксальной форме, на некоторые опасности одностороннего абстрактно-теоретического восприятия мира.

В громадном числе случаев результаты чисто абстрактных теорий — «мечтания» и «фантазии» — позже настолько точно подтверждались экспериментом, что это никакой «подгонкой» под теорию объяснить невозможно. Например, древнегреческие математики много занимались кривыми, которые были названы коническими сечениями, т. е. эллипсами, гиперболами и параболами. Евклид в III в. до н. э. посвятил им целую книгу. А в XVII в., т. е. 2000 лет спустя, Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам (кометы движутся также по гиперболам и параболам). Несколько позже Ньютон доказал, путем математического вычисления, что эта форма их орбит вытекает из закона тяготения.

Вот более близкий к нам пример. В 1929 г. английский физик П. Дирак вывел уравнение движения электрона, отвечающее требованиям теории относительности. Для этого он ввел новые математические величины, назы-

ваемые «спинорами». Позже выяснилось, что эти величины были введены из чисто математических соображений на 50 лет раньше английским математиком У. Клиффордом. Уравнение Дирака приводило к следствиям, казавшимся сначала парадоксальными. Именно оно описывало, кроме электрона, и другую частицу, имеющую ту же массу, но противоположный заряд. Причем вероятность перехода одной частицы в другую — положительна, так что если существует одна, то должна существовать и другая. Некоторое время это считалось странным дефектом уравнения, пока не была высказана смелая гипотеза, что такая частица существует. Вскоре она была экспериментально обнаружена в космических лучах. Теперь она называется позитроном.

Имеется громадное число подобных совпадений результатов чисто математических теорий и физических наблюдений. Многие физики и математики обращали внимание на эту загадку. По-видимому, имеется таинственный параллелизм между интеллектуальным миром математических и физико-математических рассуждений и реальным наблюдаемым миром. Это один из главных выводов, которые можно сделать из всей предшествующей истории попыток человечества познать Космос. Но нам не известны границы такого параллелизма. Лосев в парадоксальной форме обращает внимание на трудности и опасности, возникающие, если исключительно (или непропорционально) опираться на рационально-интеллектуальный путь познания мира. Мы позже вернемся к этому вопросу.

Научная революция VI в. до н. э.

Мы видели, что в XVII в. происходит столкновение двух систем мира, одна сменяется другой. Этот переворот станет немного яснее, если посмотреть на происхождение аристотелевской системы. Его система была тоже результатом научной революции, произошедшей в Древней Греции в VI—III в. до н. э.

Начало этого научного переворота приходится примерно на VI в. до н. э. — вообще поразительную эпоху в духовном развитии человечества. В это время в Индии появился буддизм и индуизм. В Китае — конфуцианство, которое и по сей день остается главной идеологической основой китайской культуры. В Персии — религия Заратустры (двух сил: разрушения и созидания, борьбы двух богов — Ормузда и Аримана). В библейской традиции это начало движения пророков. В Древней Греции — возникновение греческой философии, в рамках которой и возникли идеи той научной революции, которую мы обсуждаем. Никаких соображений, объясняющих одновременное появление совершенно новых концепций во всей Евразии — от Китая до Греции — предложено, по-видимому, не было. Но зато ученые нашли удачное название для этой поразительной эпохи — ее стали называть «косевым временем».

В Древней Греции VI в. до н. э. послужил началом грандиозного интеллектуального движения. Тогда эта деятельность называлась философией, но по содержанию своему была близка тому, что мы сейчас называем естествознанием.

Именно в ту эпоху возникла, по-видимому, концепция «законов природы», лежащая в основе естествознания и по сей день. Возникшие тогда идеи уходят корнями в греческую мифологию, которая дошла до нас через мифологическую поэзию. В поэме «Теогония» греческого поэта Гесиода [8], написанной в VIII или VII в. до н. э., изображается война древних богов — Титанов, рожденных Землей и Небом, с поколением новых богов, потомков Времени (Кроноса), во главе с Зевсом. Эти новые боги связаны как раз с законами, управляющими миром. О них говорится:

«Голосами прелестными Музы
Песни поют о законах, которые всем управляют,
Добрые нравы богов голосами прелестными славят» [8, с. 171].

Древних же богов можно скорее соотнести с миром, в котором «каждое явление следует своему закону», Гесиод описывает космическую битву:

«Заревело ужасно безбрежное море,
Глухо земля застонала, широкое ахнуло небо
И содрогнулось; великий Олимп
задрожал до подножья. . .
И когда бы увидел
Все это кто-нибудь глазом иль ухом бы шум тот услышал,
Всякий, наверно, сказал бы, что небо широкое сверху
Наземь обрушилось. . . » [8, с. 191].

Благодаря молниям, подвластным Зевсу, новые боги побеждают старых:

«Подземь их сбросили столь глубоко, сколь далеко от неба. . .
Там и от темной земли и от Тартара, скрытого в мраке,
И от бесплодной пучины морской, и от звездного неба
Все залегают один за другим и концы и начала,
Страшные, мрачные» [8, с. 192–193].

Эти мысли развивает трагик Эсхил, писавший в V в. до н.э. В трагедии «Прометей» [9] он описывает одного из Титанов — Прометея, страдающего от гнева Зевса, распятого на скале. Хор поет:

«Новый миру дав закон,
Зевс беззаконно правит.
Что было великим, в ничто истлело.
Зевс свирепый, Зевс пасет мир,
Произвол в закон поставив
Зевс пасет копьем железным
Древних демонов и чтимых» [9, с. 185, 195].

Согласно Эсхилу и традиции, правление Зевса и новых богов не несет блага людям. Прометей говорит:

«Едва он на престоле сел родительском,
Распределять меж божествами начал он
Уделы, власти, почести: одним — одни,
Другим — другие. Про людское горькое
Забыл лишь племя. Выкорчевать с корнем род
Людской замыслил, чтобы новых вырастить.
Никто не заступился за несчастнейших.
Один лишь я отважился! И смертных спас!» [9, с. 188].

Более того, Прометей дал людям огонь, украв его у Зевса. Вообще, Прометей предстает учителем людей в искусствах и ремеслах, он «мысль вложил в них и сознанья острый дар», т. е. является учителем культуры (такой образ встречается в мифах многих народов; он называется в этнографии «культурным героем»). Это, собственно, и есть причина гнева Зевса. Но более того, Прометею известна тайна будущего Зевса — «господство его не вечно», и на вопрос — «Но кто же у него отнимет скипетр владычества?» — Прометей знает ответ — «Сам у себя, замыслив безрассудное» [там же].

Из этого мифологического субстрата в VI в. начинают выделяться более логически оформленные концепции, потом дают начало потоку новых идей и наблюдений, составляющих научную революцию VI–III вв. до н. э. Перечислим наиболее принципиальные научные концепции этой эпохи. Иногда высказывались и противоречащие друг другу точки зрения, велись споры. Но так обстояло дело и в научной революции XVII–XX вв. (например, споры о том, что такое свет — поток частиц или волны — продолжались до XX в.).

Итак, вот перечень основных идей.

- Земля ни на что не опирается, она висит в пространстве и не падает, так как ей столько же оснований падать вниз, сколько вверх. Земля — круглая. Приблизительно верно были определены размеры Земли и расстояния от Земли до Луны и Солнца. Было обнаружено суточное вращение Земли.
- Солнце и Луна — раскаленные камни размером со всю Грецию. Позже — Солнце больше Земли. Но существовала и точка зрения что они — одушевленные существа.
- Мир бесконечен. Но и наоборот: мир конечен и ограничен сферой, вне которой ничего нет.
- Гелиоцентрическая система (Земля и планеты вращаются вокруг Солнца). Но также и геоцентрическая система (Солнце и планеты движутся вокруг неподвижной Земли).

Было дано правильное (с современной точки зрения) объяснение солнечных и лунных затмений.

Была высказана гипотеза об атомном строении вещества. Дискутировался вопрос, можно ли естествознание (в основном, физику) основать на

математике. Можно ли физические явления свести к числам или геометрическим понятиям, например, треугольникам и т. д.? Или они больше похожи на наши чувства — гнева или страха? Первую точку зрения отстаивал Платон, вторую — его ученик Аристотель.

В математике была создана концепция строгого доказательства и вывода всех утверждений из нескольких аксиом. Стройная система теорем геометрии, как она до сих пор преподается в школе, была построена в эту эпоху. Были открыты идеи интегрирования и дифференцирования, основы того, что сейчас называется интегральным и дифференциальным исчислением.

Новые идеи были высказаны и в изучении живой природы. Например, что все животные возникли в океане и лишь потом вышли на сушу. Была открыта нервная система и ее роль в передаче ощущений и т. д.

Вот краткая хронология появления этих идей (все даты — до н. э.).

Приблизительно 600 г. Фалес: идея эволюции мира (все произошло из воды). Идея строгого доказательства в математике.

Приблизительно 550 г. Анаксимандр: происхождение мира через остывание раскаленного ядра. Земля, ни на что не опираясь, висит в пространстве. Расстояние от Земли до Солнца примерно равно 27 диаметрам Земли. Происхождение животных из океана.

Приблизительно 530 г. Пифагор и основанная им школа пифагорейцев: создание сохранившегося до современности представления о характере математического исследования. (Более поздний греческий математик писал о вкладе Пифагора в математику: «Он изучал эту науку, исходя от первых ее оснований и старался получить теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений» [цит. по 10, с. 125].) Решение на основе строгого доказательства вопросов, которые раньше в математике не ставились (например, существование иррациональных чисел, иррациональность $\sqrt{2}$). Математичность мира: вещи существуют «по подражанию числам». Шарообразность Земли.

500–428 гг. Анаксагор: Солнце и звезды — раскаленные камни, Солнце — больше Пелопоннеса. На Луне есть горы и долины. Объяснение солнечных и лунных затмений.

460–380 гг. Демокрит: мир состоит из атомов и пустоты. «Все в мире происходит по необходимости» (крайняя формулировка концепции законов, детерминизм).

Около 400 г. Пифагорейцы: Земля и Солнце вращаются вокруг единого центра.

427–347 гг. Платон: основные элементы, из которых построен мир — геометрические фигуры. Не занимаясь математикой, нельзя изучать философию (естествознание).

384–322 гг. Аристотель: создание универсальной картины мира, включившей некоторые из выдвинутых ранее идей, а некоторые — отвергшей.

IV в. Ученики Платона: описание движения планет через вращение сфер; суточное вращение Земли.

Примерно 280 г. Аристарх Самосский: гелиоцентрическая система.

Примерно 280 г. Эратосфен и Аристарх Самосский: определение длины земной окружности, расстояния от Земли до Солнца и Луны.

287–212 гг. Архимед: понятия интегрирования и дифференцирования; статика тел и жидкостей (на строгой математической основе).

В конце III в. Аполлоний предлагает другой вариант описания видимого движения Солнца и планет. Каждая из них движется по кругу (эпициклу), центр которого движется по кругу, имеющему центром Землю. Позже, на основании этой системы, Птолемей построил теорию, дающую очень точное описание движения планет, и сама система стала называться Птолемеевой. В средние века была принята система, некоторым образом соединяющая Птолемеевскую и ту, которую изложил Аристотель (мы не будем говорить о ней подробнее).

Напомним, как и раньше, основные исторические события, приходящиеся на тот же период.

Примерно 600 г. Возникновение в Греции множества небольших городов-государств (среди них — Афины). Такие же греческие города-колонии в Малой Азии и на прибрежных ей островах (Фалес, Анаксимандр, Пифагор, Анаксагор были родом из таких колоний). Одновременно на Востоке вырастает громадная Персидская мировая империя.

490–480 гг. Греко-персидские войны. Союз маленьких греческих государств отражает нападение великой персидской державы.

V в. Расцвет культуры в Афинах. (Платон был родом из Афин, Анаксагор и Аристотель провели там большую часть жизни.)

431–404 гг. Междоусобная война между греческими государствами (Пелопонесская война). Конец расцвета Афин.

IV в. Ослабление греческих государств в результате междоусобных войн и подчинение Греции северному соседу — Македонии

334–323 гг. Походы Александра Македонского (Аристотель был его воспитателем). Объединив силы Македонии и большинства греческих государств, Александр разгромил персидскую державу и создал империю, охватывавшую Грецию, Малую Азию, Египет, Персию, Месопотамию, часть Индии и Средней Азии. После его смерти империя распалась на несколько частей.

IV–III вв. Эллинизм. На обломках империи Александра Македонского создаются государства, в которых происходит объединение местной традиции с греческой культурой (Аристарх Самосский, Эратосфен, Аполлоний и Архимед жили в таких эллинистических государствах).

Конец III в. Начало завоевания эллинистических государств Римом. (Архимед был убит при захвате римлянами греческого города Сиракузы в Сицилии.)

Конечно, III в. до н. э. служит концом этого периода несколько условно (как и XVII в. — началом научной революции нового времени). Развитие естествознания продолжалось и дальше, но больше как развитие уже созданных концепций. Невиданный поток новых идей кончился.

Возвращаясь к истории развития научной мысли, мы видим, что в античности были выдвинуты многие идеи, впоследствии, более чем на 2000 лет позже, легшие в основу научной революции XVII в. Но они не вошли в состав «аристотелевской» системы мира. Тогда была сделана попытка построить картину Космоса, учитывающую основные известные факты, но основывающуюся на принципах, вытекающих из повседневного реального опыта. Конечно, она утвердилась не из-за авторитета Аристотеля (как он ни был велик), а потому что соответствовала основным нормам мышления, принципам древнегреческого, римского и позже — христианского средневекового общества. Не укладывающиеся в нее положения были отеснены на периферию сознания, не получили всеобщего признания, хотя были известны знатокам. Можно считать, что древнегреческое общество как бы «обдумало» (применяя этот термин к целому обществу лишь по аналогии) имеющиеся альтернативы и практически сознательно отклонило идеи, позже двигавшие научную революцию XVII в. (Также стоит отметить, что она не произошла в Индии, Китае и Византии.) Видимо, эти идеи требовали слишком резкого отрыва от реального опыта, противопоставления человека природе. Вероятно, мыслители того времени ощущали некоторые опасности и трудности, связанные с направлением, возобладавшем в XVII в. Безусловно, такой выбор был связан с громадной жертвой — он резко затормозил развитие естествознания, начиная с III в. до н. э. Как говорит один историк [11], естествознание тогда внезапно остановилось в своем развитии как бы натолкнувшись на невидимую стеклянную стену (вряд ли из-за внешних причин, так как, например, в математике выдающиеся достижения относятся даже к III в.). К тому же, развитие новых идей таким образом не было предотвращено — оно только было отодвинуто. С XVII в. они стали развиваться взрывообразно. Произошла «научная революция», которая уничтожила «старый мир» так же, как это делает революция социальная (только в духовном и интеллектуальном плане). Теперь, после четырех веков этой революции мы более отчетливо видим опасности, связанные с ее идеями — в то время, как мыслители античности могли их лишь интуитивно предчувствовать.

Естественно-научное мировоззрение в современности

Развитие событий показало, что, условно говоря, — «аристотелевское» — неприятие принципов будущей научной революции XVII в. имело определенные основания. Эти принципы приводят к своим проблемам, которые связаны с вопросом об области их применимости.

Уже в XVII в. возникает кардинальный вопрос: какова область применения этих принципов? Сначала казалось очевидным, что это — область неживой материи. Этой областью, например, ограничиваются «Начала» Ньютона в первом издании. Но во втором издании — 1713 г. — появляется, в конце «Общее поучение». В нем сказано много интересного об этих вопросах, в частности:

«Теперь следовало бы кое-что добавить о некоем тончайшем эфире, проникающем все сплошные тела и в них содержащемся, коим возбуждается всякое чувствование, заставляющее члены животных двигаться по желанию, передаваясь именно колебаниями этого эфира от внешних органов чувств мозгу, и от мозга мускулам. Но это не может быть изложено вкратце, к тому же нет достаточного запаса опытов, которыми были бы точно определены законы действия эфира» [12, с. 658]

Здесь явно содержится заявка на то, что на основании принципов, на которых построены «Начала», возможно построить теорию ощущений и деятельности нервной системы животных и человека. Не хватает только места и еще некоторых опытов.

Но это явно вызывало сомнения у самого Ньютона. В «Оптике» и при подготовке последующих ее изданий Ньютон вставлял «Вопросы» (или «Сомнения»), некоторые из которых так и не были напечатаны, но сохранились в рукописях (цит. по [13]). Среди них есть такие:

«Подтверждает ли эксперимент, что биение вашего сердца заимствует откуда-то столько же энергии сколько сообщает крови? Если это так, сообщите ваш эксперимент. Если нет — то ваши сведения не надежны. Рассуждения, не основанные на экспериментах, весьма обманчивы» [там же].

Или такой:

«Разве опыт показывает, что человек своей волей не может сообщить новое движение телу?» [там же].

Тем не менее, развитие науки и исследования самого Ньютона способствовали распространению механистического взгляда на мир. В XVIII в. его идеи пропагандировали во Франции идеологи «просветительского» направления, более всего — Вольтер. Для них это был аргумент в пользу того, что Богу остается все меньше места в мире, это было частью их борьбы с Католической церковью и стало духовной подготовкой Французской революции. После нее в XIX в. те же идеи стали популярны во многих учениях о человеческом обществе. В начале этого века было очень популярно учение Сен-Симона, утверждавшего, что он открыл законы развития человеческого общества, основной из которых аналогичен закону всемирного тяготения (но в чем заключается этот основной закон, оставалось не ясным). Влияние взглядов Ньютона видно и в том, что Сен-Симон предлагал, чтобы человечество управлялось единым правительством — «Высшим ньютонианским советом», состоящим из десяти лучших представителей естественных наук с математиком во главе, а по всему миру в храмах происходило бы поклонение

ние Ньютону. Соперником Сен-Симона был Фурье, тоже декларирующий, что в основе его системы лежит «закон страстного влечения», аналогичный закону всемирного тяготения. Он уверял, что общество развивается на основе «геометрических принципов», «свойств эллипсов, гипербол и парабол», но они нигде не формулируются, вместо этого мы встречаем совершенно фантастические рассуждения. Марксизм объявил себя «научным социализмом», а своих предшественников — «утопистами», хотя они также претендовали на «научность». В марксизме этот стиль «под науку» выдержан гораздо удачнее. В «Капитале» Маркса действительно имеются формулы, вроде

$$T - D - T,$$

но это совсем другая формула, чем например, формула, выражающая закон свободного падения: в нее нельзя подставить конкретные числа, преобразовать ее по математическим правилам и вывести новые следствия.

Вопрос о том, могут ли принципы естественно-научной идеологии, как они были сформулированы в начале статьи, быть применены к живому организму, человеку и человеческому обществу имеет важное значение. Ведь объект, изменения которого могут быть точно математически рассчитаны, функционирует с предопределенностью машины. Образ Вселенной как машины использовался еще Коперником, он пользуется термином «Мировая машина». Кеплер писал о ней так:

«Моя цель, показать что мировая машина подобна не божественному организму, но, скорее, часовому механизму» [цит. по 14, с. 108]. Наш вопрос часто так и формулируют: являются ли животные и человек машинами? Например, Декарт утверждал, что животные являются машинами, и, хотя признавал у человека душу, не раз сравнивал человеческий организм с часовым механизмом, а позже Ж. Ламетри написал книгу «Человек — машина» [15]. Но что мы признаем машиной, к тому и относимся как к машине. Машине нельзя соболезновать, жалеть ее. К машине не применимы понятия ответственности, вины. Машину бессмысленно наказывать, ее можно только чинить или пускать на слом. Поэтому, когда идеология современного естествознания применяется ко всем частям природы, из этого проистекает взгляд на природу как на бездушный материал, с которым можно делать все что угодно. Но человек сам — часть природы и такое отношение рано или поздно обращается против него.

Например, в естествознании укоренился взгляд о допустимости любых экспериментов над животными (ведь эксперимент — важнейшая составляющая естественно-научного мышления). Так, И. П. Павлов получил большинство своих результатов о рефлексах при помощи экспериментов над собаками и поставил памятник собаке с надписью: «Собака с радостью приносит себя в жертву интересам науки».

Подобные эксперименты часто вызывали протесты, на которые возражали, говоря, что эксперименты над животными дают сведения, драгоцен-

ные для медицины. Но тогда для экспериментов нужны животные, наиболее близкие к человеку. В результате переходят к экспериментам над обезьянами, которые при этом от боли кричат и плачут как люди. Но и обезьяны не совсем совпадают с людьми. И вот все время появляются слухи об экспериментах над людьми, при которых их согласие не получено (например, над душевнобольными) или вынужденно (в случае заключенных).

То же относится и к обществу. Я встретил, например, в одной книге название главы: «Марксизм, как и всякая наука, имеет право на эксперимент».

Оставляя даже в стороне вопрос, является ли марксизм действительно наукой, мы видим, как одна ссылка на авторитет науки оправдывает постановку эксперимента, угрожающего существованию целых народов. И действительно, идеология марксизма связана с постановкой эксперимента над целыми народами. Об этом неоднократно говорили не только противники, но и сторонники марксизма. Например, в эпоху, когда в нашей стране реализовались марксистские концепции, их сторонники часто говорили о «блистательном социальном эксперименте». Таким же экспериментом были и экономические реформы, осуществленные в нашей стране в начале 90-х гг. Один из их руководителей сравнил их с экспериментом, проводимым под наркозом без согласия пациента.

Но есть и другая, еще более серьезная, сторона вопроса. Особенность научной революции XVII–XX вв. заключается в том, что достижения науки немедленно находят применения в технике, почему и укоренилось название научно-техническая революция (НТР). Это дало человеку неслыханную власть над миром. Широко известно, что эта власть привела к так называемому экологическому кризису — разрушению окружающей среды. Например, из приблизительно 2 000 000 видов живых существ (растений и животных), обитающих на Земле, сейчас один гибнет каждый час. Это грозит в близком будущем сокращением числа видов на 20% и нарушением равновесия биосферы. Сейчас уже погибла больше чем половина лесов на планете, которыми она дышит, так что Земля сейчас подобна существу, у которого ампутировано одно легкое. Или, промышленная деятельность выбрасывает в атмосферу такие газы как метан и углекислый газ, создающие так называемый «парниковый эффект», приводящий к потеплению атмосферы. По заключениям комиссии ООН, за ближайшие десятилетия ее температура повысится в центральных районах Земли на 4°C, а в северных — на 8°. Подобное повышение температуры последний раз наблюдалось 120 000 лет тому назад, когда оно происходило за несравненно больший промежуток времени, так что природа имела время к нему приспособиться.

Таких примеров множество. Все это не случайные побочные эффекты научно-технического развития. Наоборот, это — логическое следствие планомерного и универсального применения принципов естественно-научного мышления, как они сложились, начиная с XVII в. Еще в самом начале этого века выступал Ф. Бэкон, оказавший громадное влияние на развитие

естествознания не своими научными трудами (их, собственно, не было), а идеологическими сочинениями. Например, все окружение, в котором работал Ньютон (имевшее центром «Лондонское королевское общество»), состояло из «бэконистов». И вот Бэкон сформулировал [16] цель науки как «господство над природой», выдвинул лозунг—«победить природу». Он писал, что эксперимент—это насилие над природой с целью вырвать ее тайны, что природу надо пытать пока, она не выдаст свои секреты. С другой стороны, когда Галилей сформулировал как свой научный принцип—измерить все, что измеримо, и сделать измеримым то, что неизмеримо, то этим он оставил вне пределов естественно-научного мышления такие переживания как сострадание, страх, гнев, эстетические переживания, этические нормы. . . С общепринятой теперь точки зрения, они должны считаться малонадежным способом контакта с внешним миром. Человечество до сих пор пользуется их руководством (например, не рассматривается экономическая выгода проекта умерщвления всех стариков, старше 60 лет), но скорее по инерции, чем на основании сознательной уверенности. Крупнейший биолог XX в. Конрад Лоренц [17] говорит, что вопрос о моральности тех или иных действий имеет смысл, только если они направлены на нечто живое, иначе речь может идти лишь об их целесообразности. Современный же человек в своей деятельности все реже сталкивается с чем-либо живым, поэтому он отучается от оценки своих действий с точки зрения их нравственности или гуманности, и оценивает их лишь с позиции целесообразности. Вот почему, когда он встречается с чем-либо живым, он его быстро уничтожает.

Есть ряд других явлений, указывающих на то, что развитие нравственно-научного мышления, начавшееся научной революцией XVII в., сейчас приводит к ситуации кризиса. Так, отличительным признаком современной цивилизации, основанной на НТР, считается ее «динамичность». Под этим подразумевается не только стремительный темп ее развития, но и то, что она иначе не может развиваться: современная цивилизация имеет устойчивость катящегося велосипеда. Конкретнее это означает, что решая некоторую проблему, она создает взамен несколько других, которые опять решает, создавая еще больше новых и т. д. Например, концентрация населения в больших городах создает жилищную проблему, которая решается путем роста городов, от чего возникают транспортные проблемы, которые решаются массовым выпуском автомобилей и дорожным строительством, что приводит к уменьшению площади обрабатываемой земли, загрязнению воздуха выхлопными газами и нехватке горючего. Современная же техника неразрывно связана с развитием естествознания—например, атомную бомбу делало то же поколение физиков, которое создало квантовую механику (в Германии атомный проект возглавлял один из создателей квантовой механики В. Гейзенберг). Но развитие естествознания замедляется на наших глазах. Если в первой половине XX в. возникли такие радикально меняющие картину мира области как теория относительности, квантовая механика и генетика, то во второй половине

века мы ничего подобного не встречаем. Когда сейчас говорят о последних успехах человечества, обычно упоминают спутники или компьютеры. Но это не относится к естествознанию, не есть открытие новых законов природы.

Это замедление явно ставит под угрозу динамическую устойчивость всей современной цивилизации.

Можно даже усмотреть более глубокие корни проявляющегося кризиса. Сама «логика» живой природы отлична от логики рационального, естественно-научного мышления. В живой природе основную роль играет ее организация в циклы, открытые Ю. Либихом и иногда называемые «циклами Либиха». Например, трупы и отходы животных поглощаются бактериями, бактерии являются основой роста растений, растения поедаются животными. Живая природа состоит из сотен тысяч таких циклов. Именно организация в циклы обеспечивает то, что в природе поглощается все, что производится. Наоборот, логическое мышление состоит из цепи силлогизмов, соединенных как бы в прямую линию. Когда в рассуждении образуется цикл — вывод совпадает с предпосылкой — это считается грубой ошибкой, «порочным кругом». Наоборот, вмешательство технологической деятельности в природу приводит к разрыву «циклов Либиха», что выражается, например, в накоплении непоглощенных отходов.

Таким образом, человек строит картину мира, в которой ему не находится места. Прежде всего, просто как живому существу. Но и в более глубоком смысле, как существу мыслящему и духовному. Цитированный нами уже выше философ А. Ф. Лосев сказал:

«Читая учебник астрономии, чувствую, что кто-то палкой выгоняет меня из собственного дома и еще готов плюнуть в физиономию. А за что?» [7, с. 405].

Процесс сращивания науки и техники проявляется не только во влиянии науки на технику, но и в обратном направлении. В науке используются все более мощные и дорогие технические средства: грандиозные ускорители, даже не помещающиеся на территории одной страны, мощные компьютеры. На науку приходится тратить заметную часть бюджета государства — сопоставимую с затратами на армию. Эти средства надо планомерно распределять, т. е. наука становится администрируемой. Успех в ней зависит от доступа к ее техническому оснащению, который находится в руках администраторов. Уменьшается роль индивидуального таланта озарения и увеличивается роль финансирования и организации. Это меняет характер самой науки.

Как не сопоставить весь этот кризис с «проклятием Прометея», сказавшего богу нового мышления, подчиняющего Космос диктату законов, что его власть у него отнимет не кто иной как он «сам у себя, замыслив безрассудное».

Конечно, древнегреческие мыслители не могли конкретно предвидеть экологический кризис и другие последствия технического прогресса и все-

объемлющего применения естественно-научной идеологии. Но они, вероятно, чувствовали, что некоторые концепции, возникавшие тогда в естествознании (философии) по необходимости вырывают человека из природы и противопоставляют его ей. Призыв «победить природу», т. е. воспринять себя как ее врага, показался бы им просто кощунственным. Такова, возможно, была мотивировка «аристотелевского тормоза», замедлившего развитие естествознания на 2000 лет.

В заключение, изложим одно оптимистическое соображение. Собственно говоря, это неверно, что во второй половине XX в. не возникло новых, ярких областей естествознания. Одна такая область безусловно появилась — наука о поведении животных (этология). Главную роль в создании новой области естествознания играл Конрад Лоренц [17]. Этологами были выделены два пути взаимодействия животных с внешним миром: наследуемые инстинктивные действия и приобретаемое научением поведение, основанное на понимании (в чем-то аналогично разделению человеческой психики на бессознательную и сознательную часть). Проанализировано, как тонко распадается конкретное действие (например, строение гнезда или охота) на цепь отдельных действий такого типа. Обнаружены поразительные действия, связывающие животных (и их группы) — так называемые ритуалы. Исследованы сообщества животных и силы их соединяющие. Достигнуто понимание того, каким образом некоторые животные воспринимают друг друга индивидуально, когда определенное животное в жизни другого не может быть заменено никаким другим. И множество конкретных исследований, включая открытие «языка пчел», которым пчела, найдя медоносный участок, сообщает его местоположение другим пчелам улья.

Все эти исследования дали много для понимания человека и человеческих обществ. Причем не за счет «низведения человека до уровня животного», в чем вначале упрекали этологов. Наоборот, стало ясно, как много элементов поведения, которые мы считаем человеческими, присущи животным.

Но это оказалась естественная наука совершенно нового типа. Она не основана на расчетах, не ищет рассчитываемых, выражаемых в числах закономерностей. В ней не меньшую роль чем эксперимент играет прямое наблюдение, часто длительное пребывание с определенным видом животных. Эта наука не требует сложной и дорогой аппаратуры. Она мало зависит от ее финансирования. Сенсационные открытия делались, когда ученый наблюдал за плавающими по пруду гусями или утками, а единственным прибором были маскирующие его ветви.

Быть может, здесь мы видим один из путей выхода из кризиса НТР. Можно было бы надеяться, что это — начало нового подхода к изучению живой природы, в принципе не сводящее ее к действию типа машины. Это могло бы стать началом создания более уравновешенной картины Природы, в которой ее живая и неживая часть изучается, исходя из их специфики, не подчиняя ни одну из них закономерностям другой. Такой подход потребовал

бы радикального изменения теперешних взглядов, когда «научной» считается лишь точка зрения, копирующая физику или математику (как бы она ни была неестественна в данной конкретной области). Неясной представляется даже граница, отделяющая живое от неживого. Например, Платон считал живым Космос. Ньютон считал живой Землю, в одном неопубликованном отрывке он сравнивает ее с огромным растением, которое дышит эфиром.

А ведь то, как человечество воспринимает мир, определяет то, как оно относится к себе и, в конечном счете, ход его истории.

Заключение

Как видно из предшествующего, развитие естествознания в новое время оценивается по-разному. Существуют две точки зрения, каждая из которых, конечно, имеет множество вариантов. В самой крайней форме первая точка зрения утверждает, что все это развитие есть «полный обман и подлог», трагическая ошибка или даже грех западной цивилизации. Вторая же утверждает, что это был самый блестящий период развития естествознания, так как оно стало на единственную приемлемую для науки почву: вопрошание природы при помощи объективного эксперимента и логическое осмысление его результатов.

Обе точки зрения не новы. «Способствовал ли прогресс наук и искусств улучшению нравов или же содействовал порче их?» — так назвал свой трактат Жан Жак Руссо, о котором Вольтер написал ему: «Прочитав Вашу книгу, мне захотелось встать на четвереньки и убежать в лес». Жозеф де Местр считал, что Ф. Бэкон и Р. Декарт были злыми демонами европейской цивилизации, они подготовили Французскую революцию. Вторую же точку зрения многократно высказывали как научные творцы, так и идеологи естественно-научной революции Галилей, Ф. Бэкон, Декарт. . .

Сейчас, в связи с наступлением экологического кризиса, первая точка зрения вновь обращает на себя внимание, часто заново ярко и резко формулируется (см. например, работы А. Лапина [18], и М. Жутикова [19]) — в то время, как в XIX в. она воспринималась как чисто нигилистическая.

И все же, сердце физика-математика вряд ли может принять взгляд на развитие, например физики, начиная с XVI в. (Коперник!), как на вредоносную ошибку. Так же, думаю, как сердце историка не приемлет концепцию Н. А. Морозова, согласно которой вся Древняя история есть фальсификация. Причем в случае физики это неприятие имеет глубокое внутреннее основание. Причина в том, что все строение «математизированной» физики поразительно красиво. В нем, как в зеркале, отражаются красивейшие разделы математики (симплектическая геометрия, теория комплексных аналитических многообразий, алгебраическая геометрия). Такой аргумент может показаться «ненаучным», он апеллирует к чувствам. Но как раз в XX в. человечество совершило самые трагические ошибки,

следуя общим концепциям (расовым или классовым) и заглушая «наивные» непосредственные чувства (жалости и отвращения к насилию). Видимо, непосредственные чувства являются гораздо более надежным руководителем в жизни. В том числе эстетическое чувство.

К тому же причину современного экологического кризиса его критики указывают по-разному. Одни видят ее в специфике абстрактного естественно-научного мышления, другие — во всеобъемлющей технизации жизни. Л. Уайт даже усматривает причину в христианстве (особенно западном), лишаящем мир и природу их ценности [20].

Кажется несомненным, что некоторой своей стороной современный кризис (и не только экологический) связан с основными категориями естественно-научного мышления. А принятие нового взгляда на мир неизбежно ведет к его реализации в практической деятельности. Но на что конкретно можно указать, как на тот «обман и подлог», о котором писал Лосев? Его видят и в принципе математизации естествознания, и в самом характере научного мышления, и в использовании моделей и абстракций. Тогда возникает вопрос: когда же возникла эта опасная тенденция? Мне представляется, что интеллектуальный переворот, произошедший в античности, был не менее радикален, чем НТР XVII—XX вв. Представим себе, например, Землю, на которой мы живем, по которой путешествуем и в которую уходим. Можно поверить, что она покоится на каких-то фантастических слонах или гигантской черепахе... Но вместо этого сказать, что «Земля висит в пространстве и не падает, так как ей столько же падать вниз, сколько и вверх»! Это значит — заменить материальную опору Земли логическим принципом симметрии. Сравнительно с этим «Коперниканская революция» является меньшим разрывом с традиционным мышлением. А язык, в котором пластичное восприятие действительности заменяется формализованным аппаратом слов и фраз — еще более древний и глубокий шаг в абстрактное, аналитическое мышление. Не говоря о письменности — это уже наполовину создание алгебры. Даже если бы жизнь убедила человечество в ложном характере всех этих тенденций, сомнительно, чтобы оно было способно вернуться так далеко назад и отказаться от них. Ведь даже авторы, наиболее радикально высказывающиеся в этом направлении, сами мыслят аналитически, используют модели и абстракции.

Я и решился составить эту сводку соображений, в основном давно высказанных, чтобы еще раз привлечь внимание к фундаментальному комплексу вопросов, как мне кажется, далеко не решенных человечеством. А может быть и неразрешимых окончательно для человека.

Литература

1. *Шекспир В.* Генрих IV // *В. Шекспир.* Полное собрание сочинений в восьми томах.— М.: 1959, Т. 4.
2. *Burt E. A.* The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science. London, 1925.
3. *Койре А.* Очерки истории философской мысли.— М.: 1985.
4. *Павленко А. Н.* Европейская космология.— М.: 1997.
5. *Galilei G. I.* Saggiatore. 1623.
6. *Аристотель.* Физика. // *Аристотель.* Сочинения в четырех томах.— М.: 1981, Т. 3.
7. *Лосев А. Ф.* Диалектика мифа // *А. Ф. Лосев.* Из разных произведений.— М.: 1990.
8. *Гесиод.* Теогония // *Эллинские поэты.*— М.: 1963.
9. *Эсхил.* Трагедии.— М.: 1937.
10. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающая наука.— М.: 1959.
11. *Schadewaldt W.* Das Welt-Modll der Griechen // *Die Neue Rundschau.* Frankfurt-am-Main, 1957. Bd. 68. Heft II.
12. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии.— М.: 1980.
13. *Merchant C.* The Death of Nature. 1980.
14. *Курсанов В. С.* Научная революция XVII века.— М.: 1987.
15. *Ламетри Ж.* Сочинения.— М.: 1983.
16. *Бэкон Ф.* Сочинения.— М.: 1978, Т. 1,2.
17. *Лоренц К.* Обратная сторона зеркала.— М.: 1998.
18. *Лапин А.* Наука и природа // *Наш современник.* 1991, № 8.
19. *Жутиков М.* Доброкачественна ли цивилизация? // *Москва.* 2000, № 3.
20. *Whyte L.* Animals and Man in Western Civilization // *Animals and Man in Historical Perspective,* 1974.



Фоменко А. Т.
Качение и скольжение

Постметафизическая философия как философия процесса: абсолютизация времени

*П. П. Гайденко*¹⁾

§ 1. Ориентация на опыт

В XIX и особенно в XX вв. в философии произошли изменения, связанные прежде всего с критикой метафизики. Эта критика началась уже в XVIII в. в английском сенсуализме и эмпиризме с его ориентацией на опыт и с его психологизмом — особым акцентом на опыт внутренних. Джон Локк начинает пересмотр центрального в традиционной метафизике понятия субстанции, — пересмотр, наметившийся задолго до того — в номинализме XIV столетия. Эта тенденция укрепляется у Д. Юма, который полностью отверг понятие субстанции — как протяженной, так и мыслящей, духовной. Соответственно и рассмотрение времени, как мы видели, теряет в эмпиризме онтологический характер и уступает место психологическому — сквозь призму внутреннего опыта изменения состояний души. Изменение, течение, последовательность психических процессов, согласно Локку, Беркли и Юму, есть источник понятия времени. И не случайно у названных философов постепенно устраняется традиционное для метафизики и средневековой теологии различие между временем, длительностью и вечностью: эмпирический мир, мир становления оказывается у них единственной подлинной реальностью.

Эта, восходящая к номинализму ориентация на опыт, и при этом прежде всего опыт внутренний как более достоверный по сравнению с внешним, проложила путь к созданию постметафизической философии. Существенным шагом на этом пути в конце XVIII в. оказался немецкий трансцендентальный идеализм. У его родоначальника — Иммануила Канта — понятие опыта играет первостепенную роль; учение Канта о времени как априорной форме внутреннего чувства во многом определило подход к этому понятию в философии XIX–XX вв. Начиная с Канта, предметом немецкого идеализма становится не субстанция, а субъект. Но, в отличие от английских эмпириков, Кант, стремясь освободиться от психологизма с его склонностью к скептицизму (особенно у Юма), вводит понятие трансцендентального

¹⁾Пиам Павловна Гайденко (1934 г. р.) — доктор философских наук, член-корреспондент РАН, Институт философии РАН, Москва.

субъекта. При этом однако он разделяет характерную для Юма критику понятия субстанции. По Канту, эмпирический мир, мир опыта — как внешнего (природа как предмет естествознания), так и внутреннего (душа как предмет эмпирической психологии) — существует лишь *в отношении к трансцендентальному субъекту как его коррелят*. Трансцендентальный субъект конструирует этот мир с помощью априорных форм чувственности (пространства и времени) и априорных форм рассудка (категорий). Определения, приписывавшиеся прежде материальным субстанциям — протяженность, фигура, движение — суть, по Канту, продукты деятельности трансцендентального субъекта. И по отношению к индивидуальной душе Кант не считает возможным применять понятие субстанции как чего-то самосущего, рассматривая ее как явление, данное внутреннему чувству. Однако реликты субстанций как самостоятельных сущих, безотносительных к трансцендентальному субъекту, сохраняются у Канта в виде непознаваемых вещей в себе, аффицирующих чувственность. Недоступные теоретическому познанию, вещи в себе принадлежат к умопостигаемому миру — сфере свободы, т. е. разума практического. Человек как субъект свободного нравственного действия несет в себе черты, которыми традиционно наделялись духовные субстанции.

Что же касается собственно понятия субстанции, то она у Канта есть категория рассудка и принадлежит к разряду динамических категорий, касающихся не предметов созерцания, а существования этих предметов по отношению друг к другу или к рассудку. Таким образом, субстанция есть не более, чем *постоянство отношений*, и о ней можно говорить лишь применительно к *миру опыта*: она есть та форма рассудка, с помощью которой он упорядочивает временные отношения. Кант продолжает намеченную в номинализме и английском эмпиризме тенденцию к уравниванию онтологического статуса субстанций и акциденций, приписывая отношению приоритет перед субстанцией.

Эта тенденция еще более углубляется в послекантовском немецком идеализме. Устранив понятие вещи в себе и превратив тем самым трансцендентальный субъект в Абсолютное Я, в творца всего сущего, Фихте не оставил места для самостоятельного бытия даже реликтов традиционных субстанций. Субстанция как категория рассудка есть, по Фихте, лишь совокупность членов некоторого отношения. Шеллинг, как и Фихте, считает, что субстанции существуют только для Я, а «вопрос, как субстанции пребывают для себя, бессмыслен»¹⁾. В качестве продукта деятельности Я субстанции принадлежат к феноменальному миру, т. е. суть лишь явления. «То, что в объекте субстанциально, обладает лишь величиной в пространстве, то, что акцидентально, лишь величиной во времени»²⁾. Критикуя «субъективный субъект-объект» Фихте, Гегель на

¹⁾ Шеллинг, Сочинения в двух томах. Т. 1. — М., 1987, с. 349.

²⁾ Там же, с. 345.

место Абсолютного Я ставит саморазвивающуюся идею, Понятие как единство субъективного и объективного. Это — абсолютная субстанция-субъект, пантеистически понятый Логос, имманентный миру и не допускающий рядом с собой никаких самостоятельно сущих субстанций-индивидуумов.

Характерна при этом апелляция Гегеля к понятию опыта, понимаемого как *опыт движения сознания*. Свою «Феноменологию духа» Гегель назвал «Наукой об опыте сознания». Философия, по Гегелю, «есть наука опыта, совершаемого сознанием. . . Сознание знает и имеет понятие только о том, что есть у него в опыте; ибо в опыте есть только духовная субстанция, и именно как предмет ее самости. Но дух становится предметом, ибо он и есть это движение, состоящее в том, что он становится для себя чем-то иным, т. е. предметом своей самости, и что он снимает это инобытие. *Это-то движение и называется опытом* — движение, в котором непосредственное, не прошедшее через опыт, т. е. абстрактное, — относится ли оно к чувственному бытию или лишь к мысленному простому, — отчуждает себя, а затем из этого отчуждения возвращается в себя, тем самым только теперь проявляется в своей действительности и истине. . . »¹⁾. Конечно, опыт движения сознания, как его мыслит Гегель, — это не эмпирический опыт в понимании Локка, Юма и позитивистов. Гегель специально подчеркивает отличие опыта в повседневном и в эмпирическом смысле слова от *опыта в философии*. И тем не менее апелляция Гегеля к опыту сознания — это еще один этап на пути преодоления метафизики. И в самом деле, знание — в данном случае философское — представляется теперь как движение. Понятие опыта необходимо Гегелю для того, чтобы определить знание как *непрерывный переход, как диалектический процесс*. Философское знание, пишет Гегель, — «это процесс, который создает себе свои моменты и проходит их, и все это движение в целом составляет положительное и его истину. Эта истина заключает в себе, следовательно, и негативное, то, что следовало бы назвать ложным, если бы его можно было рассматривать как нечто такое, от чего следовало бы отвлечься. . . Явление есть возникновение и исчезновение, которые сами не возникают и не исчезают, а есть в себе и составляют действительность *и движение жизни истины*. Истинное, таким образом, есть вакхический восторг, все участники которого упоены. . . »²⁾.

Здесь найдены точные слова для характеристики постметафизической философии, предлагаемой немецким идеализмом: истина — это *процесс, это «движение жизни духа», текучесть, переход, становление*, и душу этого процесса составляет *диалектика*, с точки зрения которой устойчивость, неизменность, самотождественность «существует только в движении в целом, понимаемом как покой. . . »³⁾.

¹⁾ Гегель, Сочинения, т. 1У. Феноменология духа. — М., 1959, с. 19. Перевод Г. Шпета. — Курсив мой. — П. Г.

²⁾ Там же, с. 24–25. — Курсив мой. — П. Г.

³⁾ Там же, с. 25.

М. А. Киссель в интересной статье, посвященной сравнительному анализу Гегеля и Гуссерля, отмечает ту роль, какую у Гегеля играет понятие опыта, и указывает на известную параллель между «Феноменологией духа» Гегеля и феноменологией Гуссерля. «Своеобразное понятие опыта, сформировавшееся в рамках феноменологии (имеется в виду Гуссерль. — П. Г.), позволяет продолжить и углубить параллель между двумя немецкими мыслителями, классическим и пост-классическим. У Гегеля мы тоже встречаемся с опытом и, чаще всего, — в „Феноменологии духа“»¹⁾.

Опыт сознания, как его описывает Гегель — это *опыт истории*. Вслед за Фихте и Шеллингом он пересматривает кантовское представление о структуре трансцендентального субъекта как структуре неисторической. Гегель рассматривает субъект познания исторически. У него нет больше речи о том, чтобы задать однозначно определенные формы трансцендентальной субъективности, — напротив, эти формы непрерывно меняются, развиваются, текут, переходят одна в другую. У Гегеля «становление есть истина бытия»; он подчеркивает, что «чистые мысли становятся понятиями и суть лишь то, что они поистине суть, — самодвижения, круги. . . »²⁾. В этой связи у Гегеля мы находим важное для него понятие «жизни». Не случайно именно к Гегелю восходит один из влиятельных в XX в. истористский вариант философии жизни, представленный В. Дильтеем, Р. Коллингвудом и др., а также в определенной степени герменевтика Г.-Г. Гадамера и его последователей.

§ 2. Понятие жизни. Подвижное единство потока

Изменчивость, непостоянство эмпирического мира, — то, что в античности называлось становлением, в постметафизической философии воспринимаются как фундаментальные определения реальности — как физической, так и психической. То, что предстает в окружающем мире как прочное и устойчивое, объясняется *незаметностью изменений в потоке реальности*. На место единства и самотождественности субстанции ставится *единство процесса; процессуальность* — вот теперь самая глубинная характеристика бытия. Процессуальность дается нам в опыте; опыт — единственно адекватное средство постижения процесса. Опыт никогда не может быть завершен, он неисчерпаем, всегда таит в себе неожиданное и непредвиденное.

Не удивительно, что в постметафизической философии проблема времени — как чистой формы текучести, изменчивости, становления — оказывается ключевой философской проблемой. Постигнуть природу времени — значит понять, что такое бытие. Именно так ставится вопрос в философии жизни Дильтея, Бергсона, Шпенглера, в феноменологии Гуссерля, в философии процесса Уайтхеда, в фундаментальной онтологии Хайдеггера,

¹⁾ Киссель М. А. Гегель и Гуссерль. // Логос № 1. — М., 1991, с. 62.

²⁾ Там же, с. 18.

в герменевтике Гадамера. «Философия процесса», — вот, пожалуй, наиболее точное имя для философии XX в.

Ключевые для философии процесса понятия — развития, эволюции, истории нередко объединяются в одном, которое кажется охватывающим их все — в понятии *жизни*. Это понятие мы встречаем уже в немецком спекулятивном идеализме, в частности у Гегеля. Жизнь, живое — это, по Гегелю, отличительная особенность высшей реальности — понятия, идеи. «... Идея, — пишет Гегель, — может быть выражена и постигнута только как процесс в ней самой (пример — становление) и как движение. Ибо истинное не есть нечто покоящееся, сущее, но есть только нечто *самодвижущееся и живое* ...»¹⁾. Определяя понятие жизни, Гегель говорит: «Жизнь — это идея в своем непосредственном существовании, вследствие чего как раз идея и вступает в область явлений, т. е. изменчивого, многообразно и внешне определяющего себя бытия. ...»²⁾.

Понятие жизни является у Гегеля также важнейшей характеристикой духа. Он критикует метафизику, которая понимала дух, или душу как «нечто простое, имматериальное, субстанцию», благодаря чему «дух рассматривался как вещь»³⁾. (Заметим в скобках, что понимание субстанции как чего-то простого, неделимого, характерное для метафизики от Платона до Лейбница, воспринимается в постметафизическую эпоху как ее «овеществление», превращение в «вещь». Впоследствии Дильтей, Бергсон, Гуссерль, Уайтхед, Хайдеггер, не говоря уже о философах постмодерна, неизменно воспроизводят эту гегелевскую критику субстанции.) Спекулятивная логика, согласно Гегелю, «показывает, что ... примененные к душе определения — вещь (имеется в виду латинское *res*, что нельзя однозначно отождествлять с „вещью“ — П. Г.), простота, неделимость, единое — в своем абстрактном понимании не истинны, но превращаются в свою противоположность. ...»⁴⁾. Пониманию разумной души (духа) как простой и неделимой субстанции Гегель противопоставляет понимание духа как жизни: «Дух не есть нечто пребывающее в покое, а скорее, наоборот, есть нечто абсолютно беспокойное, чистая деятельность, отрицание или идеальность всех устойчивых определений рассудка, — он не есть нечто абстрактно простое, но в своей простоте нечто в то же время само от себя отличающееся. ...»⁵⁾.

Впрочем, в немецком идеализме понятие жизни еще не стало фундаментальным принципом философии — здесь «разум» старой метафизики, хотя и существенно трансформированный диалектикой, еще не сдал своих позиций, а «философия процесса» сделала свои только еще первые шаги.

¹⁾ Гегель, Работы разных лет в двух томах. Т. 2. — М., 1971, с. 417.

²⁾ Там же, с. 143. «Чистая жизнь есть бытие», — читаем в «Философии религии». (Гегель, Философия религии в двух томах. Т. 1. — М., 1975, с. 149. — Перевод М. И. Левиной.)

³⁾ Гегель, Энциклопедия философских наук, ч. III. Философия духа. — М., 1956, с. 27.

⁴⁾ Там же, с. 60.

⁵⁾ Там же, с. 27.

Превращение «жизни» в альфу и омегу философского мышления происходит в последней трети XIX — первой трети XX вв. — у Ф. Ницше, А. Бергсона, В. Дильтея, Г. Зиммеля, Л. Клагеса, О. Шпенглера, а также у близких к философии жизни неогегельянцев, применявших принципы философии жизни прежде всего к истории и культуре — Р. Кронера, Б. Кроче, Дж. Джентиле. Ж. Валя, А. Кожева, Ф. Степуна, Р. Коллингвуда и др. К неогегельянкам, пожалуй, можно отнести и В. Дильтея, одного из самых продуктивных и влиятельных философов этой эпохи.

К философии жизни по своим исходным принципам тяготеет и прагматизм (Ч. Пирс, У. Джемс, Дж. Дьюи) с его пониманием истины как полезности для жизни и с убеждением в том, что только практический успех действия является критерием истинности тех понятий, из которых исходит действующий субъект. В прагматизме, так же как в английском эмпиризме, имеет первостепенное значение опыт. Только опыт здесь трактуется как практический, как опыт действия. «Человек, — пишет Пирс, — настолько полностью находится в границах своего возможного практического опыта, что он не может ни в малейшей степени иметь в виду что-либо, выходящее за эти пределы»¹⁾. Практический опыт так же изменчив и текуч, как текуча и изменчива жизнь, как ее понимает философия жизни.

Понятие жизни у представителей названного направления достаточно многозначно. В зависимости от истолкования этого понятия можно выделить несколько вариантов философии жизни: натуралистически-биологический, рассматривающий жизнь как бытие живого организма, в отличие от механизма (Ф. Ницше, Л. Клагес, Л. Больк, Л. Фробениус и др.); космологически-метафизический, наиболее ярко представленный А. Бергсоном; наконец, уже упоминавшийся выше культурно-исторический (В. Дильтей, Г. Зиммель, О. Шпенглер, Х. Ортега-и-Гассет и др.), в котором внимание приковано к исторически индивидуальным формам реализации жизни, ее неповторимым историческим образам. Разумеется, границы между этими разными течениями философии жизни относительно; однако понимание жизни как процесса, как непрерывного потока, который может быть постигнут изнутри, из ее непосредственного внутреннего переживания, интуитивно, а не с помощью рассудочного конструирования понятий и даже не с помощью философского разума, — такое понимание является общим для разных направлений философии жизни.

Так, Ницше решительно переосмысляет исходные принципы традиционной метафизики. В «Воле к власти» есть характерный пассаж с выразительным названием «О ценности становления»: «Нельзя допускать вообще никакого бытия, потому что тогда становление теряет свою цену и является прямо бессмысленным и излишним... Эта гипотеза бытия есть источник всей клеветы на мир („лучший мир“, „истинный мир“, „потусторонний мир“,

¹⁾ *Pierce C. S. Collected Papers*, v. 5, Cambridge (Mass.), 1960, 536.

„вещь в себе“...). Становление не есть кажущееся состояние, быть может, наоборот, пребывающий мир есть видимость»¹⁾.

Именно Ницше принадлежит приоритет в утверждении фундаментальных принципов постмодернизма; он возвестил не только «смерть Бога», но и «смерть субъекта». «Субъект: это терминология нашей веры в единство различных моментов высшего чувства реальности. . . „Субъект“ есть фикция, будто многие наши одинаковые состояния суть действия одного субстрата. . . Понятие „реальности“, „бытия“ заимствовано из нашего чувства „субъекта“. . . Он („субъект“) истолковывается на основании личного опыта, так что „я“ является субстанцией, причиной всяческого действия, деятелем. . . »²⁾.

Остановимся теперь на бергсоновском понимании жизни. Французский философ рассматривает жизнь как космическую витальную силу, «жизненный порыв», сущность которого — в непрерывном движении, изменении, воспроизведении себя и творчестве новых форм, сменяющих одни другие; биологическая — лишь одна из этих форм. Бергсон подчеркивает единство всего потока жизни — как растительной и животной, так и жизни сознания. «... Жизнь с самого ее происхождения является продолжением одного и того же порыва, разделившегося по расходящимся линиям эволюции. . . Само это развитие и привело к разъединению тех тенденций, которые не могли расти далее известного пункта без того, чтобы не сделаться несовместимыми между собою. Собственно говоря, ничто не мешает изобразить единственный индивид, в котором бы путем последовательных превращений в течение тысяч веков совершалась эволюция жизни. . . Но в действительности эволюция совершалась при посредстве миллионов индивидов и на расходящихся линиях. . . »³⁾. Таким образом, основные характеристики жизни — это ее неостановимый поток, непрерывные изменения и превращения ее индивидуальных форм. А это значит, что время, его необратимое течение, или, как мы сегодня говорим, «стрела времени» составляет самое фундаментальное условие возможности жизни⁴⁾. Для Бергсона длительность и жизнь — это по существу понятия-синонимы, ибо жизнь — это не пребывание, а становление, непрерывный переход из одного состояния в другое. По словам Бергсона, «нет существенной разницы между переходом от одного состояния в другое и пребыванием в одном и том же состоянии. Если,

¹⁾ *Ницше Фридрих*, Воля к власти. Опыт переоценки всех ценностей. М., REEL-book, 1994, с. 339.

²⁾ Там же, с. 226–227.

³⁾ *Бергсон А.* Творческая эволюция. М. — СПб., 1914, с. 48–49. — Перевод Э. А. Флеровой.

⁴⁾ Как справедливо отмечает И. И. Блауберг, «Бергсон стоит на позиции спиритуализма, признает дух, сверхсознание, началом мира, но далек от христианского представления о Боге. Согласно христианской традиции, Бог существует вне времени, в вечности. У Бергсона же в „Творческой эволюции“ время окончательно утвердилось в качестве основания бытия, длительность абсолютна» (*Блауберг И. И.* Апри Бергсон. — М.: Прогресс-Традиция, 2003, с. 358).

с одной стороны, состояние, которое „остается тем же самым“, представляет большую изменчивость, чем это кажется, то, наоборот, переход от одного состояния в другое походит, более, чем это себе представляют, на одно и то же длящееся состояние: *одно сменяется другим незаметно*»¹⁾.

Это очень важный принцип постметафизической философии процесса: то, что мы видим и мыслим как неизменное, есть лишь незаметное изменение: *в реальности* (в данном случае описана реальность душевной жизни) *нет ничего неизменного*. А непрерывное изменение — это, собственно, и есть длительность. «... Не существует ни аффекта, ни представления, ни желания, которые не менялись бы каждый момент; если бы состояние души перестало изменяться, его длительность... прекратила бы свое течение»²⁾. То, что описывает здесь Бергсон, — а именно эмпирическое состояние душевной жизни, — неоднократно описывалось и эмпирической психологией, и в особенности английскими сенсуалистами, показавшими, что душевная жизнь есть последовательность состояний сознания. Но Бергсон превращает непрерывное изменение эмпирического сознания в образец, который служит исходным для понимания жизни как таковой, вне которой нет и не может быть никакой другой реальности. Согласно Бергсону, в реальности нет ничего вневременного, сверхвременного. С его точки зрения, ложная метафизика — платонизм — с его учением о надвременных идеях как мире бытия, в противоположность текучему миру становления постигаемых только разумом, есть результат неправильного понимания природы разума и рассудка: по убеждению Бергсона, разум не способен постигать подлинную реальность — жизнь в ее текучести, ибо понятия рассудка служат средством для достижения только практических, утилитарных целей и сложились у человека в ходе его приспособления к среде. Лишь интуиция, постигающая изнутри поток изменений, открывает нам сущность жизни.

Философия жизни в ее бергсоновском варианте принципиально иррационалистична. Как справедливо отмечает Н. О. Лосский, «Бергсон видит идеал знания в сочетании науки и философии в единое целое. Однако... он пытается достигнуть этой цели путем изгнания из науки именно того, что делает ее наукою — идей в платоновском смысле этого слова. Таким образом, идеал объединения выставлен им только на словах, на деле же своею гносеологиею он отрезывает пути для его осуществления, так как отрицает объективное значение понятий рассудка, выражающих сферу идеального сверхвременного бытия»³⁾. И в самом деле, в мире, каким его видит Бергсон, существует только становление, только поток изменений, все неизменное — сверхвременное — для Бергсона есть нечто мертвое, безжизненное, искусственно сконструированное.

¹⁾ Там же, с. 2. — Курсив мой. — П. Г.

²⁾ Там же, с. 1–2.

³⁾ Лосский Н. О. Интуитивная философия Бергсона. — Пб., 1922, с. 105.

Бергсон внес наиболее ощутимый вклад в создание постметафизической философии. Не удивительно, что его влияние в начале XX в. было очень сильным: ему удалось выразить основную тенденцию эпохи. К тем, кто испытал влияние Бергсона, принадлежит, в частности, известный английский философ А. Н. Уайтхед. В мышлении Уайтхеда, как и его соотечественников Локка и Юма, а также у представителей прагматизма, особенно Дьюи, ключевую роль играет понятие опыта. Как и философия жизни и прагматизм, Уайтхед отвергает метафизику субстанции. Субстанцию он понимает как изолированную неподвижную вещь: именно такой, по мнению Уайтхеда, была субстанция у Аристотеля, Декарта, Ньютона. Реальная действительность, по Уайтхеду, есть изначальное *становление, изменение, процесс*. Конечную цель философии английский мыслитель видит в раскрытии «опыта потока вещей»¹⁾. Как отмечает А. С. Богомолов, с точки зрения Уайтхеда, природа есть «единство „событий“ — „элементарных фактов чувственного опыта“ и объектов — „непреходящих элементов в природе“, устойчивой стороны преходящих, текучих событий. Такая картина мира позволяет, по мысли Уайтхеда, понять природу как „процесс“...»²⁾. Каждое событие тоже мыслится английским философом как процесс. События, пишет он, — это «процессы опыта, каждый из которых представляет собой индивидуальный акт. Целостная вселенная — прогрессирующее соединение этих процессов»³⁾. Именно Уайтхед подарил постметафизической философии XX в. ее подлинное имя — *философия процесса*.

§ 3. Эволюционизм в философии и науке XX столетия

Идеи Бергсона, в частности его трактовка времени и понятие творческой эволюции оставили заметный след в постметафизической философии XX в. Натурфилософское направление, носящее название эмерджентного эволюционизма и получившее широкое распространение, начиная с 20-х годов прошлого века, к которому принадлежали А. Н. Уайтхед, К. Л. Морган, С. Александер, П. Тейяр де Шарден и др., несет на себе печать влияния Бергсона. Не менее очевидно это влияние и в естествознании, в частности в творчестве И. Пригожина, указывающего на Бергсона как на главный источник его трактовки времени и становления⁴⁾.

Принцип эволюционизма в последней трети XX в. оказывается господствующим не только в синергетике (И. Пригожин, Г. Хакен), но, как показывает В. С. Степин, становится сегодня основой научной картины

¹⁾ Whitehead A. N. *Prozeß und Realität*. Frankfurt a. M., 1979, S. 385.

²⁾ Богомолов А. С. Алфред Норт Уайтхед. // *Философская энциклопедия*, т. 5. — М., 1970, с. 269.

³⁾ Whitehead A. N., *Adventures of ideas*. N. Y., 1958, p. 199.

⁴⁾ См. Пригожин И., Стенгерс И. *Время, хаос, квант. К решению парадокса времени*. — М., 2000, с. 22–23.

мира, превращаясь в *эволюционизм универсальный*. «Универсальный эволюционизм не только распространяет развитие на все сферы бытия (устанавливая универсальную связь между неживой, живой и социальной материей), но преодолевает ограниченность феноменологического описания развития, связывая такое описание с идеями и методами системного анализа. В обоснование универсального эволюционизма внесли свою лепту многие естественнонаучные дисциплины. Но определяющее значение в его утверждении как принципа построения современной общенаучной картины мира сыграли три важнейших концептуальных направления в науке XX в.: во-первых, теория нестационарной вселенной; во-вторых, синергетика; в-третьих, теория биологической эволюции и развитая на ее основе концепция биосферы и ноосферы»¹⁾.

Если в XIX в. принцип эволюции господствовал главным образом в биологии и социологии, то в последней трети XX в. происходит трансляция этого принципа в физику и космологию²⁾. Теория расширяющейся вселенной («Большого взрыва») внесла в научное сознание идею космической эволюции и создала предпосылку для описания неорганического мира в терминах эволюции³⁾. «Большой взрыв, — пишут И. Пригожин и И. Стенгерс — можно рассматривать как необратимый процесс в самом что ни на есть чистом виде»⁴⁾. Как полагает физик В. Д. Захаров, именно Большой взрыв рождает время: «Большой взрыв — это необратимый фазовый переход из состояния квантового вакуума к состоянию вещества. Этот переход рождает время, и это время — однонаправленное. Этим определяется также универсальность стрелы времени: она едина для всей Вселенной»⁵⁾.

Существенную роль в утверждении принципа эволюции в естествознании сыграла уже упомянутая нами синергетика — теория самоорганизации, изучающая самоорганизующиеся системы любого вида — от атомов, молекул, клеток до сложных организмов и человеческих сообществ. «Под самоорганизацией в синергетике понимаются процессы возникновения макроскопически упорядоченных пространственно-временных структур в сложных нелинейных системах, находящихся в далеких от равновесия состояниях,

¹⁾ *Степин В. С.* Теоретическое знание. — М., 2000, с. 645–646.

²⁾ «Универсальный (глобальный) эволюционизм, — пишет В. С. Степин, — характеризуется часто как принцип, обеспечивающий экстраполяцию эволюционных идей, получивших обоснование в биологии, а также в астрономии и геологии, на все сферы действительности и рассмотрение неживой, живой и социальной материи как единого универсального эволюционного процесса» (там же, с. 643–644).

³⁾ См. *Гут А. Г., Стейнхардт П. Дж.* Раздувающаяся Вселенная. // В мире науки, № 7, 1984. См. также *Казютинский В. В.* Вселенная в научной картине мира и социально-практической деятельности человечества. // *Философия, естествознание. Социальное развитие.* — М., 1989.

⁴⁾ *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. — М., 2000, с. 186.

⁵⁾ *Захаров В. Д.* Введение в метафизику природы. — М., 2003, с. 242–243.

вблизи особых критических точек — точек бифуркации, в окрестности которых поведение системы становится неустойчивым. Последнее означает, что в этих точках система под воздействием самых незначительных воздействий, или флуктуаций, может резко изменить свое состояние. Этот переход часто характеризуют как возникновение порядка из хаоса»¹⁾.

Для неравновесных состояний системы характерны два момента: во-первых, фундаментальная роль случайности: ведь именно случайные процессы обуславливают переход с одного уровня самоорганизации к другому, тем самым преобразуя систему. И, во-вторых, эти состояния необратимы, т. е. несут в себе «стрелу времени». Как отмечает В. Д. Захаров, «неустойчивость приводит к необратимости. Необратимость рождает космологическую стрелу времени. Эта космологическая стрела говорит о том, что реальная Вселенная живет в естественном времени. Космологическое время — бергсоново время. Наша психологическая стрела времени рождается космологической стрелой времени»²⁾.

§ 4. Фетишизация времени в постметафизической философии и постнеклассической науке

Итак, временность, длительность, становление, процесс, изменение, эволюция — вот ключевые определения реальности в постметафизической философии, определяющей свои исходные принципы в полемике с метафизикой, как она сложилась в античности и просуществовала вплоть до XVIII в. — до Лейбница и Вольфа. Если у Парменида, Платона, Аристотеля, Плотина и Прокла подлинная реальность — мир бытия — характеризуется как нечто тождественное себе и неизменное, в отличие от мира становления как изменчивого и преходящего, то в XIX–XX вв. происходит радикальная переоценка ценностей: как раз вневременное и неизменное рассматриваются как нечто неподлинное и нереальное, как статичное и косное, мертвое, а не живое.

Очень интересные соображения по поводу этой переоценки ценностей в науке XX в. высказал Карл Поппер в одной из последних своих работ, вышедшей посмертно с характерным названием: «Мир Парменида: очерки о досократовском просвещении»³⁾. Один из разделов этой книги — главу под названием «За пределами поиска инвариантов» — перевел на русский язык Н. Ф. Овчинников; перевод, приуроченный к столетию со дня рождения Поппера, опубликован в журнале «Вопросы естествознания и техники» (№ 4 за 2002 и № 2 за 2003 гг.). Центральным предметом исследования

¹⁾ Аршинов В. И. Синергетика. // Новая философская энциклопедия, т. III, М., 2001, с. 546. Обстоятельный анализ принципов синергетики и ее роли в изменении научной картины мира дан в работе В. И. Аршинова «Синергетика как феномен постнеклассической науки», М., 1999.

²⁾ Захаров В. Д. Введение в метафизику природы. — М.: 2003, с. 242.

³⁾ Popper K. The world of Parmenides, N. Y., 1998.

в книге Поппера является проблема инвариантов. Поппер справедливо полагает, что Парменид в своем учении о бытии отождествил реальность с инвариантностью. А поскольку без допущения инвариантов не может быть построена никакая научная теория, то понятно, что идеи Парменида определили характер европейской науки. Вот что пишет Поппер о проблеме, которую он обсуждает в своей книге: «Я попытаюсь здесь показать сохранившуюся до наших дней почти неограниченную власть над западной научной мыслью идей великого человека, жившего 2500 лет назад — Парменида из Элеи. Идеи Парменида определили цель и методы науки как поиск и исследование инвариантов. ... Я попробую показать, что эти поистине вечные идеи Парменида практически сразу после появления пережили своего рода крушение, повлекшее то, что я буду называть „Парменидовой апологией“; я также попытаюсь показать, что и это крушение было не менее вещным, ибо Парменидовы идеи в современной науке неоднократно терпели крах, каждый раз приводивший к типическим Парменидовым апологиям. И я попытаюсь продемонстрировать вам, что примерно с 1935 г. эти идеи снова переживают кризис, возможно более суровый, чем когда-либо ранее. ... Идеи Парменида оказали мощное воздействие на эволюцию научных идей; в силу этого нет нужды говорить, что я не только поклонник Парменида, но так же высоко, как в свое время Мейерсон, оцениваю его влияние»¹⁾.

Правда, идея инвариантов у Парменида была выражена в крайней форме — как отрицание каких бы то ни было изменений: с точки зрения Парменида, мир подлинного бытия неизменен, неподвижен, вечен, в отличие от «мира мнения», мира становления, истинной реальностью не обладающего. Поэтому коррективы в учение Парменида были внесены еще в античности — атомистами, Платоном, Аристотелем. Но свое значение идея Парменида от этого не утратила, она была лишь ограничена и получила иное обоснование. А вот в XX в., и не только в науке, но и в философии, по убеждению Поппера, «эта идея часто подвергалась нападкам со стороны всякого рода врагов рационализма, которые толковали о диалектической эволюции, или творческой эволюции, или эмерджентной эволюции, или о „становлении“, не создавая, однако, никакой серьезной теории „становления“, которая могла бы рационально, т. е. критически, подвергаться обсуждению»²⁾. Действительно, эволюционизм, как мы уже показали выше, отвергает принципы классической метафизики и стремится на место бытия поставить становление. Сам Поппер при всем его критическом отношении к идеям эволюционизма занимает и по отношению к идее Парменида позицию взвешенную. «Конечно, — пишет он, — мы не можем отказаться ни от парменидовой рациональности — поиска истинной реальности позади мира явлений и метода состязания

¹⁾ Поппер К. За пределами поиска инвариантов. // Вопросы истории естествознания и техники, 2002, № 4, с. 67.

²⁾ Поппер К. За пределами поиска инвариантов. // Вопросы истории естествознания и техники, 2003, № 2, с. 65.

гипотез и критицизма, ни от поиска инвариантов. Но от чего мы должны отказаться, так это от отождествления реальности с инвариантами»¹⁾.

В заключение нашего краткого изложения точки зрения критического рационализма Карла Поппера на те изменения в философии, а отчасти и в науке, которые происходили в XIX, а особенно в XX вв. и привели к созданию постметафизической философии, приведем небезынтересную «таблицу противоположностей», составленную Поппером применительно к идеям Парменида в духе известной таблицы пифагорейцев. «Слева, — поясняет Поппер, — я располагаю то, что может быть названо „идеями Парменида, или категориями“ („путем истины“), а с правой стороны — их антипарменидовы антагонисты („путь мнения“):

Необходимость	Случайность
Совершенство	Несовершенство
Точность	Приближенность
Обратимость	Необратимость
Повторяемость	Изменчивость
Вещи	Процессы
Инвариантность	Возникновение» ²⁾ .

Таблица эта — при всех возможных здесь оговорках, — хороша тем, что с наглядностью являет ту «переоценку ценностей», которая была осуществлена в европейском мышлении на протяжении последних двух столетий. Такие понятия, как процесс, возникновение (добавим — возникновение *нового*), изменчивость (становление), случайность, необратимость становятся ключевыми для постметафизической философии процесса.

Эту переоценку ценностей совсем иначе, чем Поппер, оценил русский философ И. И. Евлампов в статье «Неклассическая метафизика или конец метафизики? Европейская философия на распутье»³⁾. Автор статьи разделяет принципы постметафизической философии процесса, именуя ее неклассической метафизикой и справедливо видя в философии жизни, как она представлена Ницше и Бергсоном, а также в экзистенциализме Хайдеггера наиболее последовательное ее выражение. «Помимо ясной критики платоновской философии и ее негативной роли в истории, заслуга Бергсона состоит в том, что он доводит до логического завершения противоположную тенденцию, альтернативную платонизму. С одной стороны, он признает наличие Абсолюта в структуре реальности, однако, безусловно, сохраняя для его описания характеристику целостности. . . , Бергсон категорически отвергает традиционное утверждение о *завершенности* Абсолюта, о его *статичности*. В классической традиции даже те философы, которые настаивали на необходимости применения к Абсолюту термина „становление“ (Плотин,

¹⁾ Там же, с. 97.

²⁾ Там же, с. 97.

³⁾ Вопросы философии, № 5, 2003, с. 164–165.

Николай Кузанский, Фихте, Гегель)¹⁾, все-таки полагали, что Абсолют одновременно выше этого становления и уже *обладает актуально* всеми теми состояниями, к которым оно направлено. Бергсон устраняет этот последний оплот классической концепции Абсолюта. Задумаемся (вместе с Бергсоном), почему на протяжении многих столетий понятие становления полагалось слишком „низменным“, чтобы его можно было применить к Абсолюту, Богу? Очевидно, именно потому, что оно рассматривалось как движение к некоторой *определенной, заранее заданной цели*; такое понимание становления было навязано интуицией *пространства и пространственного движения объектов*. . . Если мы признаем ее неуниверсальной, характерной только для нашего частного и вторичного образа существования, то в своих попытках понять Абсолют мы должны устранить все неявные следы присутствия этой формы в нашем сознании. Тогда становление выступит в качестве того, чем оно и должно быть — как самое фундаментальное и важное определение бытия. Только в этом случае каждый акт становления в Абсолюте может быть понят как подлинное творчество, рождение чего-то абсолютного нового в бытии; соответственно акт Творения, который в каноническом христианстве и в платонических версиях христианской философии выступает простым „дублированием“ в низшем начале (ничто, материя) форм бытия, предсуществующих в Боге, предстанет в своей по-настоящему возвышенной форме — как акт непрерывного творческого обогащения бытия, целостного бытия, включающего как Абсолют, так и все его творческие „эманации“»²⁾.

Данное здесь изложение основных принципов неклассической философии процесса, как она представлена Бергсоном, не только позволяет увидеть ее отличие от классической метафизики, отождествляемой автором — и, конечно, не без оснований — с платонизмом, но, что не менее важно, позволяет выявить *общую пантеистическую предпосылку*, лежащую в основе постметафизического мышления. Нельзя не согласиться с И. И. Евлампиевым, что философия процесса отвергает не только античный платонизм, но и христианский догмат творения, как, впрочем, и вообще христианское понимание Бога, которое имеет в качестве своей предпосылки различение вечности и времени, неприемлемое для философии жизни. С точки зрения Евлампиева, в этом состоит преимущество «неклассической философии», считающей высшей ценностью *рождение*

¹⁾Применительно к Плотину — в отличие от Кузанского, Фихте и Гегеля — вряд ли можно говорить о характеристике Абсолюта как „становления“; тем самым Плотин неправомерно сближается с Бергсоном. Впрочем, такое сближение мы находим не только у Евлампиева, но и у С. Л. Франка, чье истолкование неоплатонизма с учением Николая Кузанского разделяет и Евлампиев. О принципиальном отличии Плотина от Бергсона см. мою статью «Метафизика конкретного всеединства, или Абсолютный реализм С. Л. Франка» \ «Вопросы философии» № 5, 1999, с. 145–146.

²⁾Евлампиев И. И. Неклассическая метафизика или конец метафизики? Европейская философия на распутье. \ «Вопросы философии», № 5, 2003, с. 164–165.

нового. А поскольку новое рождается во времени, то постметафизическая философия, утверждая в качестве единственной реальности процесс, поток, становление, творчество нового, так же как и универсальный эволюционизм современной науки, возводят время как необратимое, как «стрелу времени» в первый принцип всего сущего. Как замечает в этой связи В. Д. Захаров, «Пригожин фетишизирует время настолько, что считает его существовавшим уже до возникновения Вселенной. В этом я с ним не согласен»¹⁾.

Конечно, можно видеть в превращении времени в своего рода новый абсолютизм заслугу философии и науки XX в. Но можно взглянуть на дело и иначе: абсолютизовав время и становление, не утрачиваем ли мы что-то важное и существенное, чем обладало человечество в эпоху метафизики и что оказалось разрушенным сегодня? Вот что думает по этому поводу известный католический философ Романо Гвардини: «Если спросить современного человека, как он воспринимает жизнь, то ответ в различных вариантах всегда сведется к одному и тому же: жизнь — это усилие, поиски цели и прыжок к ней, творчество, разрушение и новое творчество, то, что *бурлит и находится в движении, течет потоком и бушует*. Поэтому современному человеку трудно почувствовать, что жизнь есть также и могучее присутствие, сосредоточенная в себе сокровенность, сила, парящая в спокойствии. По его представлениям, жизнь *неотделима от времени*. Она — изменение, переход, постоянная новизна. Той жизни, которая выражается в длительности и устремляется к вечной тишине, он не понимает. Если ему случается представить себе Бога, то он думает о Нем как о творящем без устали. Он склонен даже представлять Его Самого в *постоянном становлении*, созидаящим Себя на пути от бесконечно далекого прошлого к столь же далекому будущему. Бог, пребывающий в чистом настоящем, неизменный, Сам Себя исчерпывающий в невозмутимой реальности, не говорит ему ничего. И если он слышит о „вечной жизни“, которая должна быть исполнением всякого смысла, то легко приходит в замешательство: что это за существование, в котором ничего не происходит? . . . »²⁾

Предпосылки постметафизической философии формируются вместе с началом процесса секуляризации, в эпоху Возрождения, но традиция метафизики оказывается достаточно устойчивой и сохраняется — у некоторых новоевропейских философов — вплоть до XVIII в. С точки зрения интересующей нас проблемы времени в этот период тоже происходят существенные изменения: постепенно, начиная с конца XVII в., утрачивает свое значение характерное для античности и средних веков рассмотрение времени сквозь призму вечности, и время с его необратимостью все более приобретает черты «нового Абсолюта», коими оно наделяется у Гуссерля, Гадамера, Хайдеггера.

¹⁾ Захаров В. Д. Введение в метафизику природы. — М., 2003. с. 243.

²⁾ Гвардини Р. Апокалипсис — время и вечность. \ \ Логос, № 47, 1992, Брюссель — Москва, с. 249–250.



Фоменко А. Т.
Элементы топологии многообразий

Метафизика и математика: точки соприкосновения¹⁾

В. В. Миронов²⁾

§ 1. Идеи основоположников метафизики

В наше время философию все чаще стали называть гуманитарной наукой, что на самом деле глубоко неверно. Философия и науки имеют общее смысловое пространство, связанное с поиском истины, в рамках которого соприкосновение философии и математики достаточно существенно. Не случайно фигуры целого ряда мыслителей мы даже не можем однозначно отнести к философам или математикам, вспомним хотя бы имена Пифагора, Платона, Декарта, Лейбница, Флоренского и др.

Уже *Платон*, разделяя бытие на два различных и взаимосвязанных мира, ставил проблему разных способов их познания. Мир единичных предметов, считал он, познается с помощью чувств, которые могут нас обманывать. Мир же подлинного бытия представляет собой совокупность идей, т. е. умопостигаемых форм или сущностей. Многообразие вещественного наблюдаемого мира есть лишь отражение мира сущностей. Таким образом, процесс познания есть интеллектуальное восхождение к истинно сущим видам бытия. Платоновские идеи — это не просто субстанциализированные и неподвижные родовые понятия, противостоящие чувственной действительности, а ее идеальный принцип строения, как бы невидимый телесному оку «информационный каркас», познав который, можем сконструировать и саму вещь. Истинное бытие совпадает с истинным знанием, но в отличие от последнего, представляет собой процесс непрерывного конструирования мира. Математику и философию сближает то, что обе науки исследуют идеи в наиболее чистом виде на высоком уровне абстрагирования от действительности. Но здесь же лежит и главное их отличие, связанное с тем, что они опираются на различные познавательные способности. В основе математики лежит способность рассуждать — рассудок (диано́я), а в основе

¹⁾Статья подготовлена при участии Е. В. Косиловой, любезно представившей полный текстовый материал конференций.

²⁾Владимир Васильевич Миронов (1953 г. р.) — член-корреспондент РАН, доктор философских наук, профессор, декан философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, зав. кафедрой онтологии и теории познания.

метафизики — диалектический разум (нус или ноззис), т. е. дар постижения первоначал. Для обоснования подлинной истины рассудка, в том числе и математического, недостаточно. Именно анализируя особенности математики, философ приходит к идее необходимости существования особого рода науки, которая должна выступать в качестве беспредпосылочного знания, которое позже стало обозначаться термином метафизика. Действительно, рассуждает Платон, для обоснования истины метода дедукции, превалирующего в математике, недостаточно, ибо таким образом нельзя обосновать ее собственные начала и предпосылки. Получается, что в основе точного знания нет обоснованных начал, а значит, это во многом лишь гипотезы, которые могут оказаться и недостоверными. Платон даже, конечно, иронически, вопрошает, а стоит ли считать математику наукой? Необходима, рассуждает он, особая дисциплина, которая может устанавливать истинность предпосылок, опираясь на знания, находящиеся за пределами дедуктивных методов рассуждения, в более широком смысле — за пределами наук.

Таким образом, любому знанию, дифференцирующемуся в науках, должна предшествовать метафизика, главным методом которой выступает диалектика. Диалектика освобождает метафизику от мира чувственности, переводя рассуждения на уровень разума. Метафизика исследует умопостигаемые идеи (идеи, постигаемые умом), которые не зависят от реальной действительности, «не искажены» чувственными методами познания, а значит, могут существовать как истинные. Следовательно, относительно науки, только философия, опирающаяся на диалектику, способна обосновать предпосылки любого знания, исследовав предварительно предпосылки знания как такового. Обоснование же самой метафизики (что можно назвать метафилософией) должно осуществляться через знаменитый платоновский анемнезис (припоминание) того, что некогда непосредственно видела и слышала душа в умопостигаемом мире истинных сущностей. Это, конечно, особый тип внерационального основания, связанного с личностным опытом, который, тем не менее, позволил Платону объяснить очень много. Весьма детально диалектическое самообоснование разума и попытка впервые эксплицировать его имманентную категориально-смысловую структуру — представлены Платоном в двух его знаменитых диалогах — «Софист» и «Парменид», из которых, собственно говоря, и можно отсчитывать традицию европейской диалектической метафизики. Таким образом, изначально, метафизика и диалектика оказываются тесно взаимосвязанными и Платона «можно считать первым творцом *метафизической системы*»¹⁾.

Аристотель, полемизируя со своим учителем, в частности, по оценке эффективности метода диалектики, считал, что в основе беспредпосылочного знания должна лежать абсолютная предпосылка. В противном случае любое

¹⁾ Ойзерман Т. И. Метафилософия. Теория историко-философского процесса. — М., 2009, с. 321.

философствование может оказаться ложным. Диалектика выступает лишь в качестве рационального средства, расчищающего место для знания, а изначальным метафизическим абсолютом является бытие. Бытие — это особое понятие, которое не является родовым, так как его нельзя подвести под более общее так же, как и под него, все остальные понятия. Поэтому, принимая тезис Парменида, отождествляющего бытие и мысль о бытии, он уточняет это положение, говоря о том, что бытие само по себе лишь абстракция, потенциальное, мыслимое бытие, а реально всегда существует бытие чего-то, т. е. бытие конкретных предметов. Следовательно, соотношение бытия и мышления есть соотношение конкретного предмета и мысли о данном предмете. Мир представляет собой реальное существование отдельных, материальных и духовных, предметов и явлений, бытие же — это абстракция, которая лежит в основе решения общих вопросов о мире. Бытие — это фундаментальный принцип объяснения. Оно — непреходяще, как непреходяща сама природа, а существование вещей и предметов в мире — преходяще. Это, по Аристотелю, — основной закон бытия или «начало всех аксиом», и он пытается конструировать философию как строгую аксиоматическую дисциплину, подобную математике. В основе системы философской аксиоматики должна лежать абсолютная истина. Но бытие слишком многозначно, и Аристотель находит выход из этой ситуации, вырабатывая систему разных смыслов бытия. Проблема выделения количественных отношений, т. е. проблема математическая, оказывается здесь на вершине иерархической системы смыслов бытия, а именно при решении вопроса о «бытии в себе». Говоря современным языком, выявление количественных отношений относится к сфере онтологии.

Следующая точка соприкосновения философии и математики у Аристотеля связана с выявлением причин бытия вещей и их сущности. Формальной причиной бытия вещи выступает ее первосущность или форма («морфе»). Материя есть реальность, чувственно воспринимаемая, но лишь потенциально. Стать чем-то она может, лишь приняв некую форму. Форма — это то минимально общее, что способно дать вещи самостоятельное существование. Формы не распадаются далее на виды, они вечны, неизменны и являются предметом исследования метафизики. Они могут быть внесены в материю, сотворив тем самым вещь. Таким образом, вещь состоит из активной формы и пассивной материи. Материя сама по себе пассивна, но, так же как форма, вечна. Она необходима для появления конкретной вещи, но в качестве потенциального вместилища. И, кроме того, она придает вещам индивидуальность. Действительную сущность, таким образом, составляет «*sinolos*», т. е. буквально «субстанциональность», которая объединяет материальное и формальное начало. Сущность можно, по Аристотелю, различить по трем родам. Это сущности, к которым сводимы конкретные чувственные вещи. Этим занимается физика. Сущности, к которым сводимы абстракции математики. И, наконец, сущности, существующие вне чувственности

и абстрактности. Это сущности божественного бытия или сверхчувственная субстанция, которые являются предметом метафизики. Таким образом, *физика* (в тогдашнем ее понимании), *математика* и *метафизика* составляют фундаментальный корпус философии, в которой метафизика выполняет функции метанауки, обосновывая не отдельные знания, а знание как таковое, не истину физики или математики, но истину вообще. Философия и математика, таким образом, оказываются рядоположенными науками, так как с разных сторон занимаются идеальными сущностями. Философия исследует идеальные сущности как существующие реально (Платон) или созданные в результате философской рефлексии, а математика конструирует идеализированные сущности, помогая, в том числе и другим наукам, создавать системы идеализированных объектов науки. В этом смысле и философия, и математика, стоят над конкретными науками, давая им философское или математическое обоснование.

§ 2. О точности и доказуемости в математике

Науки, определив собственный объект исследования, даже если последний не является проявлением только естественных закономерностей, рассматривают его вне системы иных, присущих ему связей и отношений. Поэтому, например, человек может трактоваться и как биологический, и как биохимический, и как механический, и как социологический, и как исторический объект. Это фундаментальное условие данного типа познания, делающее возможным таким образом взглянуть на исследуемый феномен, чтобы можно было раскрыть в нем конкретные предметные закономерности. Поэтому истины науки всегда являются истинами опредмеченными. Понятно, что в этом случае возможно достижение относительной «однозначности» понятийного аппарата науки, которая во многом определяется присутствием в ней математики. Именно это и приводит к точности как важнейшей характеристике конкретной науки, которая, однако, что не всегда лежит на поверхности, достигается за счет сильного, иногда предельного «огрубления» действительности, в результате которого создается идеализированный концептуальный каркас, отличающий одну науку от другой. Такого рода концептуальный каркас потом проверяется практикой, которая может значительно уточнять теоретические выводы. В этом смысле точность науки — это также *предметная точность*, пределом которой «является идентификация ($a=a$)»¹⁾, которая, конечно, выше в естественных науках и более расплывчата в гуманитарных, но и там, и там к ней стремятся. Правда, здесь, в абсолютном смысле, она вряд ли достижима, а уже тем более не может выступать в качестве критерия научности, так как сама «зависит от гносеологических предпосылок и, следовательно, определяется выделен-

¹⁾Бахтин М. М. К методологии литературоведения// Контекст — 1974.— М., 1975, с. 205.

ной (абстрагированной) предметной областью и наличными методами ее исследования»¹⁾. Поэтому расхожее мнение о том, что большая точность естественных наук является только положительной характеристикой, отличающей их от гуманитарных, весьма относительно. Достижение большой точности может сопровождаться уходом в область чисто идеализированного конструирования, когда мы сами задаем критерии точности и истинности.

В математике (этой «точнейшей из точных наук») ситуация еще сложнее. Не случайно существуют разные основания математики, задающие различные параметры обоснования математического знания и специфику математической истины. Абстрактный математический объект задается теми свойствами или признаками, которые указываются в определении, т. е. идеально, тогда как реальный объект обладает собственными внутренними свойствами, которые не всегда могут быть раскрыты. Поэтому, например, если содержательная математическая теория исследует количественные отношения (или форму) с помощью систем абстрактных объектов (т. е. неких теорий), то формальная математическая теория исследует отношения объектов произвольной природы, которых может просто не существовать. Соответственно разные основания математики опираются на исследование разных типов объектов как произвольной, так и конструктивной природы. Поэтому классическая математика использует теоретико-множественные методы, которые не использует конструктивная математика. В рамках теоретико-множественного подхода все объекты рассматриваются как некоторые множества, и принимается предпосылка о том, что любой объект осуществим, если он определен непротиворечивым образом (логическая осуществимость). Соответственно здесь используются абстракции актуальной бесконечности, принципы классической логики и классическое понимание истинности математических суждений. В конструктивной же математике, напротив, используется абстракция потенциальной осуществимости, потенциальной бесконечности, а математические объекты представляют собой конструктивные математические объекты, и применяется конструктивная логика (алгоритмы). Соответственно и истина здесь трактуется как истина конструктивная, а не классическая. Таким образом, возникают проблемы, которые нельзя разрешить внутри самой математики, например, проблема соотношения математических абстракций и действительности, проблема истинности математического знания.

Последняя проблема особенно интересна для философов. Не имея возможности ее подробного разбора, отметим лишь, что в математике она часто подменяется. Это либо варианты ухода от проблемы, когда утверждается, что истина, как характеристика описания реальной действительности, возникает лишь в том случае, если математическое знание прикладывается к кон-

¹⁾ Кузнецов В. Г. Диалектика точного и неточного в современном научном познании (Материалы «круглого стола»)// Вопросы философии, 1988.— М., № 12, с. 30.

кретной теории, описывающей действительность. В данном случае истина часто трактуется как, прежде всего, эмпирическая. Или варианты сведения проблемы истинности в чистой математике к проблеме доказуемости. В этом случае онтологический статус истины исчезает, и она подменяется логической правильностью выводов. Но тогда мы возвращаемся к проблеме, которую ставил еще Аристотель. Логические выводы должны базироваться на истинных предпосылках, но как обосновать исходные суждения, особенно в случае исследования предельных характеристик бытия. Иногда понятие истинности в чистой математике подменяется проведением принципа непротиворечивости, который объявляется достаточным свойством математических теорий. Однако жесткое проведение такого принципа может оставить «за бортом» огромное количество научных теорий, в том числе и математических, например, канторовскую теорию множеств. Р. Карнап предлагал вариант трактовки истины в математике как, прежде всего, логической, а не фактической. Но в этом случае не учитывался тот факт, что математика и логика базируются на разных гносеологических предпосылках. В результате возникает множество направлений обоснования математики: канторовский теоретико-множественный подход, расселовское логицистское основание математики, формалистское обоснование классической математики Гильберта и др. Каждое из этих обоснований имеет свои преимущества, решая какой-то класс задач, но и ограничивая сферу применения. То есть фактически в каждом случае, в зависимости от задачи, исследователь выбирает то или иное математическое обоснование. Математика всегда строится практически, а ее обоснования всегда осуществляются значительно позже. Поэтому знаменитая строгость математики весьма относительна. «Строгого определения строгости не существует. Доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент»¹⁾.

Поэтому дискуссии о характере доказательства и точности в математике продолжаются. Не случайно, Морис Клайн (известный математик и историк математики, долгие годы возглавлявший математический факультет Нью-Йоркского университета и отдел Математического института им. Куранта), исследуя проблему неопределенности математического знания и оценивая, в частности, особенности математического доказательства, приводит ряд высказываний известных математиков по этому поводу: «Строго говоря, того, что принято называть математическим доказательством, не существует. . . Любое доказательство представляет собой то, что мы с Литтлвудом называем газом, — риторические завитушки, предназначенные для психологического воздействия. . . средство для стимуляции воображения учащихся» (Годфрид Гарольд Харди). «Совершенно ясно, что мы не обладали и, по-видимому,

¹⁾Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М., 1984, с. 363.

никогда не будем обладать критерием доказательства, не зависящим ни от времени, ни от того, что требуется доказать, ни от тех, кто использует критерий. . . в математике не существует абсолютно истинного доказательства, хотя широкая публика убеждена в обратном» (Реймонд Луис Уйдлер). «По моему убеждению, окончательный вид, принимаемый философской мыслью, не может опираться на точные утверждения, составляющие основу специальных наук. Точность иллюзорна» (Уайтхед). Таким образом, делает вывод М. Клайн: «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия — блуждающие огоньки, химеры, "не имеющие пристанища в математическом мире". Строгого определения строгости не существует. . . То, что некогда считалось неотъемлемой особенностью математики — неоспоримый вывод из явно сформулированных аксиом, — навсегда отошло в прошлое. Неопределенность и способность впадать в ошибку присущи логике в той мере, в какой они ограничивают возможности человеческого разума»¹⁾. Математики не могут даже договориться о том, что является ее предметом и, кроме этого, «над головами математиков, подобно дамоклову мечу, висит нерешенная проблема доказательства непротиворечивости всей математики»²⁾. В конечном счете, выбор модели для обоснования той или иной математики является случайным и есть скорее продукт веры, зависит «от исповедования той или иной философии» или принятия разработанных готовых логических моделей, претендующих на роль оснований математики. Математика, в этом смысле — один из видов творчества, ссылается он на слова Вейля, которое во многом подобно «музицированию» или «литературному творчеству» и «прогнозирование его исторических судеб не поддается рационализации»³⁾.

Установка на точность и определенность в науке очень важна, но необходимо понимать, что степени ее осуществления различны в науках и тем более отличают сферы гуманитарного и естественнонаучного познания. Можно даже сказать, что высокая степень точности может привести к потере гуманитарной сущности, как это часто ныне бывает в социологии, конкретными результатами которой лишь прикрывается имитация научного исследования общества. Философия отличается от других областей знания не по принципу различения их предметов, а по тому, что она исследует то, что другие науки воспринимают в качестве осознанной или нет предпосылки, т. е. наиболее общие, предельные закономерности бытия, чем не занимается ни одна из наук. Философия не стремится к точности наподобие частных наук, и ее важнейшей особенностью выступает меньшая однозначность и гибкость используемых понятий. Упреки в том, что в отличие от науки понятия философии часто слишком многозначны, туманны и неопределенны, справедливы

¹⁾ Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М., 1984, с. 363–364.

²⁾ Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М., 1984, с. 357–358.

³⁾ Цит. по: Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М., 1984, с. 369.

и лишь отражают ее специфику. «Неточность» философии компенсируется ее возможностями наиболее широко (так как ее предметная область — это область предельных всеобщих закономерностей) охватывать бытие. Точно так же как «точность» математики не достижима не только в гуманитарных науках, но даже во многих естественных науках, где более существенное значение имеет качественная (предметная) сторона исследуемых объектов, не всегда доступная математической количественной обработке. И это также сказано не в упрек математике, а лишь констатирует факт относительности понятия математической точности с общегносеологических позиций.

Научная объективность и точность (как предельная характеристика адекватного соответствия предметной области) естественных и математических наук реализуется как своеобразное «безразличие» к исследуемому объекту. Ученый отстраняется от целостной внутренней сущности объекта, и объективность достигается за счет чрезвычайно сильного огрубления исследуемой действительности. Такой подход эффективен при исследовании недуховных образований, но слишком искажает реальное положение дел, например, при исследовании человека, культуры, общества. В таком опредмечивании исследуемых феноменов заключается сила науки и залог практической реализуемости ее результатов (для создания инвалидной коляски понимание человека как совокупности рычагов более эффективно, чем философские рассуждения), но в этом и ее неизбежная слабость, связанная с невозможностью выйти за границы предметной области. Именно это порождает и агрессивную экспансию науки, которая направлена на решение любых проблем, когда их нерешенность или не решаемость объясняется лишь временным фактором или отсутствием материальных условий (средств, приборов и т. д.). Наука точна внутри предметной области, но абсолютно неточна и всегда неполна по отношению к исследованию сущности объекта. При исследовании некоторых объектов и феноменов человеческой культуры такой ограниченный подход просто неправилен.

Указанное отношение к объекту исследования приводит к тому, что наиболее адекватной формой конкретнаучного знания выступает монолог: «интеллект созерцает вещь и высказывается о ней. Здесь только один субъект — познающий (созерцающий) и говорящий (высказывающийся). Ему противостоит только безгласная вещь»¹⁾. Философ имеет перед собой в качестве объекта исследования человека, от качеств которого он полностью абстрагироваться не может, даже если сущность последнего реализована в каких-то отчужденных структурах (тексты, другие произведения). В этом смысле философия относится к гуманитарным наукам, и главной формой ее самовыражения выступает диалог, в котором активность обеих сторон (субъекта и объекта) очень высока, и важна не точность, достигаемая за счет сильного огрубления, а глубина проникновения в исследуемый объект.

¹⁾Бахтин М. М. К методологии литературоведения// Контекст — 1974.— М., 1975, с. 206.

«Познание здесь направлено на индивидуальное. Это область открытий, откровений, узнаваний, сообщений. Здесь важна и тайна, и ложь (а не ошибка)»¹⁾. И это не недоразвитость гуманитарной сущности философского познания, как склонны считать сциентистски настроенные мыслители, а его важнейшая особенность.

Познание в гуманитарной науке выступает как постижение или понимание смыслов, заложенных в исследуемом явлении. Достигается это на особом идеальном уровне, который реализуется через диалог текстов. Текст есть особое смысловое единство или смысловая целостность. Понять текст и через него целостный смысл явления — это не то же самое, что и познать его. Познать, в узком смысле, означает наложить на исследуемый объект некую познавательную форму или структуру, заведомо избавившись от его целостного смысла. Философ имеет перед собой не бытие как таковое, не совокупность каких-то явлений или феноменов, а их смысл, зафиксированный в текстах. Посредством текста бытие говорит с нами. Целостность текста, т. е. появление в нем смысла, который отсутствует в той совокупности знаков, из которой он состоит, возникновение нового как бы из ничего, является важнейшей особенностью, с которой неизбежно имеет дело представитель гуманитарного познания. Как отмечал Бахтин: «Всякая система знаков (т. е. всякий язык)... принципиально всегда может быть расшифрована, т. е. переведена на другие знаковые системы (другие языки)... Но текст (в отличие от языка как системы средств) никогда не может быть переведен до конца, ибо нет потенциального единого текста текстов. Событие жизни текста, т. е. его подлинная сущность, всегда развивается на рубеже двух сознаний, двух субъектов»²⁾. Поэтому познание текста осуществляется в диалоговой форме. Это как бы общее коммуникационное поле двух сознаний, а в более широком смысле — двух культур. В таком диалоге глубинное значение текста (не формально-логическое) определяется всем социокультурным контекстом, который исследователь-гуманитарий также должен учитывать.

§ 3. Конференции «Философия математики: актуальные проблемы»

Следует отметить, что в последние годы наблюдается процесс большего взаимопонимания между философами и математиками, выражением чего можно считать уже ставшую традиционной конференцию «Философия математики: актуальные проблемы», которая проводится в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова (2007, 2009 гг.). Обе конференции прошли с большим успехом, в них принимали участие математики, философы, психологи, физики, педагоги. В ходе конференций

¹⁾Бахтин М. М. Указ. соч. с. 204–205.

²⁾Бахтин М. М. Эстетика словесного творчества.— М., 1986, с. 300–301.

были выявлены новые точки пересечения математики с философией и метафизикой. Отметим некоторые узловые пункты таких точек соприкосновения.

В 2007 г. предметом обсуждения стала тема онтологии математических объектов и проблемы математического платонизма и априоризма, что мы уже показали на примере Платона и Аристотеля. Например, в докладе «Априоризм в метафизике и математике» В. А. Яковлев (Москва) выступил как сторонник априоризма, понимаемого в терминах онтологизма платоновского типа: наше научное творчество подчинено объективно заданной системе образцов — «исходной матрице». Развитие математики и математической физики не привело к отказу от этой позиции, многие крупнейшие ученые нового времени были «платонистами»: Г. Галилей, Л. Кронекер, Г. Кантор, Г. Герц, К. Гёдель, П. Эрдёш. Сферу априорного следует понимать, отмечал докладчик — «как некую беспредпосылочную, вневременную, идеальную реальность, раскрытие структуры которой и составляет цель метафизики и науки». Возражения социокультурного релятивизма против платонизма представляются не убедительными, поскольку они не могут обойтись без претензии на объективную значимость собственных принципов. Милан Тасич (Сербия) говорил о пересмотре кантовского априоризма в свете неоднозначности отношений между идеальным и эмпирическим (со ссылкой на результаты Гёделя) и необходимости учитывать конвенциональные моменты (Пуанкаре), соображения о плодотворности и эвристический характер отношений математики к чувственной реальности и другим наукам. С. Н. Жаров (Воронеж) указал, что математическая теория не исключает онтологической трансценденции, как показала теорема Гёделя о неполноте. Трансцендентное обнаруживает себя в математике, как «нетематизированный горизонт первичных онтологических интуиций» (примеры его концептуализации — «жизненный мир» Гуссерля и «бытие» Хайдеггера), в котором кроется и тайна применимости математики в естествознании. Математические (как и естественнонаучные) теории имеют два уровня — предметная структура и непредметный горизонт. Последний «открыт моей экзистенции до всякой рефлексии», это «изначальный онтологический опыт». В основе творческой интуиции в математике лежит выход к изначальным «непредметным онтологическим глубинам, из которых рождаются новые математические формы». Таким образом, изначальная онтологичность математики связана, согласно С. Н. Жарову, не с платоновскими идеями-формами, а с более глубоким уровнем (до формы, до предмета). Д. Н. Радул (Москва) рассуждал о философском подтексте физико-математического знания. Главную проблему современной науки он видит в том, что новое время предпочло «линии Платона», на которую ориентировалась греческая математика («Начала» Евклида), «линию Демокрита». Наиболее полно эта вторая линия выразилась в физике Галилея—Ньютона и аппарате математического анализа, которые привели к кризису, как в физике, так и в основаниях математики на рубеже XIX и XX вв., а те, в свою очередь, — к общему кризису западно-европейской

культуры в XX в. В отличие от «платонизма» В. А. Яковлева и Д. Н. Радула, в докладе «Проблема математизации языка науки» В. А. Иванова (Барнаул) подошла к проблеме априорности математики с логико-семиотической точки зрения, в основе которой — понятие коммуникативной рациональности. Понятийное мышление интериоризировано из социального дискурса, предполагает коммуникацию в рамках социума. Язык математики имеет социальные основания: «Математические объекты не являются ни субстантивными вещами, ни самостоятельными идеями, они суть символы действий — операций математического дискурса» (со ссылкой на Р. Коллинза).

Проблема математики как языка и/или онтологии — одна из важнейших тем в философии математики. По-видимому, идея о том, что математика есть язык, берет начало в известном высказывании Галилея «Книга природы написана на языке математики». И тогда на естественно возникающий вопрос «Языком чего является математика?» — ответ будет один: она — язык природы; точнее говоря, язык науки о природе. Идея Канта о том, что математика базируется на априорных формах чувства и мышления, в принципе, приводит к тому же результату. Мир природы — это мир возможного опыта; условиями возможного опыта являются априорные структуры; все, что относится к этим структурам, обладает качествами «всеобщности и необходимости». Отсюда естественно вытекает и известное высказывание Канта: в каждой науке столько науки, сколько в ней математики. Ибо только математика выражает всеобщее и необходимое, просто потому, что она выражает законы восприятия и законы мысли самого субъекта. У Канта также получается, что математика — это язык физики, точнее говоря, язык ее законов. Принципиальное отличие семантики математического языка от семантики естественного состоит в том, что в математике нет индивидов. Математические объекты всегда обозначают множества. С другой стороны, эти же объекты всегда единичны. Мы говорим «вот этот треугольник», но за одним треугольником всегда можно мыслить бесконечное множество треугольников — таких же точно, или несколько отличающихся, или любых. Но даже и точно таких треугольников бесконечное множество — мы всегда можем нарисовать рядом еще один, и он будет подчиняться тем же правилам, о которых идет речь в данной ситуации. С другой стороны, с точки зрения математики число этих треугольников совершенно неважно — треугольник, о котором в нашей ситуации идет речь, всегда один. В математике нет экземпляров. Эта особенность перехода единичного в множественное и обратно определяет важнейшую черту семантики математики. Вообще говоря, мы можем выбирать, как мыслить математические объекты. Можем стоять на позиции реализма (платонизма) и как можно больше множеств стягивать к их ярлыкам. Тогда единичным объектом окажется не только тройка, но и множество натуральных чисел, и множество вообще чисел, и любое число, и переменная, и x , и $f(x)$, и множество как таковое, и множество всех множеств. Если мы допускаем мыслить тройку как имя, в то время как ее можно мыслить как множество — то и все осталь-

ное, что можно мыслить как множество, мы должны разрешить мыслить и как имя. Однако наиболее важное отличие математики от языка лежит не в области семантики, а в области синтаксиса. Математика предоставляет в распоряжение физики язык, который является содержательно открытым, он не навязывает своей логики. На другом физика и не могла бы говорить, так как там, где работает логика языка, внешняя логика познаваемого уже не отражается. Любой физический закон мог бы выглядеть иначе: язык не накладывает ограничений. Иначе мы не смогли бы сказать на нем ни одного эмпирического факта, все факты были бы только логическими, следующими из его законов. Содержательная открытость языка открывает возможность сказать на нем и нечто совсем не следующее из эмпирических наблюдений. Этой проблеме был посвящен доклад Е. В. Косиловой (Москва).

Следует отметить большой интерес, который проявляет научное сообщество к таким вопросам, как неклассические и постнеклассические (в терминологии академика РАН В. С. Степина) подходы к философии математики. Среди последних — конструктивизм, в виде социального конструктивизма, радикального конструктивизма, конструктивного эмпиризма и других направлений. Также получают распространение такие сравнительно новые подходы, как культурный и социальный анализ математического знания (появилось новое направление: изучение народной математики и этноматематики), даже есть попытки гендерного анализа математики, правда их пока нельзя назвать удачными. Активно развивается социология математики как область обширного направления — социологии научного знания. На Западе это направление представлено работами таких авторов, как Рэндал Коллинз и Сол Рестиво, у нас же его развивает, в частности, новосибирская школа Н. С. Розова, а также такие известные исследователи, как З. А. Сокулер (Москва) и В. А. Бажанов (Ульяновск).

На конференции был продемонстрирован интерес к философии практических, прикладных аспектов математического знания, причем не только в связи с практическими приложениями математики, но и как к источникам математического знания. З. А. Сокулер, известная, в частности, своими работами по философии Людвиг Витгенштейна, вслед за этим мыслителем предлагает обратить внимание на инженерный, конструктивистский аспект происхождения математики как науки и, прежде всего, как деятельности ученых. Этому было посвящено ее выступление на первой конференции. Вообще, следует заметить, что современная философия науки достаточно явственно разделяется на «левую» и «правую», или, по-другому говоря, на экстремистскую и консервативную. Эта система координат, которая на первый взгляд может показаться заимствованной из политики, перестала удивлять уже со времен методологического анархизма Фейерабенда. Первоначально, полемика между ними происходила вокруг вопроса, можно ли говорить, хотя бы каким-то образом, о прогрессе знания, или сменяющие друг друга парадигмы принципиально несоизмеримы. К консер-

вативному крылу относится школа Поппера, к экстремистскому — школа, ведущая начало от Куна (несмотря на то, что ее основатель отличался гораздо большей личной сдержанностью, нежели многие его оппоненты, его подход оказался значительно более революционным). В те времена для экстремистов было характерно то, что они уделяли большее внимание историческому, эмпирическому исследованию науки, а не логико-нормативным рассуждениям, как это было характерно для консерваторов. Но, разумеется, их эмпирический подход был предельно заряжен теоретической идеологией, как это, впрочем, следовало и из самого их учения. Они искали и находили в истории науки несоизмеримые парадигмы. А кто ищет, тот всегда найдет. Логичным продолжением куновской линии в философии науки стало появление социологии науки — школы, которая с не меньшим основанием может называть себя философской, нежели социологической, так как разработка идеологии составляет преобладающую долю в ее исследованиях. В качестве программного идеологического текста социологии науки можно рассматривать, в частности, «Сильную программу» Дэвида Блур. Из этого текста напрямую следует, что вненаучные факторы, прежде всего социальные (но также экономические, политические, культурные и другие) играют определяющую роль в развитии научного знания. Если совсем грубо, то за какую теорему математику заплатили, такую он и докажет; более того, если заплатили больше за «р», докажет, что «р», а если заплатят больше за «не-р», докажет, что «не-р». Этого абсурдного утверждения Блур, конечно, не делает, но оно довольно легко следует из доведенного до логического конца его способа рассуждения. То есть наука приравняется к чему-то типа софистики. В этом и есть существо левого крыла философии науки¹⁾.

С некоторым приближением можно сказать, что правое крыло не ставит под сомнение некую специфическую научную «истину», и в этом смысле оно рационалистично, а левое крыло редуцирует научную «истину» к истинам вненаучного характера. Метод каузальной редукции является сердцевинной экстремистского подхода. Редукции может подвергаться фактуальное содержание науки (почему были получены такие-то факты), ее метод (почему выбран такой метод, а не другой) или, например, ее понятийная составляющая (каким образом сложилась такая-то система понятий). Современная левая философия науки представлена не только социологией. Каузальная редукция понятийного аппарата науки восходит к прагматической философии языка, работам Витгенштейна и Куайна, и часто сейчас она развивается без отнесения к какому-либо конкретному научному языку, простым рассуждением. Однако превалирующей базой редукции является социум, в связи с чем превалирующим направлением левой философии науки является социальный конструктивизм (его центральное утверждение —

¹⁾ Косилова Е. В. Философия математики: актуальные проблемы (Обзор конференции) // Эпистемология и философия науки, 2009, № 4, с. 171-175.

научный факт есть социальный конструкт). Полемика между сторонниками социального конструктивизма и сторонниками объективизма в науке в середине 90-х годов получила название «научных войн». Математика — наука, которая традиционно представляет собой наиболее крепкий орешек для каузального редукционизма (Блур в упомянутой работе пишет, что логика и математика представляют собой «самое трудное препятствие на пути социологии знания»). Не приходится удивляться, что в философии математики достаточную силу имеет правая партия, в арсенале которой классические традиции философии математики, начиная от платонизма и даже пифагореизма и заканчивая трансцендентализмом Канта и Гуссерля.

Об этом, в частности, говорил В. А. Шапошников (Москва) на первой конференции. Он предложил рассматривать философию математики через призму трех философских парадигм — онтологической, гносеологической и антропологической. Первая из них делает основной акцент на вопросах онтологического статуса в рамках единой «вертикальной» иерархии, вторая — все рассматривает в рамках системы «горизонтальных» связей в поле сознания, третья — исходит из темы уникальности человеческой личности и «горизонтальную» систему координаций укореняет в истории и географии культуры. В рамках каждой из парадигм философия математики приобретает свою специфику: для первой парадигмы математика — это особый вид существующего, для второй — система утверждений и теорий, для третьей — математическое сообщество. Если онтологическая парадигма господствовала от античности до начала нового времени, то в новое время сначала выдвигается гносеологическая парадигма (начиная с Декарта), затем с ней начинает конкурировать антропологическая (XIX в.). К 60-м годам XX в. антропологическая парадигма начинает доминировать, что, впрочем, не приводит к полному исчезновению гносеологической. На фоне доминирования третьей парадигмы возникает тенденция к социокультурному релятивизму, а в качестве реакции — попытки отстоять, в условиях принятия антропологической парадигмы, ценности, характерные для парадигмы гносеологической — единство математики, рациональность наших выборов, реализм. Основная полемика в наше время идет не между сторонниками фундаментализма (т. е. второй парадигмы) и социокультурного подхода (т. е. третьей парадигмы), а между различными версиями восстановления реализма, рационализма и трансцендентализма в новых условиях, т. е. в условиях принятия антропологической парадигмы. Затем докладчик сделал попытку проиллюстрировать последний тезис на двух более узких темах — современных спорах о проблеме универсалий и априоризме в связи с философией математики.

На второй конференции (2009) в секции «Основные проблемы и направления в философии математики» сразу два докладчика посвятили свои выступления неклассической философии математики: Г. Б. Гутнер (Москва) с докладом «Два опыта трансцендентальной философии матема-

тики» и З. А. Сокулер (Москва) с размышлениям о том «Является ли теорема Пифагора социальным конструктом?». Г. Б. Гутнер, сравнивая Гуссерля и Витгенштейна, пришел к выводу, что утверждение позднего Витгенштейна о том, что математика есть вид языковой игры — это вид трансцендентализма. Если трансцендентализм определить как учение о «неустранимых условиях возможности познания», в данном случае — математического, то в теории Витгенштейна такими условиями являются именно языковые игры, практики. Математика — это языковая практика. Математических объектов самих по себе не существует, а существуют способы говорения о них. Эти способы традируются, поддерживаются. В них «встроены» их правила. Свойство человека — следовать правилу. Причем люди всегда знают, когда другие люди будут следовать тому же правилу, а когда нет. Если какому-то правилу следуют все люди, оно считается незыблемым законом. В этом суть общезначимости математических объектов: правила говорения о них таковы, что им должны следовать все. Понятно — это прозвучало уже у З. А. Сокулер — что математического объекта, о котором никто не говорит, существовать не может. Платонизм себя полностью скомпрометировал, например, тем, что существуют разные геометрии, с разным пятым постулатом, в то время как с точки зрения платонизма должен быть один истинный пятый постулат. Понятно также, что не бывает открытий, а бывают новые правила говорения. Если идти еще дальше, то, согласно Витгенштейну, не бывает разных доказательств одной и той же теоремы. Если доказательства разные, то и теоремы разные (разные языковые практики). Сокулер процитировала такую фразу Витгенштейна: «Не бывает математического факта в отрыве от того, как он получен». Один из самых интригующих вопросов — какова природа связи между областями математики (например, геометрическая и теоретико-множественная топология, и даже еще проще — алгебра и геометрия) и какова природа объектов, которые могут быть получены разными способами — здесь объявляется запрещенным, потому что постулируется, что это объекты разные. Каким образом можно понять в таком случае, что еще стоит за математикой, помимо социального конструирования?

В своем докладе «Приложение математики как философская проблема» В. А. Шапошников показал, что «непостижимая эффективность математики», ее способность давать приложения в самых разных областях становится проблемой только сейчас, в эпоху социально-конструктивистской философии математики, которая была отнесена докладчиком к антропологической парадигме. Ранее, в эпоху онтологической и гносеологической парадигм эффективность математики не становилась предметом специального исследования, так как единство мироздания либо единство человеческих познавательных способностей считались несомненным. Но как может быть «непостижимо эффективной» языковая практика, как может социальный конструкт находить приложения за пределами области, где он был скон-

струирован? Сейчас, для «левой» философии математики, это становится проблемой.

Однако, вследствие особого статуса математики как абсолютно доказательной науки, утверждения которой являются общезначимыми, в области философии математики неклассические и постнеклассические парадигмы сосуществуют с классическими, прежде всего, с платонизмом и априоризмом в разных их формах. Интересным был доклад профессора В. Я. Перминова (Москва) «Системный подход к обоснованию математики», в котором автор обосновывал свою позицию: любая достаточно развитая математическая теория является абсолютно непротиворечивой. Естественным следствием является то, что определения математических объектов также непротиворечивы, ведь при противоречивых определениях невозможно построить непротиворечивую аксиоматику, а, согласно Перминову, всякое противоречие аксиоматики элиминируется за конечное, при том обозримое число шагов, и это похоже на правду, так как «содержательность определения» вряд ли является необозримой величиной. Таким образом, позиция Перминова — реализм. Конечно, из непротиворечивости определения прямо не следует независимого существования соответствующего объекта, но оно делается весьма вероятным. А из социально-конструктивистского подхода, напротив, с большой долей вероятности следует, что вряд ли определения (=социальные конструкторы) окажутся совершенно непротиворечивы, так что непротиворечивость определений, во всяком случае, можно рассматривать как веский аргумент против социального конструктивизма в математике.

На обеих конференциях большое внимание было уделено темам «история математики» и «математика в культуре». У историков традиционно серьезное внимание уделяется античной математике. Отрадно, что многие авторы сосредотачиваются на исследовании истории отечественной математической традиции. В. Г. Горохов (Москва) в 2007 г. говорил о трудности нахождения общего междисциплинарного языка. Далеко не каждый математик способен найти общий язык с гуманитариями. Однако есть и удачные примеры. В качестве такого примера, который может послужить программным для обсуждения темы «математика в культуре», он указал на Ляпунова и его статью «О роли математики в современной человеческой культуре» (1968).

В. А. Шапошников обратил внимание на то, что наряду с классическими образцами математизации (в механике и физике), а также более спорным применением математических методов в таких областях как биология и социология, математика бытийствует, порой весьма причудливым образом, и в гуманитарных областях, математизировать которые в каком-либо привычном виде совершенно невозможно. Например, математическая образность в поэзии и литературе вообще. Можно говорить о геометризации в отношении живописи, скульптуры и архитектуры. Математические идеи и образы бытийствуют также в философской и религиозной сферах, задавая подчас образцы для мысли. Иногда это не образцы, а только намеки или

иллюстрации. Однако бесспорно, что математика некоторым образом проникает в самые разные области культуры. В связи с этим возникает вопрос и об обратной связи: то неожиданное видение, которое открывается в этих маргинальных (с точки зрения классических приложений математики!) областях, оказывает определенное обратное влияние на саму математику. Более того, эти периферические (с точки зрения традиционного понимания математики) области приложений очень плохо изучены. Есть отдельные работы, но единой картины нет. Здесь порой теряется грань между тем, что еще можно назвать математикой, и тем, что назвать так уже явно нельзя. В ряде докладов на секции речь шла как раз о таких вещах, которые лежат где-то на границе математики. Однако именно на границах области порой происходят наиболее интересные культурные процессы, которые позволяют лучше понять, что же она такое, в нашем случае — что такое математика.

Е. А. Зайцев (Москва) рассказал «О понятии актуальной бесконечности (от Августина до Николая Кузанского)». Особенность античного подхода к бесконечности состоит в противопоставлении бесконечности и формы, а отсюда — скепсис в отношении познания бесконечности. Так — как в греческой философии, так и в греческой математике. Для современной же мысли, бесконечное — законный, если не приоритетный объект, и в философии, и в математике. Каковы этапы превращения античного понимания бесконечности в современное? Ключевой переходный момент, полагает Зайцев, связан с латинским богословием, у истоков которого стоит Августин. В противоречии, как с неоплатонической, так и с восточно-христианской богословской традицией, он приходит к мысли, что бесконечное может обладать некоторой формой. Это становится возможным, поскольку у Августина в понятии Бога смешиваются и объединяются два уровня неоплатонической иерархии — Единое и Ум.

О. М. Седых (Москва) говорила о взаимоотношениях математики и литературы на примере геометрической интерпретации сюжетов литературы хождений. Для литературы хождений, от мифов и сказок через агиографическую и визионерскую литературу средних веков до современного романа, характерна единая структура: переход из своего пространства в чужое (сопряженный со смертью или неким ее аналогом), пребывание в чужом пространстве и возвращение. В начале XX в. возникло стремление прочесть такие тексты не аллегорически, а буквально, и задать вопрос о характеристиках того геометрического пространства, в котором живут и действуют герои этих произведений. При таком подходе легко обнаруживается, что по ряду существенных характеристик это пространство отличается от евклидова. Специально в докладе были проанализированы работы П. А. Флоренского «Мнимости в геометрии» (1922) и В. Г. Богораза «Эйнштейн и религия» (1923), применяющие этот подход к «Божественной комедии» Данте и чукотско-эскимосскому материалу соответственно.

Традиционно одна из важнейших областей философии математики — проблема обоснования математики и взаимосвязей между математикой и логикой. На обеих конференциях этому уделялось очень много внимания.

Доклады по этой тематике можно условно разделить на три группы. Первая группа была посвящена проблемам взаимоотношений между математикой и логикой.

В докладе В. Л. Васюкова был рассмотрен вопрос о существовании общих методов, позволяющих перейти от математической структуры к логической, лежащей в основании той или иной научной (математической) теории. Несмотря на огромный накопленный фактический и теоретический материал, в целом вопрос о реконструкции синтаксических формулировок на основе имеющейся логической семантики все еще остается открытым. Методы алгебраической логики, разработанные с целью установления связей между классами моделей и логиками, по-видимому, способны послужить здесь отправным пунктом исследования, если руководствоваться обратной направленностью, когда классы моделей детерминируют свойства предполагаемых логических систем. Обычный вопрос алгебраической логики «что представляет собой алгебра некоторой логики?» в данном случае следует заменить вопросом «что представляет собой логика некоторой алгебры?».

Т. А. Шиян рассмотрел логические ограничения на использование формальной методологии (в частности, на ее использование в качестве тотального средства теоретического обоснования математики) и фактические ограничения, обусловленные особенностями исторически сложившегося логико-математического дискурса. По его мнению, результаты исследований, в которых использовался интерконтекстуальный (между формальными контекстами) перенос результатов, должны иметь другой теоретико-познавательный статус (с точки зрения формальной идеологии — более низкий), чем чисто-формальное исследование. При интерконтекстуальном сравнении формализмов приходится учитывать: (1) внешний вид графем, (2) их формальные определения, (3) неформально придаваемый смысл, (4) существующую в научной культуре традицию отождествления/различения символов, (5) специальные, противоречивые случаи, создаваемые случайным фактором наличия публикаций с нетрадиционной формализацией.

С. А. Павлов обратил внимание на то, что Г. Фреге, предлагая рассматривать предложения как имена, использовал их значения только в качестве значений истинности. Объемные отношения и операции над именами он не рассматривал. В связи с этим, представляет интерес рассмотреть одновременно как логические, так и экстенциональные отношения между предложениями. Так как Фреге не рассматривал операции над единичными именами, то имеет смысл сопоставить предложениям равнообъемные им понятия или множества с операциями над ними и рассмотреть последние.

По мнению А. В. Титова, использование математических методов в логике позволяет рассматривать подход к классификации вариантов про-

позициональной логики, основанный на классификации математических структур, элементами которых оценивается истинность высказываний. Если выделен класс структур, элементы которых могут выполнять роль значений истинности пропозициональных формул, то исчисление высказываний и соответствующая ему алгебраическая структура из указанного класса могут рассматриваться как элементарно эквивалентные модели одной и той же теории. Это обстоятельство может служить основой для построения соответствующего исчисления высказываний.

В докладе Б. А. Кулика в качестве альтернативы формальному подходу в логике предлагается использовать подход на основе общей теории отношений. Выбор «отношения» в качестве базового понятия логики не случаен. Отношение является не менее универсальным понятием, чем предикат, и, по сути, изоморфно предикату. В рамках общей теории отношений автором были разработаны две математические системы, предназначенные для логического моделирования и анализа разнообразных информационных систем.

Вторая группа докладов была посвящена общим философским вопросам взаимоотношения «идеальной» и «машинной» математики. По мнению В. В. Аристова и А. В. Строганова при формализации алгоритмизированных действий компьютера можно увидеть возникающие объекты разных областей математики, в частности, фрактальные образы. Конкретные рассуждения решения нелинейных уравнений на основе предложенного авторами метода, как представляется, позволяет сделать шаг к принципиальной проблеме преодоления разрыва между идеальными образами аналитической математики (где операции совершаются в «уме») и способами численной математики, где для операций над числами требуется компьютер.

Наконец, третья группа докладов была посвящена философским проблемам, возникающим в теории множеств. В докладе В. Х. Хаханяна говорилось об определении класса нефункциональных алгебраических моделей арифметики Гейтинга и была приведена формулировка открытой проблемы существования критерия представимости данной модели арифметики в виде функциональной алгебраической модели. Им была описана аналогичная конструкция для теории множеств типа Цермело—Френкеля и приведена теорема о выполнимости в функциональных алгебраических моделях всех основных теоретико-множественных постулатов. А. В. Коганов рассказал об исследованиях методов достижения однозначности в математических теориях и некоторых источниках противоречий, связанных с понятием бесконечных множеств. Причина противоречий связана с существованием алгоритма, вычисляющего гёделев номер формулы или строящего формулу по ее номеру. Автор доказал, что расширение формул языка первого уровня отношениями на значениях рекурсивных функций несовместимо даже со счетными множествами в аксиоматике Цермело—Френкеля. Конструктивная математика, объектами которой являются тексты и их преобразования, до-

полнительна к теории Цермело—Френкеля, где значения переменных интерпретируются как множества, а все текстовые объекты (например, формулы) относятся к метатеории. Большой резонанс вызвало темпераментное выступление профессора Н. Н. Непейводы (Ижевск) «Манифест конструктивизма», в центре которого оказалась проблема брауэровского интуиционизма и его конструктивистских продолжений.

Особое место на конференциях занимала проблема математического образования. Вопросы математического образования относятся к числу наиболее актуальных сегодня вопросов для всего нашего общества, которое переживает явный кризис среднего, а отчасти даже и высшего образования. В нашей стране была традиционно высокая планка качества преподавания математики, как в средней школе, так и в вузе. Однако система образования пережила ряд реформ, не все из которых оправдали себя, а также пострадала от экономических проблем, стоящих перед всей страной, но особо угнетающих неприоритетные сферы, к которым, как оказалось, относится и сфера математического образования. Результат — массовая неграмотность выпускников даже в области задач средней трудности, которые относительно легко решались предыдущими поколениями школьников. Кроме того, даже способные ученики теряют интерес к математике. Отчасти это вызвано не только проблемами преподавания, но и объективным существованием в нашем обществе других запросов: не на строгое и доказательное мышление, которое воспитывается математикой, а на умение организовать и убедить людей, в том числе с использованием риторических, не всегда честных приемов, чему математика отнюдь не учит. Критическое отношение к такого рода риторическим приемам, которое могло бы появиться на основе глубокого усвоения духа математики и логики, к сожалению, оказывается не востребовано в нашем обществе. Обо всем этом говорилось на секции, посвященной проблемам математического образования.

Не способствовали ли изменению общей ориентации философии математики в сторону «левых» идей формализация и кризис математического образования? На первый взгляд нет, но думается, что это вещи взаимосвязанные. Этому был посвящен доклад профессора А. Н. Кричевца (Москва) «Три составляющие деградации математического образования» на пленарном заседании. Основная мысль этого доклада — причина кризиса математического образования в том, что среда, в которой воспитывается современный ребенок, не дает ему опыта, на который могли бы накладываться математические схемы. Из обыденной жизни исчезли механизмы и другие структуры с понятными причинными связями. Современный ребенок воспитывается в магическом мире, где чрезвычайно богатые следствия вызываются простым нажатием кнопки. Наша культура не требует ни логичности, ни доказательности, ни критичности — всего того, что воспитывается математикой. Наоборот, на повестке дня умение много говорить, манипулировать и поддаваться на манипуляции. Конечно, гуманитарные науки востребованы

больше, чем математика, а еще больше востребованы и вообще не науки, а умения. Недаром болонская система оценивает качество образования по полученным компетенциям, а не по глубине понимания и едва ли вообще дает средство оценки понимания. Обо всем этом много говорилось на второй конференции на секции «Проблемы математического образования в начале XXI в.» под председательством профессора Н. Х. Розова (Москва) и профессора А. Н. Кричевца (Москва).

Таким образом, подводя итоги, мы можем еще раз отметить, что философия и математика, может быть, как никакие другие науки имеют реальные точки соприкосновения, отличаясь от наук как гуманитарных, так и естественных и, одновременно, прилагаемые к ним, либо в качестве прикладных математических методов, либо в качестве системы философского обоснования оснований науки, выявление в развитии наук тенденций, которые могут как способствовать, так и угрожать системе общечеловеческих ценностей. В этом смысле философия, наряду с другими, выполняет своеобразную функцию «предупреждающего» знания.



Фоменко А. Т.
Вероятностные случайные процессы

Метафизика и способы обоснования исчисления вероятностей. (Разрозненные заметки)

А. П. Огурцов¹⁾

«Истинной логикой для мира
является исчисление вероятностей».

Максвелл

Успехи исчисления вероятностей в наши дни всем очевидны. Они нашли свое выражение в различного рода приложениях, методах и теориях. Назову лишь некоторые из них. Статистика и ее методы в демографии, социологии и экономике, статистическая физика, теория ошибок, теория измерений, математическая биология, применяемая ныне в таких областях, как генетика, экология, популяционистская теория эволюции и т. д. Можно сказать, что не существует в современном научном знании дисциплины, которая не обращалась бы к методам теории вероятностей. И при всех успехах исчисления вероятностей существо идеи вероятности остается не проясненной. Столь же не проясненной остаются основания исчисления вероятностей, хотя оно после аксиоматизации А. Н. Колмогоровым в 30-х гг. прошлого века обрело статус математической теории вероятностей. М. Смолуховский в свое время заметил: «Несмотря на это громадное расширение ее поля приложений строгий анализ понятий, принятых за основу теории вероятностей добился лишь незначительных успехов. И сегодня еще вполне действительно положение, что ни одна другая математическая дисциплина не построена на столь неясных и шатких основаниях. Различные авторы отвечают на главные вопросы о субъективности или объективности понятия вероятности, об определении случайности и т. д. диаметрально противоположно»²⁾. И действительно в этот период существовали различные и даже альтернативные трактовки вероятности — от субъективных концепций, где вероятность трактуется как степень нашего незнания (причин явления или процесса, его структуры и пр.) до ее понимания как характеристики массовых случайных событий или явлений. Смолуховский отдает предпочтение объективной трактовке вероятности: «Поскольку дело касается применения

¹⁾Александр Павлович Огурцов (1936 г. р.) — доктор философских наук, профессор Института философии РАН.

²⁾*Smoluchowski M. Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeit in der Physik // Naturwissenschaften. B., 1918. Bd. 6, № 5. S. 253–263. русский перевод: Смолуховский М. О понятии случайности и о происхождении законов вероятностей в физике // Успехи физических наук, 1927, № 5, с. 329–349.*

в теоретической физике, все теории вероятностей, которые рассматривают случайность как неосознанную частную причину, должны быть заранее признаны неудовлетворительными. Физическая вероятность события может зависеть только от условий, влияющих на его появление, но не от степени нашего знания»¹⁾.

И для физики XX в. характерно разное отношение к идее вероятности. Многие выдающиеся физики, основатели квантовой теории при всем их тяготении к объективистской трактовке вероятности и статистических методов все же вынуждены говорить о физической неопределенности, связанной с введением законов вероятности, о предположениях, лежащих в основании идеи вероятности (идее равновероятности, средних значениях и т. д.). И в философии науки XX в. также представлены альтернативные концепции вероятности — от объективной, частотной теории до субъективной интерпретации, выражаемой в понятиях «степени рациональной уверенности», «мере ожидания» и др.

Цель данных разрозненных заметок заключается не в том, чтобы каким-либо образом преуменьшить значение вероятностных методов в современной науке (без них наука невозможна и они доказали свою эффективность и мощь), а в том, чтобы уяснить многообразные формы обоснования идеи вероятности в научном знании. Идея вероятности по-разному обосновывается в метафизике, которая направлена на уяснение и на осмысление тех принципов, которые лежат в основании физики. Эти физические принципы могут трактоваться онтологически. Тогда-то и возникает вероятностная картина мира, статистическое мировоззрение (если вспомнить термин Е. Романовского²⁾), трактовка квантовой механики как теории бытия (М. Борн). Эти физические принципы могут трактоваться как сугубо методологические, позволяющие постигать реальность, но ничего не говорящие о реальности. В этом русле находятся идея «обобщенной вероятности» П. Дирака, обращение к индуктивной логике и разработка ее оснований (идея степени веры от Ф. Рамсея и Р. Карнапа до Л. Сэвиджа). Казалось бы, возникновение аксиоматической теории вероятностей кладет конец всем спорам о статусе исчисления вероятностей и полемике между сторонниками объективной и субъективной теории вероятностей. К сожалению, этого не произошло, поскольку и в современной физике существуют различные интерпретации вероятности, а использование исчисления вероятностей в социальных науках (например, в теории предельной полезности, в эконометрике, в социальной психологии) укрепило интерес к таким его «иррациональным основаниям» как степень веры, мера ожидания и т. д. Иными словами, существовали и существуют различные способы метафизического обоснования исчисления вероятностей. Эти способы обоснования включают в себя обращение

¹⁾ Смолуховский М. Там же, с. 331.

²⁾ Романовский Е. Статистическое мировоззрение // Вестник статистики. Кн. X, № 14.— М., 1922, с. 5–22

к идеям возможности, пространства возможностей, случайности, массовых процессов, простоты вероятностных высказываний, степени веры, достоверности, правдоподобности и т. д. И задача данных заметок не в том, чтобы построить еще один вариант «вероятностной системы спекулятивной метафизики», о которой писал К. Поппер¹⁾, а в том, чтобы зафиксировать отсутствие единства в трактовке идеи вероятности и расхождения в способах обоснования исчисления вероятностей. Поэтому обратимся к тем концепциям вероятности, которые существовали в истории метафизики для того, чтобы показать разноречье в понимании вероятности.

Правдоподобность доксы и вероятностная аргументация в античной философии

В античной философии существовали три наиболее известные позиции относительно идеи вероятности и вероятностных суждений. *Первая позиция* — позиция софистов. Они отдавали приоритет не идее истины, а идее правдоподобности суждений. И все свое умение они направляли на поиск средств убеждения для принятия должного (по их мнению) эффекта или решения. Делая акцент на риторике и на риторических способах аргументации в суде и в народном собрании, софисты обратились к ораторскому искусству, благодаря которому оратор «достигнет всего, чего ни пожелает»²⁾. *Вторая позиция* — позиция Сократа и Платона. В ней делается акцент не на правдоподобном мнении, а на познании истины. Поэтому они отождествляли саму идею правдоподобности с софистической риторикой и во имя истины стремились изгнать эту идею из способов аргументации. *Третья позиция* — позиция Аристотеля. Он провел различие между аподиктическими и диалектическими силлогизмами. Если первые являются характеристиками знания, подчиняются таким критериям, как истинность, всеобщность, необходимость и доказательность, то вторые — это характеристики мнения, а не знания, будучи правдоподобными, и свидетельствуют о неполноте и специфичности их аргументов — энтимем и примеров, их сингулярности и релевантности особым топосам — общим местам бесед и речей в суде и народном собрании. Короче говоря, Аристотель принципиально размежевывает знание и мнение, логику доказательного, всеобщего, истинного и необходимого знания и логику аргументации, имеющую дело с правдоподобными и вероятностными суждениями. При такой оценке все последующее развитие философско-логической мысли было направлено на логику аподиктического знания, репрезентируемого прежде всего логикой математики — аксиоматико-дедуктивного доказательства, и в гораздо меньшей степени интересовалось логикой аргументации, представленной прежде всего в юридической логике. С этим, очевидно, связан и провал почти на

¹⁾ Поппер К. Логика научного исследования. — М., 2004, с. 183–184.

²⁾ Платон. Горгий 452d–459e// Сочинения. Т. 1. — М., 1968, с. 264–273.

два тысячелетия интереса к «Топике» Аристотеля, к ее интерпретациям и комментариям¹⁾. Логику перестала интересовать логика коммуникаций в речах, беседах, спорах. Она стала ориентироваться лишь на логику математического знания — на логику аксиоматико-дедуктивного, выводного знания. Лишь в 40-х годах прошлого века после работ Х. Перельмана и Л. Ольбрехт-Тытеки²⁾ обратили внимание на логику аргументации, развитую в «Топике» Аристотеля, и на идеи Лейбница о необходимости разработки новой — вероятностной — логики.

Вместе с тем в античной философии существовал один мотив, ставший центральным в средневековой философии. Этот мотив связан с трактовкой материи как возможности сущего, как «восприимчивости идей»³⁾. В «Тимее» Платон, развертывая свою концепцию космоса как абсолютного бытия, подчеркивает, что и он, и все люди конструируют космос, исходя из вероятностных умозаключений. Их построения лишь приблизительны, лишь правдоподобны, обладают той или иной степенью вероятности. Воспроизводя первообраз космоса, они строят подобие настоящего образа, говорить о котором можно не более как правдоподобно. «Наше исследование должно идти таким образом, чтобы добиться наибольшей степени вероятности»⁴⁾. Сам же Платон считает, что он будет придерживаться пределов вероятного, отстаивая (и относительно всего в отдельности, и относительно всего вместе) «не менее, а более правдоподобного» (48d). Это рассуждение Платона коренится в его концепции материи как лишь возможности бытия, как чего-то неопределенного, вынуждающего нас рассуждать о вещах как о чем-то только вероятном, только правдоподобном. Математическое рассуждение не является рассуждением о чем-то вероятном. Оно необходимо. Но как только мы переходим к рассуждению о физических телах и их элементах, наше рассуждение становится вероятным. И у Аристотеля «Топика» как исследование логики аргументации и ее топосов вовлекает в процедуры доказательства жизненную логику (по словам А. Ф. Лосева), неожиданные, иррациональные (с точки зрения аподиктического силлогизма), случайные обстоятельства и инстанции (судья, защитник преступника, их аргументы и пр.), что и приводит к тому, что решение суда может оказаться лишь правдоподобным и в той или иной степени вероятным. И если топос —

¹⁾ А. Ф. Лосев заметил, что «вековой исследовательский предрассудок в отношении Аристотеля заключается в том, что логику Аристотеля слишком абсолютизируют, слишком делают ее самоочевидной и неоспоримой, слишком силлогистической». С этим он связывает то, что была забыта «Топика» — «самая живая, самая жизненная, самая человеческая часть его логики, даже не просто часть, а ее завершение, ее кульминация, ее непобедимое жизненное торжество» (Лосев А. Ф. История античной эстетики. Аристотель и поздняя классика. — М., 1988, с. 100–106).

²⁾ Перельман Х., Ольбрехт-Тытека Л. Новая риторика. Теория аргументации // Язык и моделирование социальных взаимодействий. — М., 1987.

³⁾ Платон. Тимей. 49а, 51а.

⁴⁾ Там же, 44 d.

это положение, обладающее непосредственной очевидностью, то все науки основываются на такого рода очевидных положениях (на аксиомах как самоочевидных положениях, на очевидных положениях и на положениях, обладающих той или иной степенью вероятности).

Этот мотив был существенно усилен в Новой Академии Карнеадом, который развил учение о том, что абсолютное знание недоступно и что не существует абсолютного критерия истины. Он проводил различие между тремя относительными критериями истины и соответственно между тремя видами знания. Первый — *πιτανν*, большая или меньшая степень убедительности. Второй *περίστατον*, который А. Ф. Лосев предложил переводить как «нерассеянность», т. е. знание, которое не должно рассеиваться на посторонние обстоятельства. Третий — наибольшая степень вероятности, которая наряду с нерассеянностью оказывается разработанной, объединяя в себе убедительность, нерассеянность и разработанность. Существенным для Карнеада является анализ переживаний — аффекций (*πτος*) души как единства двух состояний — направленности на предмет и на субъект переживания. Этот имманентный подход к переживаниям души позволяет ему фиксировать модусы доксы и является основанием для вычленения различных видов вероятного знания — от убедительности разной степени к нерассеянной вероятности и от нее к разработанной вероятности, включающей суждение, сознание и размышление. Такова теория вероятности, развитая Карнеадом, которую А. Ф. Лосев называет теорией рефлексивной вероятности¹⁾.

Скептицизм относительно абсолютного истинного знания и относительно абсолютного критерия его истинности привел к осознанию значимости идеи вероятности и к утверждению различных степеней вероятности. Можно сказать, что впервые в истории философии была разработана эвристическая концепция вероятности, примененная к анализу форм знания и выдвинувшая вместо идеи истины идею правдоподобности.

Тысячелетия спустя мотив анализа различных форм сознания и интенциональных ему объектов стал центральным в феноменологии Э. Гуссерля. Исходя из имманентного анализа сознания и содержания сознания, из интенциональности сознания, он развил учение о нозме (интенциональном ирреальном содержании актов сознания) и ноззисе (коррелятивных актах сознания), которое начинается с осмысления доксы и ее модификаций. Вводя праформу всех модальностей доксы (*Urdoxa*) или праверования (*Urglaube*) — достоверность верования, Гуссерль анализирует различные модальности верований — достоверное, возможное, находящееся под вопросом, вероятное, сомнительное и соответствующие им характеристики имманентного бытия (возможное сущее, вероятное сущее, сомнительное или находящееся под вопросом сущее). Иными словами, модальности доксы есть одновременно и модальности сущего, которое характеризуется в качестве такового в своем нозматическом корреляте.

¹⁾Лосев А. Ф. Культурно-историческое значение античного скептицизма и деятельность Секста Эмпирика // *Секст Эмпирик*. Сочинения в двух томах. Т. 1. — М., 1975, с. 32.

Гуссерль выявляет противоречивую структуру тематизации доксического переживания: «Мы, с одной стороны, живя в сознании вероятности (в допущении), можем смотреть в сторону того, *что* вероятно; с другой же стороны, мы можем смотреть на само вероятное как таковое, т. е. на нозматический объект в той его характеристике, какой наделила его нозса допущения. Однако „объект“ с его чувственным составом и с такой присущей ему характеристикой вероятности *дан* — во второй позиции взгляда — как сущий, а потому в своей сопряженности с таковым сознание есть простое верование в немодифицированном смысле»¹⁾.

Конечно, верование для Гуссерля не тождественно религиозной вере. Это скорее достоверное, убедительное мнение, убеждение, но не знание. Это мнение, различающееся по своей модальности, относится к области чистого сознания и его интенциональности, к проблематике нозтически-нозматических структур. За модальностями доксы следует анализ утверждения или отрицания, т. е. ряд нозматических модификаций, репрезентируемых утвердительными или отрицательными суждениями. Если резюмировать феноменологический анализ вероятности, то следует отметить, что если для античной философии было характерно разведение правдоподобности доксы и истинности знания, то феноменология стремится осмыслить структуры чистого сознания, включая и структуры доксы (верования, убеждения). Это означает, что вероятность включается в построение не теории научного знания, а теории сознания. Докса (верование, убеждение) образует первичную форму сознания, а ее модальности — это различные формы доксы и сущего, коррелятивной ей, — от достоверного до сомнительного и вероятного. В «Логических исследованиях» Гуссерль развернул иное обоснование идеи вероятности с помощью понятия степени возможного, но об этом чуть позже.

Если научное знание двигалось в направлении осознания методологической значимости идеи вероятности, включения вероятности в состав научного знания, построения целого ряда теорий (квантовой механики, теории эволюции и др.) на базе идеи вероятности и более того — создания аксиоматической теории вероятностей, то феноменология Гуссерля, сделав объектом своего анализа феномены сознания и коррелятивные ему идеальные объекты, расширила формы сознания, не ограничив его лишь сциентистскими формами сознания и включив в них доксические феномены и их модальности. Иными словами, включение идеи вероятности в состав философской рефлексии шло в двух альтернативных направлениях — включения вероятности в теорию науки, с одной стороны, и включения вероятности в анализ сознания и имманентных ему объектов. Помимо этого объединения модусов вероятности доксы и вероятности в теории науки, в философии науки разворачивались версии, правда, немногочисленные, синтеза объективной и субъективной трактовок вероятности (К. Поппер).

¹⁾ Гуссерль Э. Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. Т. I. Общее введение в чистую феноменологию. — М., 1999, с. 231.

Траектории этих альтернативно направленных движений — модальностей доксы и теории науки, объективного и субъективного истолкования вероятности — должны были сомкнуться, и они сомкнулись в философии XX в. Об этом позднее.

Случайность, неполнота знания причин и вероятность

Второй способ обоснования вероятности в метафизике и в физике — с помощью понятия случайности. Первым, кто обратил внимание на случайность, как характеристику вероятности, был Аристотель. Его позиция противоречива. С одной стороны, «природа ничего не делает случайно»¹⁾, «в том, что существует от природы, случайного не бывает»²⁾, а допущение случайности (*thyche*) приводит к невероятным выводам, а с другой стороны, он связывает случайность с причиной по совпадению³⁾. Это альтернативное понимание случайности трудно объяснить тем, что он проводит различие между случайностью и спонтанностью (самопроизвольностью). Случайность Аристотель связывает с приводящими признаками вещи и о них не может быть доказательства⁴⁾. Общее присуще вещам необходимым образом, а приводящие признаки случайны: «то, что одному и тому же может быть присуще и не присуще»⁵⁾. Поэтому «там, где больший простор для случайности, там меньший простор для ума» и для божественного провидения — богу не подобает быть злым или несправедливым судьей⁶⁾. «Ум, расчет, наука, по-видимому, вовсе отличны от случайности»⁷⁾, «случай есть нечто противное разуму»⁸⁾. Случай в отличие от самопроизвольности присущ людям и их успешной деятельности, осуществляющейся «ради чего-нибудь» (т. е. ради некоей цели)⁹⁾. О. Б. Шейнин приводит три примера из 12, выявленных Юнкерсфелд (Junckersfeld J. *The Aristotelian-thomistic Concept of Chance*. Notre Dame, Indiana. 1945) случайных событий по Аристотелю¹⁰⁾: неожиданные события, встреча двух знакомых, возникновение уродств. Эти примеры показывают, что для Аристотеля случайность объективна, а ее характеристики — приводящие свойства и обстоятельства какой-либо вещи или события.

¹⁾ Аристотель. О небе. // Соч., Т. 3. — М., 1981, с. 322 (289 а30).

²⁾ Там же, с. 320 (289 b25).

³⁾ Там же, с. 90–96, 98, 100 (196a–200a).

⁴⁾ Аристотель. Вторая Аналитика // Соч. Т. 2. — М., 1978, с. 308–309 (87 b20–25).

⁵⁾ Аристотель. Топика // Соч. Т. 2, с. 354 (102 b5–10).

⁶⁾ Аристотель. Большая этика // Соч. Т. 4. — М., 1984, с. 358 (1207 a7–25).

⁷⁾ Там же.

⁸⁾ Аристотель. Физика // Аристотель. Соч. Т. 3. — М., 1981, с. 93 (197 a20).

⁹⁾ Там же, с. 94 (197 b5–10).

¹⁰⁾ Шейнин О. Б. Статьи по истории теории вероятностей и статистики. Ч. II. Берлин, 2008, с. 7–8.

Вероятность же для Аристотеля — это характеристика мнения, альтернативного критериям знания. Вероятное (*eikos*) — это «правдоподобная посылка, ибо то, о чем известно, что оно в большинстве случаев таким-то образом происходит или не происходит, существует или не существует»¹⁾. Говоря об эпосе и трагедиях, Аристотель считает, что «следует предпочитать невозможное вероятное (*ei cota*) возможному, но мало вероятному (неубедительному — *aphithana*)»²⁾. Вероятность для Аристотеля — это характеристика субъективного мнения, субъективного выбора между возможным и невозможным, взвешивания ходатайств и аргументов, предоставляемых двумя сторонами на суде: «судить следует на основании правдоподобия»³⁾. Основным принципом оценки добродетельных поступков является поиск среднего между альтернативными поступками и добродетелями.

Теория вероятностей, родившись в XVII в. у игорного стола, была создана трудами Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, Я. и Н. Бернулли, П. Р. Монмора и А. де Муавра. Этот первый этап в истории теории вероятностей, которая обстоятельно описана в книге О. Б. Шейнина. Обращу внимание на то, что азартные игры способствовали постановке и решению вероятностных задач, формированию представлений о средних величинах, понятий равной частоты появления событий. Постепенно анализ вероятностей вышел за пределы азартных игр и, применяясь к различным сферам — от астрономии до анализа рождаемости и смертности — приобрел универсальный характер. Способом обоснования исчисления вероятностей была идея случайности. Случайность уже не противопоставляется причинному объяснению. И для Т. Гоббса, и для Б. Спинозы, и для П. Гольбаха, и для Гельвеция случайность детерминирована, но человек не может знать *все* причины случайных событий. Допускается детерминированность случайных событий и одновременно неполнота наших знаний об этой детерминированности. Неполнота знаний о случайных событиях — вывод из предположения о детерминированности случайности.

В 1713 г. выходит книга Я. Бернулли «*Ars conjectandi sive stochastice*» («Искусство предположений или угадывания»). Ее цель — нахождение вероятностей. Он определяет вероятность через степень достоверности: «Вероятность же есть степень достоверности и отличается от нее как часть от целого. Именно, если полная и безусловная достоверность... будет для примера, предположена состоящей из пяти вероятностей, как бы частей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же не благоприятствуют, то будет говориться, что это событие имеет ... $3/5$ достоверности»⁴⁾. Я. Бернулли расширил использование исчисления вероятностей за пределы азартных игр, применив его

¹⁾ Аристотель. Первая Аналитика // Соч., Т. 2.— М., 1978, с. 252 (70 a5).

²⁾ Аристотель. Риторика. Поэтика.— М., 2006, с. 176.

³⁾ Аристотель. Риторика // Античные риторика.— М., 1978, с. 66 (1376 a15–20).

⁴⁾ Бернулли Я. О законе больших чисел.— М., 1986, с. 96.

к исчислению вероятностных предположений и аргументов. Выдвинув так называемый закон больших чисел, он обосновал применимость исчисления вероятностей к статистическим исследованиям. Название «закон больших чисел» принадлежит Пуассону, который отдал предпочтение субъективной интерпретации вероятности, понятой как степень ожидания. Вместе с тем он занимался статистикой, которая сформировалась и приобрела значительный вес именно в это время. Этими исследованиями, прежде всего в статистике населения, занимались такие ученые, как Дж. Арбутнот, Дж. Граунт, А. де Муавр, И. П. Зюссмильх, Л. Эйлер, Я. Бернулли, Н. Бернулли и др. Они привели к формулировке Т. Бейесом теоретической вероятности события и позднее, с одной стороны, к субъективной интерпретации вероятности, подчиняющейся таким критериям, как уверенность, ожидание, оценки, и, с другой стороны, к объективной интерпретации вероятности, прежде всего к частотной интерпретации вероятностей. Этот разрыв между двумя способами обоснования исчисления вероятностей четко обозначился уже в XIX в., но достиг своего методологического осмысления в XX в. как альтернативное понимание случайности — либо как свидетельства и меры ожидания, либо как меры массовых случайных явлений и процессов. Альтернативность этих двух подходов еще не осознавалась в начале XIX в., когда в центре внимания было соотношение вероятности и причинности и не было проведено различия между субъективной и объективной интерпретациями вероятности.

Во всяком случае в начале XIX в. идея случайности была способом обоснования вероятности. Она была присуща и философам, и математикам. Так, П. С. Лаплас, по сути дела развертывая принцип обращенной вероятности, заметил: «Если событие может быть вызвано ввиду n различных причин, вероятности их существования после наступления события относятся друг к другу как вероятности появления события при данных причинах. Вероятности существования каждой данной причины равны вероятности события, если оно произошло ввиду этой причины, деленной на сумму всех вероятностей события при всех данных причинах»¹⁾. «Теория случаев состоит в сведении всех событий, которые могут иметь место по отношению к некоторому объекту, к определенному числу равновозможных случаев, т. е. к таким, существование которых нам представляется в равной мере неопределенным, и в определении числа случаев, благоприятных исследуемому событию, вероятность которого мы отыскиваем»²⁾. В другом месте: «Вероятность существования события является таким образом ни чем иным как отношением числа благоприятных случаев к числу всех возможных случаев...»³⁾. Случайность позволяет определить степень достоверности, удачно восполняя неуверенность и недостаток наших знаний, а вероятность

¹⁾ Цит. по кн.: Шейнин О. Б. История теории вероятностей и статистики в кратких высказываниях. Ч. II. Берлин, 2006, с. 16.

²⁾ Там же, с. 3.

³⁾ Там же, с. 6.

выражается дробью, в числителе которой — число благоприятных случаев, а в знаменателе — число возможных случаев.

Позиции Лапласа относительно научного знания четко представлены в его сочинениях «О вероятности причин движения» (1774) и «Опыт философии теории вероятностей» (1814). Он подчеркивает пробабилистский характер научного знания: «Почти все наши знания только вероятны, и в небольшом кругу предметов, где мы можем познавать с достоверностью, в самой математике, главные средства достигнуть истины — индукция и аналогия — основываются на вероятностях, таким образом, вся система человеческих знаний связана с теорией, изложенной в этом труде» (в «Опыте философии теории вероятностей»)¹⁾ В конце этой книги он заметил: «Точные причины явлений большею частью или неизвестны, или слишком сложны, чтобы можно было бы подвергнуть их исчислению, кроме того, их действие часто нарушается случайными и непостоянными причинами, но следы его всегда остаются на событиях, произведенных этими причинами, и оно видит в них изменения, которые могут быть определены длинным рядом наблюдений. Анализ вероятностей раскрывает эти изменения и определяет степень их правдоподобия»²⁾.

Лаплас показывает значимость теории вероятностей для естествознания, для увеличения мощности и надежности наблюдений, для социальных наук, в том числе для определения статуса судебных решений, для выяснения показателей смертности и средней продолжительности жизни и др. Вместе с тем Лаплас предположил возможность существования ума, который обладал бы всеобщим, необходимым и полным знанием причин и событий, знал бы все причины и все условия возникновения и существования тех или иных явлений. Этот Ум не имел бы никакого касательства к вероятности: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало перед его взором»³⁾. Человеческий ум не в состоянии достичь такого полного знания мира, знания человека всегда вероятностны, различаясь по степени вероятности и правдоподобия. В допущении божественного Ума, познающего и знающего все причины, тела и их движения, Лаплас не нуждался. Это была скорее интеллектуальная гипотеза об абсолютном наблюдателе, о вненаходимом, потустороннем субъекте, который в XX в. М. Фуко описал как «Паноптикон». Итак, для Лапласа теория вероятностей была основным концептуальным средством как естественных наук, особенно

¹⁾Лаплас П. С. Опыт философии теории вероятностей.— М., 1908, с. 7.

²⁾Там же, с. 205.

³⁾Там же, с. 9–10.

астрономических наблюдений, так и социальных наук, использующих статистический метод. Он не проводил различия между шансами и вероятностями, хотя уже до Лапласа было проведено различие между шансом и случайностью. Уже Муавр (1712) писал: «Если p — число шансов, при которых может произойти некоторое событие, а q — число шансов, при которых оно может не наступить, то и те, и другие шансы имеют „собственные“ степени вероятностей. Но если все шансы, в соответствии с которыми событие может произойти или нет, имели равные легкости, вероятность его появления будет относиться к вероятности непоявления как $p : q$ »¹⁾.

Д. Юм посвятил анализу вероятностей две главы в трактате «О человеческой природе» (1731–1737). Проводя различие между демонстративным и вероятным знанием, в последнем он выделил вероятное знание в узком смысле слова и недемонстративными доводами в каузальных аргументациях. Вероятное знание в свою очередь подразделяется на два вида: вероятность случайностей и вероятность причин. Разделение человеческих знаний Юм обосновывает с помощью различных степеней вероятности. Вероятность как вид знания — это очевидность, сопровождаемая неуверенностью²⁾. Вероятное знание представлено в двух формах — знании, основанном на случайности, и знании, происходящем из причин. Случайность, согласно Юму, не есть нечто реальное и является отрицанием причинности. Ум безразличен к тому, является ли объект, признаваемый случайным, существующим или несуществующим. «Совершенное и полное безразличие существенно для случайности»³⁾. Эта мысль, как замечает Юм, признается всеми, кто занимается исчислением случайностей. При обосновании этого вида знания Юм обращается к идее правдоподобия: «более правдоподобен и вероятен перевес той стороны, которая обладает большим числом шансов, чем той, у которой их меньше»⁴⁾. Обращаясь к игре в кости, Юм отмечает, что «случайность представляет все стороны равными и заставляет нас рассматривать их одну за другой как одинаково вероятные и возможные»⁵⁾. Анализ Юмом вероятности случайностей далек от идеи статистической закономерности, хотя ряд его доводов, например, о безразличии к существованию или несуществованию этого вида случайности перспективен для статистики. Он ограничивается анализом вероятности падения игральной кости той или иной стороной, не переходя к статистическим исследованиям его времени. Поэтому вряд ли можно согласиться с тем, что Юм понимал вероятность случайностей примерно в смысле статистической закономерности⁶⁾.

¹⁾De Moivre. De mensura sortis or the measurement of Chance // Intern. Stat. Rev. Vol. 52. 1984, p. 237.

²⁾Юм Д. Сочинения. Т. 1.— М., 1965, с. 228.

³⁾Там же, с. 229.

⁴⁾Там же, с. 230.

⁵⁾Там же, с. 232.

⁶⁾См.: Rutski J. Doktrina Hume s o prawdopodobienstwie. Uwagi w sprawie jej interpretacji. Toruń. 1948 и примечание И. С. Нарского к этим страницам (Юм Д. Сочинения. Т. 1, с. 818).

Различая знания по степени уверенности, Юм подчеркивает, что знание продвигается от низшей ступени до высшей, но все же остается предположением, или вероятностью. Первая и самая низшая ступень связана с единственным опытом, из которого делается вероятностный вывод. Вторая ступень — опыты, в которых существуют противоположные наблюдения. И, наконец, третья ступень, на которой существуют связь между всеми причинами и действиями, причем эта связь необходима. Рассматривая причинно-следственную связь как коррелятивную, Юм обращается к осмыслению влияния прошлого и будущего опыта на исчисление вероятностей. «Всякий прошлый опыт можно рассматривать как своего рода шанс, ибо мы не уверены, совпадает ли будущее событие с тем или иным из наших опытов»¹⁾. В главе «О вероятности причин» Юм вводит понятие «вера» (*belief* — точнее, уверенности, убежденности): «Так как наша вера в любое событие увеличивается или уменьшается сообразно числу шансов, или числу прошлых опытов, то ее следует рассматривать как сложное действие»²⁾. Рассуждения о вероятности причин Юм связывает с перенесением прошлого опыта на будущее. Сами эти рассуждения включают в себя веру, или уверенность. Юм анализирует особенности переноса прошлого опыта при исследовании отдельного случая, большого числа объектов (этот вариант вероятности причин он называет значительной, большой вероятностью — *large probability*) и, наконец, вероятность, проистекающая из аналогии. Все эти три формы вероятности основаны на неопределенном опыте и на аналогиях сходства, различны по степени очевидности, что объясняется влиянием аффектов и воображения. Юм отмечает, что, хотя заключения, основанные на доказательствах, и заключения, основанные на вероятности, противоположны, существуют незаметные переходы от одного типа рассуждений к другому. Это обусловлено утратой непосредственности опыта, сложной цепью связанных друг с другом аргументов и др. К нефилософским видам вероятности Юм относит следование общим правилам, которое приводит к предубеждениям.

Итак, Юм, исходя из коррелятивной трактовки причинно-следственной связи, представил различные версии вероятности — вероятность для него это определенные степени веры (уверенности), которые основаны 1) на случайности, которая, отрицая причину, представляет все стороны как одинаково возможные и вероятные, 2) на различных формах связи причин и следствий (либо постоянной и однообразной, либо прерывающейся и неопределенной), 3) на переносе прошлых опытов на будущие события, который может привести к некорректным заключениям, 4) на правдоподобию и достоверности. Можно сказать, что Юм смог описать все многообразие метафизических обоснований идеи вероятности и не отдал предпочтения ни одной из них — ни случайности, ни достоверности, ни уверенности и т. д. Между тем к этому времени уже были развернуты различные формы

¹⁾ Юм Д. Сочинения. Т. 1. — М., 1965, с. 239.

²⁾ Там же, с. 241.

обоснования исчисления вероятностей и с помощью критерия достоверности, и с помощью большого числа случайных процессов, и с помощью идеи равновозможности и др. Юм, вначале своего анализа противопоставив вероятность и доказательное знание, в главе «О скептицизме по отношению к разуму» проводит мысль о том, что «всякое знание вырождается в вероятность»¹⁾, подчеркивая, что увеличение доверия к знанию, согласия в его оценке научным сообществом ведет к постепенному возрастанию уверенности, которое есть не что иное, как «прибавление новых вероятностей»²⁾, возникновение нового вида вероятностей. Вероятность, различающаяся по своим степеням, основана на неопределенности самого предмета исследования, на слабости нашей способности суждения, на сомнении, вытекающем из возможной ошибки при оценке истинности и достоверности наших способностей.

Если исходить из того, что всякое знание вырождается в вероятность, то возникает целый ряд вопросов, который задавал уже Я. Бернулли: «Остается исследовать, будет ли при таком увеличении числа наблюдений вероятность достичь действительного отношения „теоретической вероятности события“ постоянно возрастать так, чтобы превзойти всякую степень достоверности, или же задача имеет, так сказать, свою асимптоту, т. е. имеется такая степень достоверности, которую никогда нельзя превзойти. . . Если бы этого не случилось „если бы существовала асимптота“, то, признаюсь, следовало бы усомниться в нашей попытке определить „теоретическую вероятность“ из опытов»³⁾. Этот подход нашел свое завершение в индуктивной логике, которая обращается к исчислению вероятностей для оценки статуса наблюдений и эмпирических суждений. Каким образом осуществляется «прыжок» от индуктивных, от вероятных суждений к теоретически необходимому выводу, при такой позиции остается не ясным и не может быть уяснено.

С. Д. Пуассон, разделив шанс как объективную характеристику и вероятность как субъективную характеристику, разделил субъективную и объективную интерпретацию исчисления вероятностей.

Различие между вероятностью и шансами провел О. Курно. По его определению, «вероятность есть отношение протяженности шансов, благоприятных какому-либо событию, к общей протяженности всех шансов»⁴⁾. Подчеркнув объективный характер случайностей, он развивал пробабилистскую позицию относительно знания: знание вероятно и существуют различные степени вероятности научного знания. Наивысшая степень вероятности характерна для математики. Наименьшая присуща метафизике (философии). Достоверное знание мыслится им как тот предел, с которым соотносятся другие степени вероятного знания.

¹⁾ Там же, с. 289.

²⁾ Там же, с. 290.

³⁾ Бернулли Я. О законе больших чисел. — М., 1986, с. 42.

⁴⁾ Курно О. Основы теории шансов и вероятностей. — М., 1970, оригинальное издание: Paris. 1843. § 18.

Наиболее развернутая концепция вероятности, основанная на идее случайности, представлена Ч. Пирсом. Свою концепцию он называет «тихизмом» (от греч. *thyche* — случай), подчеркивая приоритет случайности и вероятности как во вселенной, так и в теории знания. Разделяя демонстративный и вероятный вывод, он усматривает в доказательном, дедуктивном рассуждении особый случай вероятностного рассуждения: «Демонстративный вывод есть предельный случай вероятного вывода. Уверенность *за* есть вероятность 1. Уверенность *против* есть вероятность 0»¹⁾. Исходная посылка его философии — гипотетический характер всякого знания. С этим же связан и отстаиваемый им принцип фаллибилизма — принципиальной ошибочности, неискоренимой погрешимости и опровержимости научного знания: «Мы никоим образом не способны достичь достоверности и точности. Мы никогда и ни в чем не можем быть уверены до конца, а равно относительно какой-угодно вероятности удостоверить точную значимость какой-либо меры или общего отношения. . . Фаллибилизм не говорит, что люди не способны достичь верного знания того, что создано умом. Он этого не утверждает и не отрицает. Он говорит только, что для человека недостижимой является абсолютная достоверность во всем, что имеет отношение к фактам»²⁾. Позицию фаллибилизма, которую он связывает с духом науки, Пирс противопоставляет инфаллибилизму религии. Неискоренимую погрешимость научного знания он обосновывал с помощью теории ошибок, получившей широкое развитие в науке его времени: «В тех измерительных науках, которые в наименьшей степени подвергаются ошибочности, в метрологии, геодезии и метрической астрономии ни один уважающий себя человек к сегодняшнему дню не считает нужным устанавливать свои результаты, не прилагая к ним вероятностную ошибку каждой из наук»³⁾. Рост науки Пирс связывает с выдвижением гипотез, с увеличением их степени вероятностей, с их верификацией и опровержением: «Лучшее, что может быть сделано в данной связи, — это представление гипотезы, не лишенной вероятности в контексте генеральной линии роста научных идей, которая поддается верификации или может быть отвергнута будущими исследователями»⁴⁾. Опередив свое время, Пирс выдвинул определенную гносеологическую стратегию — стратегию выдвижения опровержимых предположений. Основную процедуру этой стратегии, которая нашла свое продолжение в концепции критического рационализма К. Поппера, он назвал ретродукцией, или абдукцией⁵⁾.

¹⁾ Пирс Ч. Рассуждения и логика вещей. — М., 2005, с. 165.

²⁾ Пирс Ч. Принципы философии. Т. 1. — СПб., 2001, с. 120–121.

³⁾ Пирс Ч. Избранные произведения. — М., 2000, с. 11.

⁴⁾ Там же, с. 10.

⁵⁾ «Ретродукция представляет собой предварительное принятие гипотезы ввиду того, любой из ее возможных консеквентов может быть экспериментальным путем верифицирован» (Пирс Ч. Принципы философии. Т. 1. — СПб., 2001, с. 77).

Разрыв между индуктивными суждениями и достоверным знанием фиксировал в XX в. и Г. Рейхенбах: «Изучение индуктивных выводов принадлежит теории вероятностей, ибо наблюдаемые факты могут сделать теорию лишь вероятной, но никогда не сделают ее совершенно достоверной»¹⁾. Эта же мысль высказывалась Борелем: «В теории вероятностей неполное знание должно считаться нормальным... Мы можем даже сказать, что, зная мы все обстоятельства явлений, для вероятности не осталось бы места и мы достоверно знали бы исход»²⁾. Этот ход мысли касается прежде всего эпистемологических принципов, на которых основывается исчисление вероятностей и ее приложений в индуктивной логике. Вместе с тем он относится и к достоверности статистических документов, которые были результатом статистики населения, рождаемости и смертности, политической и моральной арифметики и т. д.

Статистика стала не только методом естествознания, но и социальных наук. Анализируя массовые события и процессы, стохастико-статистический метод, основанный на средних значениях, нашел свое применение в статистической физике, термодинамике, электродинамике, теории эволюции, в демографии, в социологии. Между тем несмотря на все достижения статистики ряд ученых (Л. А. Ж. Кетле, Ф. Гальтон) отмечали, что статистические документы не достоверны, а вероятны, предоставляя скудную частицу информации. Это отнюдь не критика статистики, а осознание ее границ и возможностей.

Вероятность и достоверность — путь включения вероятностей в теорию науки

После формирования и развития католического пробабиллизма, существовавшего в двух формах — пробабилиоризма, отстаивавшего идею разной степени вероятности, и собственно пробабиллизма, настаивавшего на равновероятности различных суждений и оценок, сама идея вероятности оказалась примененной как к моральным, так и к логическим суждениям. Возникли моральный пробабиллизм с идеей моральной достоверности и логический пробабиллизм с идеей логической достоверности. Если для первого было характерно взвешивание различных аргументов в этике по их значимости (авторитетность Библии, отцов церкви, решений католических соборов, суждений католических теологов), то логическая достоверность предполагала уяснение различных степеней уверенности в тех или иных суждениях и различение достоверных суждений (например, непосредственных чувственных данных) от других суждений. Это схоластическое различение моральной и логико-математической достоверности было воспринято Р. Де-

¹⁾ *Reichenbach H. Rise of Scientific Philosophy. Berkeley, 1951, p. 231.*

²⁾ *Borel E. Probabilities et certitude. Paris, 1950, p. 16.*

картом¹⁾, метод сомнения которого завершался интуицией *cogito ergo sum* и достоверностью математического знания. В 1662 г. А. Арно и П. Николь написали книгу «Логика или искусство мыслить», в которой они развернули представления относительно правил веры в различного рода случайные события. Проведя различие между двумя видами истин — необходимыми истинами, относящимися к сущности вещей, и истинами, относящимися к случайным событиям, которые могут произойти или не произойти, они связали вероятность с неизвестностью порядка случайности. Арно и Николь рассматривали вероятность в контексте веры в те или иные события, подчеркивая, что необходимо принимать во внимание все сопутствующие обстоятельства для анализа возможных событий. Анализ веры в события приводит их к мысли о том, что при определенных обстоятельствах можно считать события «если не достоверными, то по крайней мере весьма вероятными. Это вполне достаточно, когда нам нужно вынести суждение о них; ибо там, где недостижима метафизическая достоверность, мы вынуждены довольствоваться моральной достоверностью, а когда мы не способны достичь полной моральной достоверности, но должны высказать свое мнение, лучшее, что можно сделать — это выбрать наиболее вероятное, поскольку было бы противоразумным выбирать то, что наименее вероятно»²⁾. Для определения вероятности будущих событий они обращаются к исчислению вероятности выигрыша и проигрыша в играх³⁾. Но не в этом их заслуга, а в том, что они расширяют сферу применения исчисления вероятностей — вероятность, не отождествляемая с исчислением равновозможности, используется для осмысления веры (уверенности) в подлинности документов прошлого и анализа споров относительно нее. Так был сделан еще один шаг по включению идеи вероятности в методологию исторического знания и критики текстологических источников прошлого.

Моральная достоверность была сосредоточена на письменных свидетельствах, их достоверности и правдоподобности. Затем в нее стали включаться чувственные данные, естественные факты. Тем самым существенная часть эмпирического естествознания, прежде всего естественной истории, а затем и экспериментального естествознания, приобрели иной статус, аналогичный статусу моральной достоверности, и становились предметом теории научного знания. Эмпирические суждения естествознания обрели статус высокой степени вероятности и тем самым были отделены от области мнения (доксы). Рост эмпирического и экспериментального естествознания привел к экспансии правдоподобного, различного по степени вероятного знания и к сокращению сферы доказательного математического знания. В результате ориентации ученых и философов «на факты, на вероятность, на гипотезу английские интеллектуалы создали новую философию науки,

¹⁾ Декарт Р. Сочинения. Т. 1. — М., 1969, с. 420–421.

²⁾ Арно А., Николь П. Логика или Искусство мыслить. — М., 1997, с. 282.

³⁾ Там же, с. 286.

которая привела к более тесному контакту те интеллектуальные виды деятельности, которые некогда считались принадлежащими к совершенно различным областям»¹⁾.

Это движение к более тесному контакту различных областей знания берет свое начало уже у Д. Локка, который подчеркивал, что необходимо изучать и сравнивать различные основания вероятности научных положений и предположений и строить догадки о том, что еще не открыл опыт. Он исходит из того, что большая часть наших знаний зависит от дедуцирования, но разум не ограничивается лишь необходимыми связями, а включает в себя и восприятие вероятных связей. Их он считает низшей ступенью разума. Локк посвящает специальную главу вероятности, рассматривая ее как «видимость соответствия на основании не вполне достоверных доводов»²⁾. Вероятность связана с недостатком знания, с правдоподобием, когда существуют аргументы принимать положение за истинное. Основание вероятного мнения состоит в согласии с мнениями других. Вероятность может относиться к фактам или к умозрению. Совпадение опыта других людей с нашим опытом вызывает уверенность в факте. Это высшая степень вероятности, близкая к достоверности. Модальности вероятных умозаключений различны — вера, предположение, догадка, сомнение, колебание, недоверие, неверие. Процедурой вероятного знания является аналогия. Локк рассматривает различные исторические свидетельства согласно их степени вероятности. Высшей достоверностью обладают откровения Бога, который не может быть обманщиком. Высшей ступенью нашего знания является интуитивное знание. Оно несомненно достоверно и не нуждается в доказательствах. В отличие от него существуют суждения на основе вероятных доводов. С помощью такого рода суждений достигается оценка весомости каждой вероятности и осуществляется выбор наиболее весомой из них. Среди четырех видов доводов Локк выделяет довод от суждения (*ad iudicium*), апеллирующий к какому-нибудь основанию знания или вероятности. Итак, Локк впервые попытался не противопоставить разум и веру (убеждение), а более широко понять разум, который включает в себя «выявление достоверности или вероятности положений или истин», к которым «ум приходит путем выведения из идей, полученных им благодаря применению естественных способностей, а именно посредством ощущения или рефлексии»³⁾. В истинности очевидных положений ум убеждается лишь на основании вероятности. Характеризуя причины заблуждений, он усматривает их в отсутствии доказательств, в помехах исследованиям, в неумении применять их, в неверности критериев вероятности — в признании недостоверных и не очевидных положений, в общепризнанных гипотезах, в господствующих склонностях и в авторитетах. Вывод, который делает

¹⁾Shapiro B. J. Probability and certainty in 17 century England. Princeton. 1983, p. 73.

²⁾Локк Д. Сочинения. Т. 2.— М., 1985, с. 133.

³⁾Там же, с. 169.

Локк, свидетельствует о том, что он уже включает в структуру теории научного знания помимо доказательного математического знания и тот вид знания, который совсем недавно выносился за пределы теории науки как область мнения: «Там, где истина устанавливается одним доказательством, дальнейшего исследования не требуется. Но в тех случаях, когда мы имеем дело только с вероятностью и не существует доказательства для установления бесспорной истины, недостаточно проследить лишь один аргумент до его источника и рассмотреть его сильную и слабую стороны, но необходимо, исследовав таким путем все аргументы с обеих сторон, сопоставить их между собой, и, уже подведя итог, разум решит, какой вывод для него приемлем»¹⁾. В арсенал знания и методов рассуждения Локк включает не только интуицию и доказательство, но и вероятностную связь идей. Но все же основная посылка Локка заключается в том, что вероятностная связь идей обусловлена прежде всего недостаточным знанием причин, неполным постижением всех детерминаций случайных событий. Неполнота наших знаний и случайность — таковы основания, согласно Локку, на которых зиждется идея вероятности.

Правдоподобность как характеристика вероятностного знания

Лейбниц, полемизируя с Локком в «Новых опытах о человеческом разумении» (1703–04), рассматривает вероятное знание как одну из форм научного знания: вероятное знание «всегда основывается на правдоподобии, или на сообразности с истиной»²⁾. Он не ограничивает вероятность знания только историческим знанием и особенностями исторических наук: «мнение, основанное на вероятности, может быть, тоже заслуживает названия знания; в противном случае должно отпасть все историческое познание и многое другое»³⁾. Хочу обратить внимание на осторожное отношение Лейбница относительно включения вероятного знания в философию науки — он говорит о мнении, основанном на вероятности, и о том, что «может быть» вероятное мнение заслуживает название знания. Он обсуждает вероятность юридической аргументации, подчеркивая, что «вся юридическая процедура есть не что иное, как особая разновидность логики, отнесенной к вопросам права. . . Я уже не раз говорил, что нужен новый раздел логики, который занимался бы степенями вероятности, так как Аристотель в своей „Топике“ ничего не дал по этому вопросу»⁴⁾. Сама идея новой логики, выдвинутая Лейбницем, — логики вероятного знания отнесена им не только к юридической аргументации. Она гораздо шире и предполагает раскрытие «критериев

¹⁾ Там же, с. 218.

²⁾ Лейбниц. Сочинения. Т. 2.— М., 1983, с. 470.

³⁾ Там же, с. 379.

⁴⁾ Там же, с. 478–479.

для взвешивания шансов и для составления на основании их твердого суждения»¹⁾. Он неоднократно отмечает, что можно определять степени вероятности тех или иных положений, выбирая то из них, которое наиболее вероятно. Причем положения, наиболее вероятные, могут предполагаться истинными до тех пор, пока не будет показано противоположное. Такого рода положения он называет презумпциями, используя юридическую терминологию²⁾. Он усматривает предмет новой логики, оценивающей «степени вероятностей и взвешивании проб, презумпций, предположений и указаний»³⁾. Лейбниц выдвигает пожелание о том, чтобы какой-нибудь талантливый математик создал бы труд об азартных играх и о равноценных и неравноценных шансах в этих играх⁴⁾.

Итак, Лейбниц в анализе идеи вероятности исходит из равновозможности вероятных альтернатив. Иными словами, идея вероятности и предвидимой им логики вероятности обосновывается Лейбницем (в отличие от Локка) не на идее случайности, а на идее возможности, которая имеет различные степени при взвешивании различных по статусу суждений. Это обращение к идее возможности ведет к осознанию идеи равновозможности как основания исчисления вероятностей. По словам Лейбница, «вероятность есть степень возможного», а «случайные величины превосходят всякий конечный разум»⁵⁾. Иными словами, исключая случайность из обоснования вероятности, Лейбниц определяет вероятность через степень возможного подобно

¹⁾ Там же, с. 479.

²⁾ Лейбниц. Сочинения. Т. 3.— М., 1984, с. 376, 421.

³⁾ Там же, с. 498.

⁴⁾ Там же, Т. 2, с. 479.

⁵⁾ О. Шейнин в книге «История теории вероятностей и статистики в кратких высказываниях». (Ч. П. Берлин, 2006) собрал различные определения вероятности в истории мысли. Эти высказывания приводятся им на с. 3, 5, 105. Они взяты из книг: Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und J. Bernoulli // *Bernoulli J. Ars conjectandi*. Hrsg. Kohli Frankfurt am Main. 1975. S. 509; *Leibniz I. G. Fragmente zur Logik*. Berlin. 1960. S. 288, Leibniz. «De incerti aestimatione» // *Forschungen und Fortschritte*. 1957. Bd. 31. № 2, S. 45–50. Шейнин приводит еще два высказывания Лейбница разных лет — одно из переписки с Я. Бернулли от 1703 г. «Я хотел бы, чтобы кто-нибудь математически изучил различные игры (которые уже содержат прекрасные примеры „учения об оценке вероятностей“). Это было бы и приятно, и полезно, и не недостаточно ни тебя, ни другого уважаемого математика» (Цит. соч. с. 3) и другое из письма к Л. Бурже (L. Bourguet) от 1714 г.: «с двумя костями так же возможно выкинуть двенадцать очков, как и одиннадцать, потому что и тот, и другой исходы могут осуществиться только одним путем. Но второе легче выкинуть семь очков, так как этого можно достичь при выходе шести очков и одного очка, пяти очков и двух, или четырех и трех очков. . . Покойный месье Бернулли развивал эту тему по моим увещаниям» (Цит. соч., с. 26 *Leibniz Brief an L. Bourguet* // *Leibniz. Philosophische Schriften*. 7 Bde., Bd. 3. Abt. 1. Hrsg. C. J. Gerhardt. Lpz. 1875–90, s. 569–570). О. Шейнин, ссылаясь на Тодхантера (Todhunter C. History of the Mathematical Theory of Probability from of Pascal to that of Laplace. N. Y., 1949, p. 48) отмечает ошибочность этих суждений Лейбница, поскольку Бернулли задолго до этого занимался теорией вероятностей.

тому, как его современник Я. Бернулли будет определять вероятность через степень очевидности¹⁾.

В «Логических исследованиях» Гуссерль развивает концепцию вероятности, близкую Лейбницу. Он выдвигает идеал построения чистой логики, т. е. логики замкнутой теории, логики идеальных условий возможности науки вообще, понятой как совокупность законов дедуктивного единства чистого знания. Этой логике теоретического знания он противопоставляет логику опытного, эмпирического знания, логику законов теории опытных наук, «опытных науках всякая теория только предположительна. Она дает объяснение не из *очевидно достоверных*, а лишь из *очевидно вероятных* основных законов. Таким образом, *сами теории* и обладают только уясненной вероятностью, они суть только предварительные, а не окончательные теории, и в области эмпирического мышления, в сфере вероятностей должны существовать идеальные элементы и законы, в которых вообще а priori коренится *возможность* эмпирической науки, познания вероятности реального. Эта сфера чистой закономерности, которая имеет отношение не к идее теории и, более общим образом, к идее истины, а к идее эмпирического единства объяснения или к *идее вероятности*, образует вторую великую основу логического технического учения и вместе с ним принадлежит к области чистой логики в *соответственно более широком смысле*»²⁾. Если «Логические исследования» посвящены прежде всего логическим нормам и регулятивам научного знания, то «Идеи к чистой феноменологии» — анализу типов очевидностей и их критике. Существуют различные точки зрения относительно связей «Логических исследований» и «Идей к чистой феноменологии». Сам Гуссерль ссылается в «Идеях...» на «Логические исследования», в частности, при разделении наук о фактах и наук о сущностях (к ним он относит эйдетические науки и математику)³⁾. Все же надо признать, что в «Идеях...» ряд проблем, обсуждавшихся в «Логических исследованиях», к сожалению, не получили продолжения. Это относится и к проблеме вероятности. Гуссерль в «Логических исследованиях» расчленил логику опытных, эмпирических наук и дедуктивную логику теоретического знания. Если первая является логикой очевидно вероятных законов, а эмпирическое знание всегда предположительно, то вторая логика является логикой очевидно достоверного и законов дедуктивного единства чистого знания. Эти две логики относятся к области чистой логики в широком смысле слова. Он исходит из того, что и в области эмпирического мышления, т. е. в сфере вероятности,

¹⁾Любопытно, что Колмогоров определял вероятность как «числовую характеристику степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях» (Колмогоров А. Н. Вероятность // Вероятность и математическая статистика. Ред. Ю. В. Прохоров. — М., Большая Российская Энциклопедия, 1999).

²⁾Гуссерль Э. Логические исследования. Т. 1. СПб., 1909, с. 224.

³⁾Гуссерль Э. Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. Кн. I. М., 1999, с. 34–37.

должны существовать законы, в которых априорно коренится *возможность* эмпирических наук, и должны существовать вероятности реального, которые и познаются в эмпирических науках. Определяя вероятность с помощью идеи возможности, он, правда, больше не обсуждает вопросы о том, как связаны между собой вероятности реального и эйдетические сущности, каково взаимоотношение эмпирических и эйдетических наук, отдавая приоритет феноменологическому осмыслению эйдетического знания. Разделение двух типов наук и двух типов логик, критический анализ регулятивов этих двух типов наук, прежде всего эйдетических наук — вот чем ограничивается феноменология Гуссерля в то время, как теория вероятностей все более и более становилась методологией естествознания (для Р. фон Мизеса теория вероятностей — вообще метод естественных наук) и социальных наук. Его меньше всего интересовали методы и регулятивы эмпирического знания, опытных наук, использующих вероятностные методы. Его преимущественный интерес к «высокой теории», к нормативным, эйдетическим наукам вынуждал его умалять вероятностные методы эмпирических наук, «погрязших» в дескриптивных и опытных суждениях, в исчислениях вероятностей выводов из трансцендентного опыта в противовес эйдетическим наукам, основанным на идее абсолютной истины.

Полемика относительно исчисления вероятностей в квантовой механике

К 30-м годам прошлого века — ко времени аксиоматизации теории вероятностей (1933) А. Н. Колмогоровым разноречье в трактовке метафизических оснований исчисления вероятностей отнюдь не исчезло. Одни ученые обосновывали вероятность с помощью математического ожидания, другие — с помощью предположения достоверности, третьи — с помощью веры, или уверенности, четвертые — с помощью понятия «массовые явления» (коллектива, Р. фон Мизес), пятые — с помощью идеи случайности, случайных величин, случайных процессов, шестые — с помощью идеи возможности, седьмые — с помощью различения шанса и вероятности, восьмые — с помощью понятия частоты. Возникло не просто различие между объективной и субъективной вероятностями, но и открытая альтернатива между учеными, отстаивающими ту или иную интерпретацию вероятности, хотя уже давно отмечалась (например, Борткевичем¹⁾) несостоятельность этого разделения. «В XX в. происходит общий подъем интереса к теории вероятностей во всех странах. Создаются основы теории случайных процессов и дается окончательная форма аксиоматического изложения теории вероятностей,

¹⁾ «Каждая данная вероятность предполагает определенное знание или незнание и в этом смысле должна быть признана субъективной». Борткевич В. И. Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики (1896). // В кн.: Четвериков Н. С. О теории дисперсии. — М., 1968, с. 74.

исходящая из усмотренных впервые Э. Борелем аналогий между понятием вероятности и понятием меры в теории функций действительного переменного»¹⁾. Исследование Колмогоровым проблем стихосложения и сложности литературных текстов привело его к введению понятия хаотических последовательностей и меры их сложности (последовательность не является хаотичной, если существует ее простое описание). Колмогоровская теория сложности является теорией случайных последовательностей и меры их сложности, которая обосновывается обращением к теории информации, в свою очередь основывающейся на исчислении вероятностей.

Аксиоматизация теории вероятностей А. Н. Колмогоровым, казалось бы, должна была положить конец многообразию различных вариантов обоснования исчисления вероятностей. Однако этого не произошло, что с особой силой проявилось в спорах относительно полноты квантово-механического описания.

Неопределенность в понимании вероятности не уменьшилась вместе с возникновением квантовой механики, в частности, вместе с волновой ее интерпретацией. Для Э. Шредингера электрон — не частица, а распределение плотности, которое выражалось в квадрате его ψ^2 . М. Борн интерпретировал эту функцию статистически как плотность вероятности в конфигурационном пространстве. Известна полемика между А. Эйнштейном и Н. Бором относительно полноты кванто-механического описания. Если для Эйнштейна «Бог не играет в кости», т. е. нельзя мыслить физическую реальность в терминах случайностей, то для Бора квантовое описание атомной реальности невозможно без статистических методов.

Менее известна полемика между Эйнштейном и М. Борном, который дал вероятностную интерпретацию волновой функции Шредингера и вместе с тем осознавал границы статистических методов как в классическом, так и в квантово-механическом описаниях: «Фактически введение вероятностей можно оправдать тем обстоятельством, что начальное состояние системы никогда не бывает известно точно. Поскольку такое положение имеет место, статистические методы могут быть приняты в классической физике, возможно, с некоторыми ограничениями». Он показывает, что физика, использующая методы исчисления вероятностей, прибегает к следующей физической процедуре: «мы делаем некоторое предположение о начальном распределении, в частности, если это возможно о равновероятности всех случаев, пытаемся затем показать, что наше начальное распределение никак не влияет на конечные наблюдаемые результаты». И в квантовой механике «мы вновь встречаемся с нехваткой информации, нужной для описания деталей системы, и снова оказываемся перед необходимостью удовлетвориться средними значениями. Обычно забывают, что для их получения необхо-

¹⁾ Колмогоров А. Н. Математика // Математический энциклопедический словарь. — М., 1988, с. 37.

димо было сделать предположение о равновероятных конфигурациях»¹⁾. Эйнштейн же считал, что описание отдельной системы с помощью ψ -функции является неполным, а с помощью статистической интерпретации Борна можно получить результаты, которые относятся к статистическим ансамблям систем. По словам Эйнштейна, «существует нечто вроде реального состояния физической системы, которое существует объективно, независимо от какого бы то ни было наблюдения или измерения, и которое в принципе может быть описано на языке физики»²⁾. В отличие от позиции Эйнштейна основатели квантовой механики исходили из признания в самой природе первичных вероятностей, не сводимых к законам причинности. П. Дирак, отказавшись от аксиомы, что вероятности выражаются числами в интервале между 0 и 1, выдвинул понятие «обобщенной вероятности», включающей и «отрицательные вероятности», которое было скорее математической фикцией, а не понятием, имеющим физическое содержание.

Осознание альтернативности двух подходов к обоснованию исчисления вероятностей, которые были присущи, в том числе и представителям неопозитивистской философии 30-х гг. прошлого века, привело К. Поппера к попытке преодолеть эту альтернативность и найти средства для объединения этих подходов. В философии критического рационализма Поппер выдвинул ряд гносеологических идей, перспективных для понимания вероятности. Прежде всего, он, сохранив идею истины и истинности как критерия правдоподобности, отдал приоритет идее правдоподобности (Verisimilitude). Естествознание стремится к истине, но естественнонаучное знание вероятно: «Мы никогда не имеем права сказать, будто знаем, что они (догадки и предвосхищения — *авт.*) „истинны“, „более или менее достоверны“ или хотя бы „вероятны“»³⁾. Выступая против предположения Рейхенбаха о вероятности гипотез и допущений ослабленной достоверности или истинности, т. е. вероятности, Поппер подчеркивает: «замена „истины“ „вероятностью“ не помогает нам избежать ловушки регресса в бесконечность либо априоризма»⁴⁾. Можно сказать, что естествознание в отличие от математики не является *scientia* или *episteme*, т. е. не является дедуктивно-доказательным, всеобщим и необходимым знанием. Вместе с тем естествознание не является и *techné*. Оно принадлежит области мнений и предположений (*doxa*). Естественные науки контролируются с помощью критического обсуждения («критицизм») и экспериментальной техники⁵⁾. Поппер критикует субъективные интерпретации исчисления вероятностей

¹⁾ Борн М. Размышления и воспоминания физика. — М., 1977, с. 153–154.

²⁾ Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 3. — М., 1966, с. 617.

³⁾ Поппер К. Логика научного исследования. — М., 2004, с. 289.

⁴⁾ Там же, с. 288.

⁵⁾ «Осознание того факта, что естествознание принадлежит области *doxa*, хотя до недавнего времени его относили к области *episteme*, окажется, я надеюсь, плодотворным для понимания истории идей» (Поппер К. Предположения и опровержения. Рост научного знания. — М., 2004, с. 627).

и предстает как защитник объективной интерпретации вероятности. Однако одновременно он не удовлетворен частотной теорией вероятностей, т. е. определенным вариантом объективной интерпретации вероятности, и развивает оригинальную концепцию «диспозиционной интерпретации» вероятностей. Основная идея Поппера в «диспозиционной интерпретации» вероятностей — идея предрасположенностей (Propensities).

Идея предрасположенностей в 90-е гг. стала им мыслиться не просто как основание «диспозициональной интерпретации вероятностей, но и как способ обоснования „открытой Вселенной“ — ненаблюдаемых диспозиционных свойств физического мира, т. е. из методологической она стала онтологической. С помощью онтологизации идеи предрасположенности Поппер рассматривает мир как процесс реализации „весомых диспозиций“»¹⁾. Он выдвигает новое понятие причинности, далекое как от детерминизма, так и от индетерминизма. Каузация, согласно Попперу, — особый случай предрасположенности²⁾, это предрасположенность, равная 1. Согласно Попперу, предрасположенность — это свойства, внутренне присущие ситуации, частью которой является объект. С этих позиций он анализирует философско-методологические проблемы соотношения мозга и тела, активности сознания и квантовой механики³⁾. Казалось бы, предрасположенность тождественна возможности и соответственно интерпретация Поппером вероятностей движется в традиционном русле, когда вероятность определялась через возможность. Однако Поппер подчеркивал, что предрасположенность — это ненулевая возможность, что все предрасположенности реализуются со временем. Поэтому для Поппера «новые предрасположенности создают новые возможности. А новые возможности имеют тенденцию реализовываться, чтобы создать, в свою очередь, новые возможности. Наш мир предрасположенностей по природе своей творческий»⁴⁾. Иными словами, в отличие от идеи равновозможности как способа обоснования вероятностей или равновероятности (баланса вероятностей) Поппер исходит из идеи неодинаковых возможностей, возможностей, имеющих разный вес и по-разному реализующихся. Думаю, что идея предрасположенностей, развитая Поппером, найдет свое подтверждение и в современной генетике, нередко интерпретируемой в духе предопределения, а не творческих возможностей.

¹⁾ *Popper Ch. A World of Propensities. Bristol. 1990.* В русском переводе: *Поппер К. Мир предрасположенностей. Два новых взгляда на причинность // Эволюционная эпистемология и логика социальных наук. Карл Поппер и его критики.* — М., 2000, с. 176–194.

²⁾ Там же, с. 189.

³⁾ *Поппер К. Знание и психофизическая проблема. В защиту взаимодействия.* — М., 2008; *Popper Ch. Knowledge and the Body-Mind Problem. L., 1994, Popper Ch. Quantum Theory and the Schism in Physics. L., 1992.* О предрасположенности см.: *Юлина Н. С. К. Поппер: мир предрасположенностей и активность самости // Философские исследования. 1997, № 4, Баженов Л. Размышления при чтении Поппера // Вопросы философии, 2001, № 4.*

⁴⁾ Эволюционная эпистемология и логика социальных наук. с. 189. (см. ¹⁾).

Принципиально различные подходы к вероятностям¹⁾ до сих пор сохраняются в философии науки, несмотря на ряд попыток преодолеть разрыв субъективной и объективной интерпретаций вероятностей. Осознание методологической и гносеологической значимости вероятностных методов в современной науке как в естественной, так и в социальной, ставит на повестку дня создание пробабилистской, вероятностной методологии науки. Среди ее принципов можно выделить: 1) гипотетический характер знания, 2) критерием научного знания является правдоподобность, а не истина, 3) трактовка каузации как идеализации вероятностных процессов, 4) фаллибизм как фундаментальная характеристика научного знания, т. е. подверженность научного знания ошибкам, погрешностям, в отличие от инфаллибизма религии и любых идеологий, 5) вероятностный характер теорий и оценка степени их вероятности, 6) поворот к индуктивной, а не к аксиоматико-дедуктивной логике, 7) достоверное знание как трансцендентальный идеал научного знания, 8) опровержение как процедура обоснования и оправдания теорий, 9) связь логики эмпирических наук с процедурами измерений и с теорией ошибок. Построение вероятностной методологии позволит, по моему мнению, избавиться от избыточных трактовок слова «вероятность», когда им называются разнопорядковые предметы, предполагающие различные категориальные и методологические средства исследования²⁾.

¹⁾Эта альтернативность сохраняется в современных учебниках по методологии науки. Так, М. Козн и Э. Нагель фиксируют три интерпретации вероятностей: 1) вероятность как мера верования, 2) вероятность как относительная частота, 3) вероятность как частота истинности типов аргументов (Козн М., Нагель Э. Введение в логику и научный метод. М., 2010, с. 238–249).

²⁾Это уже отмечается рядом исследователей. См., например, Чайковский Ю. В. Что такое вероятность. Эволюция понятия (от древности до Пуассона) // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 6(41), М., 2001, 34–57; Андреев А. В. Роль физики в изменении смысла понятия «вероятность» // Исследования по истории физики и механики. 1998–1999. М., 2000, с. 214–238. Я осознанно разрозненность размышлений в данной статье, которая сосредоточена прежде всего на философских интерпретациях вероятностей, а не на математической теории вероятностей. Но и они многообразны и не всегда коррелируют с собственно научными (физическими и математическими) концепциями вероятности.



Фоменко А. Т.
Фанатики

Метафизика и основания математики

*В. Я. Перминов*¹⁾

Математика обычно мыслится как наука, замкнутая в себе и мало прибегающая к каким-либо внешним доводам, имеющим опытное происхождение. Такое воззрение особенно характерно для априористской философии, согласно которой первичные понятия математики — создания самого разума, навязываемые миру явлений. Это воззрение вызывает возражения, так как оно плохо согласуется с эффективностью математики в описании структур нашего мира

Эмпирически настроенные философы и ученые склонны думать, что математика подобно всем другим наукам возникает из опыта, а именно, из операций счета и из наблюдений за движущимися телами. Это воззрение страдает тем недостатком, что не объясняет специфических черт математической теории, отличающих ее от эмпирической теории, таких как строгость доказательств и неопровержимость на основе опыта.

Но два этих случая не исключают всех возможностей отношения математических структур к реальности. Можно предположить, что в началах математики лежит особое видение мира, которое можно назвать онтологией или метафизикой, которое исходит из реальной структуры мира и тем не менее выступает для сознания в качестве системы законченных и общезначимых представлений. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что прояснение природы метафизики важно для понимания методологии математики и подходов к ее логическому обоснованию.

1. Обоснование математики и математическое априори

Формалистская философия математики, выдвинув непротиворечивость в качестве сущностного требования к математической теории, как кажется, полностью устранила ценность всяких ее метафизических предпосылок.

¹⁾Василий Яковлевич Перминов (1938 г. р.) — доктор философских наук, профессор философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

С этой точки зрения, евклидовы, неевклидовы и многомерные геометрии стали тождественными в смысле своей непротиворечивости и одинаково ценными в плане возможного приложения. Выделение евклидовой геометрии как единственно истинной, как кажется, потеряло всякий смысл.

Дальнейшие события привели, однако, к восстановлению этого различия. Проблема обоснования математики, возникшая с появлением парадоксов в теории множеств, потребовала выявления базы обоснования, а именно, выделения теорий максимально надежных, свободных от противоречий, которые могли бы играть роль базы редукции. В качестве таких теорий были приняты логика (Фреге и Рассел), арифметика (Брауэр) и финитная математика (Гильберт). Математические теории, разделились, таким образом, на обосновываемые и обосновывающие. Обосновывающие теории должны быть приняты как безусловно надежные и эта надежность должна следовать из некоторых содержательных соображений.

Для оправдания выбора логики как основания математики Фреге ссылался на ее связь с общими категориями мышления, которым он, в отличие от Канта, придавал значение реальных подразделений бытия. Логика надежна и неизменна, поскольку общие категории мышления не могут быть изменены. Фреге понимал логику реалистически, так же как понимали ее Аристотель и Лейбниц. Он видел за законами логики не только необходимые правила мышления, но и разделения самого бытия.

Брауэр в качестве базы обоснования берет арифметику. Математика, по Брауэру, должна быть построена на арифметике, а арифметика может оправдать свою надежность тем, что она в своих понятиях выражает праинтуицию времени. Геометрия устраняется из оснований математики. Появление неевклидовых геометрий, по мнению Брауэра, доказывает неоднозначность и ненадежность пространственной интуиции.

В основе обосновательных построений Д. Гильберта лежит финитная математика, которая, по его замыслу, должна быть достаточной для обоснования непротиворечивости основных математических теорий. Гильберт отождествляет финитизм с априорностью. Финитная математика объявляется априорной частью математики и вследствие этого абсолютно надежной в качестве исходной обосновательной структуры. Программа Гильберта также исключает геометрию из числа обосновательных структур.

Все три программы, таким образом, опирались как на последнюю инстанцию на априорное и абсолютно надежное математическое знание. Однако сам критерий априорности оставался неопределенным. Никто из авторов программ не проанализировал статус априорного знания, не поставил специального вопроса об объеме априорного знания в математике и об обосновании самой связи: априорность = абсолютная надежность. Действительно ли геометрическая интуиция дискредитировала себя? Дей-

ствительно ли мы имеем основания сомневаться в надежности закона исключенного третьего? Действительно ли априорная математика может быть отождествлена с математикой финитной?

В 20-х гг. прошлого века Г. Фреге предложил новую программу обоснования математики, основанную на геометрии. В отличие от прежней логицистской установки он считает теперь, что геометрическая очевидность, так же как и арифметическая, не содержит в себе никакого чувственного компонента и вследствие этого является абсолютно надежной. «Арифметика и геометрия, — пишет Фреге, — выросли на одной и той же почве, а именно геометрической, так что вся математика есть, собственно говоря, геометрия» [1]. Это принципиальный новый подход. Теоремы Гёделя говорят о невозможности обосновать бесконечную математику на основе конечной. Но если в состав обосновательного слоя включить геометрию и логику в полном объеме, то база обоснования не будет финитной и прямая критика программ обоснования на основе теорем Гёделя теряет основания.

Вопрос о возможности полного обоснования математики остается до сих пор не решенным и большая доля неопределенности идет здесь от неопределенности философских установок. Мы должны получить ответы по крайней мере на следующие три вопроса: каковы истоки априорного знания в математике, является ли априорное знание абсолютно надежным и каков действительный объем априорного знания, включает ли оно геометрию как думал Кант, или исключает ее, как думали Брауэр и Гильберт?

2. Практика и конституирование предметного мира

Наш основной тезис будет состоять в том, что априорное знание — это знание, порожденное человеческой практикой. Второй тезис будет состоять в том, что априорное знание реально в том смысле, что оно раскрывает картину бытия, дополнительную к той картине, которую строит наука.

В общей теории познания подчеркивается, что практика является стимулом познания, основой познания (в смысле наличного материала и средств), а также высшим критерием истинности теорий и идей. К этим несомненно верным положениям необходимо добавить еще одно, состоящее в том, что практика является нормативной основой познания, т. е. источником универсальных норм, которым подчинено всякое знание. Это абстрактное положение важно в том отношении, что оно дает нам возможность понять природу априорного знания из естественных задач мышления.

Если некоторая функционирующая система является частью другой более широкой системы, то в своих функциях она неизбежно подчинена целям этой системы и общие регулятивы ее развития могут быть поняты только

при рассмотрении этого функционального соподчинения. Этот абстрактный системный принцип должен быть руководящим и при анализе процесса познания. Познавательная деятельность человека — это функциональная часть его практической деятельности, а это значит, что высшие нормы, регулирующие познавательную деятельность, имеют праксеологическую природу и должны быть выведены из практической функции знания.

Суть этого тезиса состоит в том, что всякое знание, сориентированное на практику, подчинено нормам, проистекающим из самой этой цели, а именно: из общей установки на его эффективность. Это значит, что наряду с принципами, проистекающими из предмета исследования, которые различны для различных сфер опыта и выражаются в понятиях конкретной теории, существуют универсальные принципы, проистекающие из общих целей знания и единые для всех его видов. Это принципы, определяющие универсальную форму знания. Априорное и апостериорное знание различаются в этом плане как знание телеологическое, заданное практической ориентацией мышления, и знание отражательное, определенное специфическими подразделениями опыта.

Здесь необходимо провести ясное различие между практикой и опытом как гносеологическими понятиями, которое часто упускается из виду при их обыденном использовании. В самом широком плане практику мы должны понять как деятельность субъекта, изменяющую предметный мир, а опыт как систему представлений о мире, полученную на основе чувственного восприятия. В понятийной картине мира опыту соответствует вся позитивная информация о мире, основанная в конечном итоге на актах чувственного восприятия явлений, а практике — универсальные нормы мышления, прежде всего категориальные и логические, порожденные деятельностной ориентацией мышления.

Важно понять то обстоятельство, что только практика конституирует мир реальных предметов и структуру реальности в целом. Структура предметного мира выявляется в процессе деятельности, до актов познания и независимо от этих актов. С праксеологической точки зрения, предметная реальность абсолютно первична перед познавательной деятельностью и она никоим образом не может быть понята как порождаемая активностью сознания на основе данных чувственности, как это думал Кант. Выявление структуры предметного мира — не функция знания, а исключительно функция деятельности. Знание принципиально предметно в том смысле, что оно начинается только там, где уже выделен его возможный предмет. Структура предметной реальности — первичная структура сознания, обладающая беспредпосылочностью и строгой интерсубъективностью.

В этом плане мы получаем общий подход к истолкованию понятия реальности. Абсолютно реально то, что выделено деятельностью. Предметная структура мира реальна, ибо она выделена коллективной деятельностью.

Деятельностные подразделения обладают высшей реальностью и основой для оправдания всех других типов реальности.

3. Априорность категорий и логики

Наряду с миром предметов как общезначимой чувственной реальностью деятельность формирует также структуру идеальной нормативности, систему универсальных ограничений на содержание и логику мышления.

Универсальная праксеологическая нормативность проявляется прежде всего в категориальных принципах. Всякое опытное знание строится как знание о чем-то материальном, как основанное на причинно-следственных связях, на различении объектов в пространстве и времени и т. п. Нетрудно понять, что мы имеем здесь дело с общими требованиями к структуре представлений, проистекающими из их практической функции. Теория, которая отказалась бы от различения объектов по пространственно-временным характеристикам, не подчинялась бы общим свойствам причинно-следственных связей, не отделяла случайное от необходимого и т. д., не могла бы быть квалифицирована как знание, ибо она заведомо не могла бы быть использована для координации действий в какой-либо сфере опыта. Знание должно быть соединено с практикой, а следовательно, оно должно быть подчинено категориям практики, безотносительным к сфере опыта.

Мы убеждены, что каждое явление, даже самое незначительное, имеет достаточную причину своего существования. Это положение (принцип причинности) — не тривиальность и не тавтология. Оно относится к классу синтетических, так как совершенно очевидно, что оно не следует ни из понятия события, ни из понятия причинной связи. Каковы основания нашей веры в безусловную истинность этого принципа, что заставляет нас мыслить любое явление в контексте причинной зависимости? Опыт сам по себе не обосновывает необходимости причинного видения мира как универсального. Исходя из опыта мы можем утверждать, что наш мир является *в достаточной степени* причинно обусловленным, но никакой конечный опыт не позволяет нам утверждать, что *все* явления причинно обусловлены. Существование человека и его возможность влияния на события вполне совместимы с дефектами детерминации, с отступлениями от принципа причинности, по крайней мере в тех сферах реальности, до которых еще не дошла человеческая практика. Мы не знаем всех событий в мире и хорошо понимаем, что допущение отдельных беспричинных событий ничему не противоречит ни в теоретическом, ни в практическом плане.

Безусловный характер принципа причинности становится, однако, совершенно понятным при рассмотрении деятельностной установки мышления. Каков бы ни был мир в своей основе — полностью или только частично

детерминированным, мы можем влиять на него только посредством причинных связей, которые дают возможность, действуя на некоторое событие А, оказывать влияние на появление события В. Вся наша деятельность представляет собой попытку повлиять на будущее и, вследствие этого, она органически связана с установлением причинных зависимостей, которые являются необходимой основой такого влияния. Это значит, что общий принцип причинности представляет собой не индуктивный вывод из множества наблюдаемых причинных связей, а констатацию универсальной направленности сознания на выявление причин, порождаемую актами деятельности. Используя кантовскую терминологию, мы можем утверждать, что принцип причинности — это регулятивный принцип сознания, проистекающий из его деятельностной ориентации.

На этом примере мы можем уяснить двоякую основу онтологических категорий. Во-первых, они безусловно отражают в себе некоторую сторону реальности. В абсолютно хаотическом мире, где не было бы регулярных причинных связей, определяющих возможность действия, идея причинности вообще не могла бы возникнуть. В этом смысле принцип причинности отражает реальность. Во-вторых, категориальные принципы — это утверждения об идеализированном мире. Все или не все явления в мире имеют причину, это не может быть установлено в опыте. Мы утверждаем, тем не менее, что каждое явление имеет причину. Принцип причинности, таким образом, не обобщение опыта, а лишь определенный идеал, проект реальности, благоприятной для деятельности.

Человек как деятельное существо создает идеализированную картину мира, согласующуюся с реальными условиями деятельности и являющуюся, в своей сути, оправданием возможности действия. Такова природа всех основоположений рассудка. Их априорность не что иное, как универсальная нормативность, порожденная практической функцией знания. Здесь особо следует отметить то обстоятельство, что априорность этих принципов, т. е. их универсальность и необходимость для сознания, не противоречат тому факту, что они являются вместе с тем и отражением реальности в ее наиболее существенных моментах. Это понятно с эволюционной точки зрения: человеческое сознание, вписываясь в структуру реальности, с самого начала выделяет характеристики реальности, существенные с точки зрения деятельности и возводит их в конститутивные принципы всякой реальности.

Другой универсальной нормативной структурой сознания, проистекающей из деятельности, является система логических норм, которой подчинено всякое понятийное мышление. Если категории ограничивают содержание представлений, являются системой интуиций, лежащих в основе определения предмета мышления вообще, то логические нормы — это ограничения на структуру понятий (значений) и возможные их связи. Знание, построенное

вне логики, не является знанием, поскольку оно не является осмысленным и не может служить основой практической ориентации. Логика органически связана с категориальной онтологией, поскольку она построена на константах, определенных в сфере категориальных очевидностей. Жесткий параллелизм логики и категорий, установленный Кантом в некоторых отношениях может быть поставлен под сомнение, но в принципе он безусловно верен: система реальных логических принципов является отражением системы онтологических категорий и она не может изменяться без изменения последней.

Деятельностная трактовка категорий существенно меняет кантовское их понимание как беспредпосылочных, имеющих свои истоки в рассудке и впервые упорядочивающих мир явлений. Деятельностный подход отвергает первичность сознания и подчиненность потока феноменов его формирующей активности. Человек живет не в мире феноменов, а в мире материальных событий. В действительности, первична деятельность и процесс вписывания действующего существа в мир. Категории, с этой точки зрения, отражают необходимые условия деятельности как аспекты мира, благодаря которым эта деятельность вообще могла возникнуть. Ни человек и ни какое живое существо не могло бы вписаться в совершенно хаотический мир, в котором нет регулярного следования определенных следствий за определенными причинами. Причинность, время, необходимость, возможность — сущностные характеристики акта деятельности, отражающие характеристики мира, в котором может протекать деятельность.

Мы должны здесь провести различие деятельностной позиции с установкой эволюционной эпистемологии. Эволюционная эпистемология справедливо указывает на реальные основания априорных структур сознания. Ее ошибка состоит в том, что она не разделяет эмпирического и телеологического отражения опыта и возводит на уровень априорного все стороны опыта, соответствующие наиболее устойчивым сторонам реальности. Априорное знание, понятое таким образом, становится приближенным и изменяющимся исторически. В действительности, в ранг общезначимости и априорности возводятся лишь представления о сторонах реальности, определяющих саму возможность деятельности. Здесь мы имеем уже не эмпирическое, а телеологическое или субъектно-объектное отражение, которое будучи обусловлено определенными сторонами реальности, вместе с тем подчинено деятельностной ориентации сознания и ограничивается требованием общезначимости норм, определяющих деятельность. Будучи в своих истоках обусловлено реальностью, телеологическое видение мира по своему объему ограничено требованиями познающего субъекта и имеет внеисторический характер. Деятельностная позиция согласуется со взглядом Канта на априорное знание как нормативное и внеисторическое.

Категории внеэмпиричны не потому, что они отражают лишь структуру самого сознания, а потому, что они отражают бытие лишь в тех характеристиках, которые выявляются деятельностью самой по себе, независимо от ее предметного (эмпирического) содержания. Категории внеисторичны вследствие инвариантности структуры деятельности и единства деятельностной ориентации субъекта.

В категориях мы раскрываем особую реальность, не выразимую в эмпирических понятиях. Категории в этом смысле образуют первичную и абсолютно автономную сферу представлений. Мы будем называть эту сферу представлений категориальной онтологией или категориальным видением мира. Категориальная онтология представляет собой первичный и определяющий уровень априорного знания.

4. Априорность исходных представлений арифметики

Для обыденного сознания истины арифметики получаются из операции счета и несомненно апостериорны. Но эта точка зрения не соответствует действительности.

Косвенное соображение в пользу положения об априорности арифметических истин проистекает из самоочевидности этих истин. Как уже сказано, априорные истины даны сознанию с особой степенью очевидности, которая преобладает над очевидностями, относящимися к содержанию знания. Таковы, к примеру, нормы логического умозаключения. Но в таком случае сама аподиктическая очевидность может быть использована в качестве признака априорного знания. Если мы посмотрим на исходные представления арифметики, то должны будем признать, что они являются аподиктически очевидными, либо полученными из аподиктически очевидных истин на основе аподиктически очевидных операций. Пифагорейский тезис, согласно которому ложь не может быть присоединена к утверждениям о числах, понятен современному математику ничуть не в меньшей мере, чем математикам (да и всем людям) во все времена. Элементарные арифметические даны человеческому сознанию с непреложностью, и этот факт заставляет нас признать, что здесь мы имеем дело с представлениями, радикально отличными от представлений опытных наук.

Теоретическое обоснование априорности арифметики требует рассмотрения структуры универсальной онтологии. То, что мы называем универсальной, абстрактной или категориальной онтологией, состоит из двух существенно различных частей, которые можно назвать причинной и предметной онтологией. Чтобы действовать, мы нуждаемся в наличии причинных связей. Причинность является, таким образом, универсальным онтологическим

основанием деятельности. Система онтологических категорий, включающая категории материи, пространства, времени, причинности, случайности, необходимости, бытия, небытия и т. п., является целостной в том смысле, что все эти категории описывают аспекты реальности, определяющие деятельность, а точнее, акт деятельности в его необходимых онтологических предпосылках. Эта часть онтологии может быть названа каузальной или динамической, так как в центре ее находится представление о причинной связи, определяющее практическое отношение человека к миру.

Причинная онтология, однако, не исчерпывает всей сферы универсальных онтологических представлений. Для того чтобы действовать, мы нуждаемся не только в идеальных представлениях о связях, но и в идеальных представлениях о предметах, с которыми мы действуем. Мы должны, прежде всего, выделять и отождествлять предметы. В процессе действия мы неизбежно опираемся на допущение тождества предметов и постоянства их структуры, т. е. на идеальные представления о предметах, как удовлетворяющих условиям деятельности. Точно так же, как деятельность вырабатывает у нас идеальные представления об универсальности причинной связи, она вырабатывает и представления о мире как совокупности предметов, которые конечны в пространстве и времени, стабильны в своих формах, отделены друг от друга и т. д. Наряду с каузальной онтологией, которая выражает собой идеальные условия акта действия, мы имеем систему предметных идеализаций, идеализированную структуру мира, конституируемую деятельностью. В основе этой идеализированной структуры мира лежит разделение единичности и множественности. Действие конкретно, оно всегда направлено на некоторую единичность и предполагает онтологическое определение единичности, систему признаков единичного вообще.

Адекватное понимание арифметики как априорного знания достигается при осознании того факта, что в ее основе лежат универсальные идеализации единичного и множественного, выработанные деятельностью. Аристотель говорит, что «исследователь чисел полагает человека как единого и неделимого» [2]. К этому правильному положению мы должны добавить лишь то, что арифметическое образование понятий о едином и неделимом продиктовано не каким-либо чистым стремлением к абстрактности, а универсальной деятельностью установкой мышления. Мы имеем универсальное онтологическое представление о единичности и множественности, законы которого и выражает арифметика.

Наивное эмпирическое представление об арифметике состоит в том, что мы извлекаем понятие числа и законы арифметики из опыта, а именно, из процесса счета. Но чем в таком случае обусловлена универсальность арифметики, ее независимость от особенностей считаемых предметов? Еще древние философы справедливо указывали, что операция счета предполагает

представление о единице и подведение некоторой ситуации под понятие определенного числа. Бозций говорит, что «существует два рода числа: одно, посредством которого мы считаем, другое, заключенное в исчисляемых вещах» [3]. Это тонкое различие эмпирического и априорного. Мы должны четко разделить единичность как эмпирически выявляемую дискретность реальности и единичность как онтологическую идеализацию. Без реальной дискретности нет счета. Но реальная дискретность неоднородна, неустойчива, реальные «единицы» сливаются и разделяются. Онтологическая единица, на которой построена арифметика, однородна, постоянна, она не претерпевает изменений во времени, не разделяется и не сливается с другими единицами. Онтологическая единичность и множественность — объекты идеализированной картины мира, созданной деятельностной ориентацией субъекта.

Анализ процедур счета показывает, что они имеют смысл только в рамках представлений об идеальной предметности. Арифметика представляет в своей сущности не что иное, как описание требований к объекту, продиктованных универсальной предметной онтологией. Но это означает, что законы арифметики не порождены процедурами счета, а являются их условием, их убедительность для нашего сознания проистекает не из практики счета, а из универсальных требований предметной онтологии, из онтологического разделения единичности и множественности. Ошибка философов-эмпириков состоит в том, что они истолковывают сферу приложения арифметики в качестве источника ее истин. Они, как говорил Фреге, «смешивают применение математической истины с самой этой истиной» [4].

Априорность арифметики не означает, что понятие числа отражает только закон самого разума, что структура мира, данная в опыте, не имеет к этому никакого отношения. Для того, чтобы в мире был счет, мир должен быть в какой-то мере дискретным сам по себе, безотносительно к деятельности счета. Вопрос состоит лишь в том, каким образом определенные стороны реальности возводятся в ранг абсолютных представлений сознания. Мы должны здесь снова возвратиться к понятию телеологического отражения. Всякое априорное представление предполагает реальное (объектное) различие и должен иметь место переход от априорной структуры арифметики к чувственно данным объектам, подчиняющимся законам арифметики. Если бы в мире не было дискретности, различаемой эмпирически, в этом мире не появилось бы и априорная структура арифметики. Но это не значит, что априорная арифметика появилась на основе арифметики приближенной и эмпирической. При самом зарождении человеческого мышления дискретная структура реальности в силу своей важности для деятельности сразу же была возведена на уровень онтологической и субъектно-ориентированной идеализации, относящейся к объекту вообще. Априорное, таким образом, не творение духа, оно укоренено в структуре реальности, но оно другое по

способу своего становления и существования в иерархии понятий: законы арифметики даны нам как телеологические, идеализированные, диктуемые нашим подходом к реальности вообще и необходимые для опыта вообще.

Важным вопросом обоснования арифметики является вопрос о формировании представления о натуральном ряде чисел, который упорядочивает числа в их отношении к единичности. Вопрос состоит в том, как мы поднимаемся от представления единицы к понятию упорядоченной последовательности чисел. По Канту, в основе этого процесса лежит представление о времени. С деятельностной точки зрения, формирование представления о бесконечном ряде чисел обусловлено общим стремлением деятельностного сознания к преодолению конечного. Натуральный ряд чисел — идеализация, отражающая эту тенденцию. На становление этой идеализации оказало влияние как представление о бесконечности времени, так и представление о бесконечности пространства.

Основной аргумент против априорности арифметики исходит из того факта, что у первобытных народов не наблюдается развитых представлений о числе и натуральном ряде чисел. Этот аргумент, однако, проистекает из смещения априорного знания со знанием врожденным. Априорность арифметики не означает ее врожденности, т. е. безусловной данности для любого мыслящего сознания. Априорность означает лишь интрасубъективность и эквифинальность арифметических представлений, т. е. их неизбежное появление в качестве необходимой формы мышления в любом мыслящем сознании. Исторически же это появление обусловлено многими обстоятельствами. Первобытный человек, считающий до пяти, конечно, уже производит разделение между единичным и множественным, а это значит, что универсальное онтологическое разделение, лежащее в основе арифметики уже налицо. Но имеется особая трудность в последовательном соединении этого разделения с опытом, которая состоит в развитии числа как понятия и обусловлена исторически. Эта трудность подлежит особому анализу, но ясно, что она не может служить доводом против априорности исходных представлений арифметики.

5. Априорность представлений евклидовой геометрии

Геометрическое априорное, как и арифметическое, задает некоторого рода абсолютную предметную онтологию, необходимую структуризацию объекта действия с точки зрения эффективности действия.

Представление о пространстве как пустоте не содержит в себе никакой геометрии, или точнее, оно совместимо с любой геометрией. В действитель-

ности, законы геометрии определены свойствами движения. На этот момент впервые указал Беркли в своем известном эссе против Ньютона. «... Когда я говорю о чистом или пустом пространстве, не следует предполагать, что словом „пространство“ обозначается идея, отличная от тела или движения или мыслимая без них. ... Если бы и мое тело было уничтожено, то не могло бы быть движения, а следовательно, и пространства» [5].

Эту мысль повторяет и развивает Э. Мах. Он указывает на определение прямой у Лейбница как множества точек, сохраняющих свое место при вращении тела около двух неподвижных точек, а также на способ механического определения плоскости через процедуру шлифовки поверхностей. Общий вывод его состоит в том, что геометрия фиксирует свойства движений твердых тел, т. е. тел, обладающих пространственным постоянством. Эти законы, однако, только идеализации, так как нет абсолютно твердого тела, как нет совершенной прямой линии и абсолютной плоскости.

Но здесь возникает затруднение. Почему математические идеализации в отличие от физических воспринимаются как абсолютные и неизменные? Мах фиксирует то обстоятельство, что евклидова геометрия выступает как законченная и в своем роде единственная. Он принимает это положение как факт и признает, что во взглядах Канта есть зерно истины. Он полагает, что возможна некоторая новая теория априори, соединяющая эмпиричность и априорность геометрии [6].

Конвенционалисты (Дж. Ст. Милль, А. Пуанкаре) несколько ослабляют трудность, объявляя геометрии схемами опыта, которые не могут быть опровергнуты в сфере опыта. Но это лишь видимое решение проблемы. Очевидно, что речь здесь идет не о том, что геометрия вследствие своей формальной структуры не может быть опровергнута опытом, а о том, что опыт не может существовать без предпосылок евклидовой геометрии. Мы должны обосновать тезис априоризма, а именно, абсолютную значимость евклидовой геометрии для любого опыта. Но это обстоятельство не происходит из формального определения системы геометрических истин.

Деятельностная установка решает это затруднение. С этой точки зрения мы не должны отрицать наличие эмпирической основы геометрии и возможность разъяснения ее понятий в опытах с движением. Но мы должны учитывать праксеологическую природу геометрических понятий, тот факт, что геометрические представления являются определяющими для практики и что по этой причине они в самом процессе своего формирования возводятся в онтологический статус, становятся нормативной основой мышления, основой структуризации любого предмета мышления. Возможность обнаружить истоки геометрии в опыте ничего не говорит о статусе геометрии как системы представлений. Представления о твердых телах, об их движении, о расстояниях между ними, о прямой линии и плоскости — это представ-

ления, определяющие любой опыт и неизбежно приобретающие статус общезначимых представлений практически ориентированного сознания.

В отличие от мира теории, практика как в своей структуре, так и в свойствах объекта остается исторически неизменной. Человек в своем соприкосновении с миром всегда имеет дело с твердыми телами, находящимися на определенном расстоянии друг от друга, претерпевающими те или иные перемещения в пространстве. И даже техническое оснащение практики ничего не меняет. Все наши инструменты нацелены на свойства твердых тел как на ее исходный объект. Общезначимость и устойчивость евклидовых представлений для сознания объясняется их включенностью в структуру предметной практики.

Развитие теоретической рефлексии позволяет подойти к аксиомам геометрии и со стороны опыта, и с позиций различного рода теоретических соображений. Так мы выводим понятие прямой из вращения твердого тела, понятие плоскости из понятия движения. Это верные соображения, показывающие возможность обоснования геометрии на основе опыта, но они упускают из виду, что эти понятия уже определились как общезначимые онтологические интуиции, определяющие предмет практики. Эмпирическое обоснование евклидовой геометрии, таким образом, это привнесенное обоснование, полезное в смысле анализа ее содержания, но не учитывающее ее первичного праксеологического статуса.

Здесь нужно отметить подход Г. Динглера (1881–1954), приближающийся в определенном смысле к намеченному здесь праксеологическому пониманию геометрии. Концепция Динглера направлена против мнения Пуанкаре, согласно которому ни одна из геометрий не может быть объявлена более истинной, чем другая. По мнению Динглера, евклидова геометрия имеет особый статус, она в отличие от всех других геометрий обладает реальностью и истинностью. Принципы евклидовой геометрии, по мнению Динглера, абсолютны, поскольку они проистекают из наших требований к эксперименту. Теоретически значимый эксперимент должен быть воспроизводим, но это возможно лишь в том случае, если он будет составлен из воспроизводимых частей и геометрических форм, обеспечивающих соподчинение этих частей. Определяющей геометрической формой является плоскость, как наипростейшая поверхность, обе стороны которой одинаковы. Преимущество этой геометрической формы состоит в том, что она воспроизводима. Техническое искусство с древнейших времен ориентировано прежде всего на производство плоских поверхностей, это производство является основой производства всех измерительных инструментов. Плоскость не просто мыслится, как это думал Кант, она производится, вносится в предметную реальность. В отношении плоскости мы вправе говорить об *априори изготовления*. Поскольку определение плоскости лежит в основе

определения всех других геометрических понятий, то евклидова геометрия в целом приобретает статус априорной в смысле изготовления. Эта особенность относится только к евклидовой геометрии и никакой другой.

Наука в характеристике Маха и Киргоффа опирается на описание опыта. Но это не соответствует действительности. Мы должны включить в понятие опыта наличие вмешательства, действия и воспроизведения. Понимание опыта как эксперимента требует принятия установок евклидовой геометрии как его априорной структуры. В сфере эксперимента, говорит Динглер, «скрылись платоновские идеи, после того как для них более не осталось места в безотрадном мире чистого эмпиризма» [7].

Динглер убежден, что он доказал реальное существование евклидовой геометрии и, соответственно, не существование альтернативных геометрий. Неевклидовы, многомерные и другие возможные геометрии существуют, по его мнению, только как непротиворечивые логические системы, они могут занимать определенное место в структуре теоретического знания как функции, связывающие показания экспериментов, но они не существуют как реальные или метафизические.

Ценность теории Динглера состоит в том, что он впервые вводит человеческую практику в обоснование априорного знания. Важно и то, что опытное знание у него не противопоставляется знанию априорному: свойства телесности, фиксируемые в опыте и в производстве, могут быть, по его мнению, возведены в ранг априорных вследствие их особой значимости для практической ориентации человека в мире. Априорное, таким образом, соединяется с реальным.

Основной недостаток концепции Динглера состоит в ее привязанности к понятию эксперимента и к активности, связанной с этим понятием. Эксперимент — это явление зрелой науки, но геометрия и арифметика сформировались как априорные структуры задолго до появления экспериментальной науки. Этот факт принуждает нас предполагать, что априорный статус геометрии обусловлен не специфической конструктивной активностью, связанной с экспериментом, а деятельностью установкой познающего субъекта вообще, имеющей место в любой сфере знания и на любом его этапе. Установка на активность в сфере эксперимента имеет также тот недостаток, что она не позволяет подойти к обоснованию априорности категорий и логики как высших нормативных структур сознания.

Евклидова геометрия является исключительной геометрией, она является онтологически означенной или онтологически истинной. Все другие геометрии существуют как формальные структуры, имеющие возможность получить эмпирическую интерпретацию, но они не имеют онтологического значения. Онтологически истинной является лишь евклидова геометрия. В этом состоит ее особое значение для математики и для философии. Именно

евклидова геометрия есть система понятий, структурирующих предметность как максимально пригодную для действия

Деятельностное обоснование априорного знания важно в том отношении, что оно, с одной стороны, реабилитирует традиционный априоризм в его наиболее существенных моментах, прежде всего в радикальном разделении формы и содержания мышления, а с другой стороны, естественным образом снимает вопрос о его истоках. Мы выяснили, что априорные структуры мышления порождаются деятельностной ориентацией субъекта и отражают необходимые условия самого акта деятельности и необходимые требования к объекту, проистекающие из акта деятельности.

6. Реальность математических объектов

Праксеологическое понимание интуитивной основы математического мышления позволяет нам по-новому посмотреть на старый спор о реальности математических абстракций: являются ли эти абстракции фикциями, изобретениями человеческого ума, либо они содержат в себе некоторое содержание, предопределенное структурой мира, в котором мы существуем. Изложенные соображения дают нам возможность защитить математический реализм и прояснить его действительные основания.

Необходимо разделить методологическое и философское понимание математического реализма. Методологический реализм сводится к утверждению, что в математике в качестве непосредственно истинных могут приниматься не только утверждения о конкретных предметах (числах, фигурах), но и утверждения об абстрактных сущностях таких, как множество действительных чисел и т. п. Номиналисты полагают, что подлинной надежностью обладают только высказывания о конкретных объектах, таких как натуральные числа и операции с ними. Этот спор в настоящее время можно считать законченным: методология математики в достаточной степени прояснила тот факт, что строго номиналистическое построение математики не может быть осуществлено.

Необходимо также отделить математический реализм от математического объективизма, который имеет существенно иные истоки и иную сферу действия. Обсуждая проблему реальности в математике, Р. Пенроуз ставит вопрос следующим образом: являются ли математические теории фикциями, изобретениями человеческого ума или они открываются нами, как предсуществующие [8]. Примеры, которые он рассматривает для подтверждения позиции реализма, показывают, что в действительности речь идет не о реальной (метафизической) подоснове математических теорий, но об их объективной определенности в системе математического знания. Множества Мандельброта, конечно, объективно определены операциями

с комплексными числами, но мы не можем им, в отличие от арифметики и евклидовой геометрии, приписать реальную (метафизическую) значимость.

Для философии математики наиболее трудной и наиболее важной является именно идея метафизического реализма, который стремится найти за математическими абстракциями некоторого рода реальное существование. Праксеологическое понимание математических идеализаций решает этот вопрос в положительном смысле. Мы выяснили, что система исходных представлений математики не вымысел, не конвенция и не плод свободного воображения: она навязана реальностью, а именно теми аспектами в структуре реальности, которые определяют человеческую практику. Система исходных математических идеализаций как однозначная для мышления задана деятельностной установкой мышления, но за этими идеализациями стоит реальная структура мира: дискретность мира, определяющая возможность счета, и реальные движения, определяющие структуру геометрии. В этом смысле математические объекты — необходимые составляющие картины мира и, следовательно, объекты, имеющие реальную значимость.

Понятие реальности раскрывает и уточняет понятие априорности. С праксеологической точки зрения, априорные принципы — это не внутреннее устройство мышления самого по себе, а идеализированное отражение сторон реальности, являющихся необходимыми для его действия и мышления. Априорное и реальное совпадают, так как на уровень априорных и общезначимых возводятся те аспекты реальности, которые являются необходимыми условиями деятельности. Это причинность, единичность и множественность, пространство, время, движение. Исходные представления арифметики и евклидовой геометрии априорны, так как они произведены и удерживаются в нашем сознании именно этими сторонами бытия, определяющими деятельность.

В своем отношении к миру человек строит два уровня представлений: теоретические представления, систематизирующие данные опыта, и онтологические представления, фиксирующие в себе необходимые условия деятельности. Оба этих уровня представлений обладают объективной значимостью, ибо оба они определены и подтверждены практическим отношением человека к миру. Устойчивость и общезначимость исходных математических представлений говорит не об их принадлежности к чистому сознанию, но об их связи со структурами реальности, определяющими деятельность и имеющими значимость в отношении любого опыта. Законы математики — не законы природы, основанные на опыте и корректируемые им. Но они имеют отношение к фундаментальным аспектам реальности, определяющим саму возможность человеческого бытия и мышления.

Связывая исходные математические идеализации с универсальной онтологией, праксеологический априоризм оправдывает традиционную веру

математиков в реальную значимость математических объектов и теорий. От кантовского априоризма с его абсолютной имманентностью форм мышления мы должны возвратиться к априоризму Лейбница, для которого универсальные принципы мышления выступают одновременно и в качестве основополагающих характеристик реальности. Наше различие евклидовой геометрии как реальной от других геометрий, полученных из нее посредством логических трансформаций, безусловно оправдано и имеет вполне определенный смысл: в отличие от других геометрий евклидова геометрия является онтологически истинной, согласованной с принципами идеальной предметности. Все геометрии равноправны в качестве формальных структур, они равноправны в возможности эмпирической интерпретации и практического использования, но только евклидова геометрия истинна онтологически и в этом смысле обладает статусом реальности. Ясно, что такого рода реализм относится только к генетически исходной группе математических понятий, имеющих онтологическую значимость. К внутренним объектам теории, полученным на основе конструкции, применение понятий априорности и реальности не имеет смысла. Эти понятия объективны, но не реальны.

Мы вправе, таким образом, говорить о метафизической основе математики как о системе представлений о реальности, включенных в ее исходные понятия. Метафизика в опытной науке выступает либо как система гипотез, предвещающих теоретические принципы (идея атомизма, импетуса, электрического флюида) либо как система воззрений на мир, производных от принятой методологии (идея детерминизма, дополненности, холизма). Для метафизики в опытных науках существенно то, что она меняется от эпохи к эпохе вместе со сменой теорий и принятых парадигм. Метафизика математики существенно отлична от метафизики опытных наук в том отношении, что она имеет категориальный и вневременный характер.

7. Новый подход к проблеме обоснования математики

Все программы обоснования математики являются априористскими в том смысле, что они постулируют абсолютную надежность некоторой части математики и некоторых методов рассуждения. Они постулируют наличие *обосновательного слоя*, который не подлежит обоснованию вследствие своего особого статуса. Главная методологическая трудность всех программ обоснования состоит в определении природы и границ этого слоя.

Гильберт соглашался с Кантом в том, что чистое созерцание является наиболее глубоким фундаментом математики. Он считал, однако, что Кант не дал адекватного определения сферы априорного знания. «... В кантовской теории, — писал Гильберт, — все еще остаются антропоморфные шлаки, от

которых она должна быть очищена, и после того как они будут удалены, останется лишь та априорная установка, которая лежит в основе чисто математического знания. По существу она и есть та финитная установка, которую я охарактеризовал в ряде своих работ» [9]. Гильберт отождествляет априорную математику с финитной и проблема обоснования математики получает смысл как обоснование бесконечного на основе конечного.

Эта программа, однако, оказалась нереализуемой. Итог исследований в основаниях математики в XX в. можно свести к тому положению, что бесконечное не может быть обосновано на основе конечного. Мы должны, таким образом, либо отказаться от построения программ обоснования математики вообще, либо некоторым образом реабилитировать бесконечное, поместив его в круг априорных предпосылок математического знания. Ценность прагматического анализа исходных представлений математики состоит в том, что он указывает на возможность реализации второй альтернативы.

Деятельностное обоснование принципов классической логики позволяет оправдать универсальность закона исключенного третьего и отбросить как необоснованные соответствующие ограничения в метатеории. Мы уясняем то обстоятельство, что этот закон покоится на той же интуитивной основе, что и другие законы логики и что он не может быть поставлен под сомнение перед лицом какого-либо нового содержания мышления. С этой точки зрения мы отвергаем логический индуктивизм Брауэра, согласно которому состав логики определяется содержанием мышления и может меняться исторически.

Деятельстный анализ вскрывает единство арифметических и геометрических идеализаций и обосновывает полную надежность геометрии как части обосновательного слоя. Мы приходим здесь к обоснованию тезиса Фреге, согласно которому геометрические и арифметические истины происходят из одного и того же источника и что действительным основанием математики является геометрия.

Здесь намечается возможность новой программы обоснования. Аргументы Гёделя против формалистской программы существенным образом опираются на факт финитности гильбертовской метатеории. Введение геометрии и логики в полном объеме в состав обосновательного слоя меняет ситуацию. Геометрическая интуиция, не отличаясь по своей надежности от арифметической, обладает тем преимуществом, что она содержит в себе континуум. Обосновательный слой становится трансфинитным и в этом случае открывается возможность строгого обоснования теории действительных чисел и математического анализа. Известно, что добавление аксиомы бесконечности к арифметике открывает путь к обоснованию непротиворечивости некоторых простых, но вместе с тем достаточно сильных аксиоматик

теории множеств [10]. В этом плане получает обосновательное значение идея А. Н. Колмогорова о построении анализа на основе понятия величины [11].

Новая обосновательная методология, таким образом, становится возможной через критику финитизма и через оправдание некоторой части трансфинитной математики в качестве онтологически истинной. В этой новой стратегии обоснования математики основная проблема состоит не в отделении конечного от бесконечного, а в отделении бесконечного, которое нуждается в обосновании, от того бесконечного, которое имеет непосредственное онтологическое обоснование.

В этом плане надо подчеркнуть важность перехода от понятия априорности математических представлений к понятию их реальности. Определение обосновательного слоя как априорного в старом смысле оставляет его беспредпосылочным и субъективным в своих критериях. Понятие реальности является уточнением априорности. Деятельностное обоснование априорного знания вскрывает его истоки и определяет его действительный объем. Последнее является принципиально важным для обоснования математики.

Некоторые идеи, связанные с непосредственной опорой на онтологическую истинность в процессе обоснования математики, были высказаны К. Гёделем в его статье «Расселовская математическая логика» [12]. Основная направленность рассуждения Гёделя состояла в критике номиналистского обоснования математики, а именно, тех программ, которые на основе конечных номиналистически интерпретируемых понятий пытаются ввести всю систему определений и принципов, необходимых для оправдания теории множеств. Таковы не-класс концепция множеств Рассела, которая конструирует понятие класса на основе понятий логической функции и значения, и финитистский подход Гильберта, нацеленный на оправдание бесконечных множеств в рамках финитной математики. Идея Гёделя состояла в том, чтобы некоторые из высших принципов математики, связанных с бесконечностью, принять на основе их непосредственной истинности в качестве безусловно ясного описания математической реальности.

Эта стратегия кажется малооправданной, ибо вся обосновательная критика классической математики была направлена на то, чтобы устранить неконструктивные интуиции из математики, как чреватые противоречиями. Интуитивная ясность определений, как показывает практика, не дает нам гарантий их совместности. Идея Гёделя, однако, приобретает смысл, если мы имеем обоснование онтологической истинности тех или иных абстрактных математических принципов. Ценность праксеологической теории априорного знания состоит в том, что она позволяет выработать такое обоснование по отношению к части математических истин. Несомненно, что возможно строгое обоснование априорного и, следовательно, предельно надежного

характера принципов классической логики, арифметики и элементарной геометрии.

С эмпирической точки зрения обосновательный слой всегда относителен и подвержен корректировке и проблема строгого обоснования математики лишена смысла. В этом состояла суть позиции, защищаемой И. Лакатосом, М. Клайном, Ф. Китчером и многими другими математиками и философами. Праксеологический анализ исходных математических идеализаций показывает ее полную несостоятельность. Математика имеет свои истоки не в опыте, а в категориальной онтологии и представляет собой знание, радикально отличное от знания, основанного на опыте. Онтологически означенная система математических принципов представляет собой обосновательный слой, не нуждающийся в каком-либо дополнительном обосновании. Регресс в бесконечность обрывается на онтологически истинных суждениях и мы достигаем в математике абсолютного фундамента, который не достигим в сфере эмпирического знания. Подлинное обоснование математики есть евклидианское обоснование, базирующееся на онтологически истинных принципах. Такого рода обоснование абсолютно и имеются основания думать, что оно достижимо для всех основных теорий современной математики.

Процесс обоснования математики не закончен. Старые программы обоснования были обречены на неудачу вследствие слабости своих методологических и философских предпосылок. С достаточной определенностью можно предполагать, что прогресс в решении проблемы обоснования зависит сегодня не столько от изобретения новых методов логического анализа, сколько от углубления философии математики, от прояснения наших представлений о природе математического мышления и путей рационального оправдания обосновательного слоя. Прояснение глубинной метафизики математического мышления, прояснение связи исходных математических понятий со структурой реальности, дает нам возможность существенного продвижения в этом направлении.

Литература

1. *Frege G.* Posthumous writings. Chicago University Press, 1974, p. 224.
2. *Аристотель.* Сочинения в четырех томах, т. 1, — М., 1976, с. 326.
3. *Бозций.* Утешение философией и другие трактаты.— М., 1990, с. 149.
4. *Фреге Г.* Основоположения арифметики. — Томск, 2000, с. 45.
5. *Беркли Дж.* Сочинения.— М., 1978, с. 226.
6. *Мах Э.* Познание и заблуждение.— М., БИНОМ, 2009, с. 447.
7. *Динглер Г.* Эксперимент. Его сущность и история. (Главы из книги. Перевод с немецкого А. Михайловского) // Вопросы философии, № 12, 1997. с. 103.
8. *Пенроуз Р.* Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики.— М., 2003, с. 87–89.
9. *Гильберт Д.* Избранные труды. Т. 1.— М., 1998, с. 448
10. *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств.— М., 1981, с. 86–96.
11. *Колмогоров А. Н.* Введение в анализ.— М., 1966, с. 14.
12. *Godel K.* Russells mathematical logic // Pears D. F. (ed.). Bertrand Russell. Collection of critical essays. New York, 1972.

Оглавление

Предисловие редактора	4
-----------------------------	---

Часть I

Математики об основаниях математики и ее проблемах	27
---	----

<i>С. П. Новиков. Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе</i>	29
<i>А. Н. Колмогоров. Автоматы и жизнь</i>	57
<i>П. К. Рашевский. О догмате натурального ряда</i>	77
<i>В. И. Арнольд. Математика и физика: родитель и дитя или сестры?</i> ..	85
<i>С. А. Вékшенов. Метафизика и математика двойственности</i>	91

Часть II

Математики прошлого об основаниях математики	115
---	-----

<i>Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Перевод В. Л. Гончарова</i>	117
<i>А. Пуанкаре. Пространство и время. Перевод С. Г. Суворова</i>	133
<i>Л. Э. Я. Брауэр. Интуиционизм и формализм. Перевод С. Л. Катречко (при участии Н. Е. Горфинкель)</i>	149
<i>Курт Гёдель. Что такое континуум-проблема Кантора? Перевод С. А. Вékшенова</i>	163
<i>П. Дж. Козн. Об основаниях теории множеств. Перевод Ю. И. Манина</i> ..	189
<i>Герман Вейль. Бог и вселенная. Перевод А. П. Ефремова</i>	199

Часть III

Физики о соотношении математики и физики	217
---	-----

<i>Ю. С. Владимиров. Физика, метафизика и математика</i>	219
<i>Ю. И. Кулаков. Концепция двух миров</i>	241
<i>А. К. Гуц. Метафизика времени и реальности</i>	255
<i>Вл. П. Визгин. Непостижимая эффективность аналитической механики в физике</i>	275
<i>А. П. Ефремов. «Отраженное воплощение» математики</i>	291
<i>Д. Г. Павлов. Число, геометрия и физическая реальность</i>	317
<i>Р. Ф. Полищук. Математика как часть физики</i>	335

Часть IV

Философия и основания математики	351
<i>И. Р. Шафаревич. Из истории естественно-научного мировоззрения . .</i>	353
<i>П. П. Гайденко. Постметафизическая философия как философия про- цесса: абсолютизация времени</i>	377
<i>В. В. Миронов. Метафизика и математика: точки соприкосновения . .</i>	393
<i>А. П. Огурцов. Метафизика и способы обоснования исчисления веро- ятностей. (Разрозненные заметки)</i>	415
<i>В. Я. Перминов. Метафизика и основания математики</i>	441

Научное издание

**МЕТАФИЗИКА. ВЕК XXI.
АЛЬМАНАХ.
ВЫП. 4:
МЕТАФИЗИКА И МАТЕМАТИКА**

Ведущий редактор *И. А. Маховая*

Редактор *А. С. Попов*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Корректор *Н. Н. Ектова*

Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ

Подписано в печать 07.06.11. Формат 70×100/16.

Усл. печ. л. 37,70. Тираж 300 экз. Заказ 6010.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».

143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

www.oaompk.ru, www.oaompk.ru тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685

Строго говоря, нет науки, которая не имела бы своей метафизики, если под этим понимать всеобщие принципы, на которых строится определенное учение и которые являются зародышами всех истин, содержащихся в этом учении и излагаемых в ней.

Ж. Л. Д'Аламбер

Метафизика — попытка охватить мир как целое посредством мышления.

Б. Рассел

Метафизика — исследование общих черт структуры мира и наших методов проникновения в эту структуру.

М. Борн

Префикс «мета» призван, собственно говоря, означать лишь то, что речь идет о вопросах, которые идут «потом», т. е. о вопросах относительно оснований соответствующей области; почему же никак нельзя исследовать то, что, так сказать, идет за физикой?

В. Гейзенберг

Метафизика — предельный вид философского знания, связанный с наиболее абстрактной и глубокой формой рефлексии (размышления) человека над проблемами личного и мирового бытия. (...) Термин «метафизика» отличается от понятия философии. Это как бы ее теоретическая часть или сердцевина — учение о первоосновах сущего.

В. В. Миронов

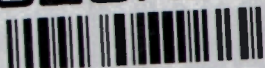
ISBN 978-5-9963-0551-3



9 785996 305513

интернет-магазин

OZON.ru



71809977